

Розділ 3. Аналітична геометрія.

Тема 7. Пряма на площині

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої, тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

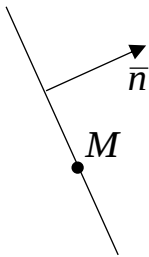
1) Загальне рівняння прямої на площині

$$Ax + By + C = 0 \quad (7.1)$$

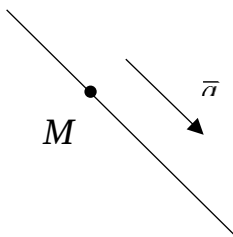
Коефіцієнти при невідомих є координатами вектора $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярного прямій, який називають *нормальним вектором* прямої.

2) Рівняння прямої за точкою $M(x_0, y_0)$ та нормальним вектором $\vec{n} = (A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (7.2)$$



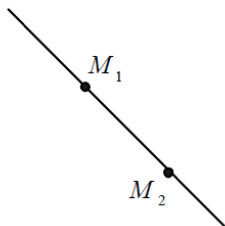
3) Рівняння прямої за точкою $M(x_0, y_0)$ та напрямним вектором $\vec{a} = (m, p)$



Вектор, паралельний до прямої, називається її *напрямним вектором*.

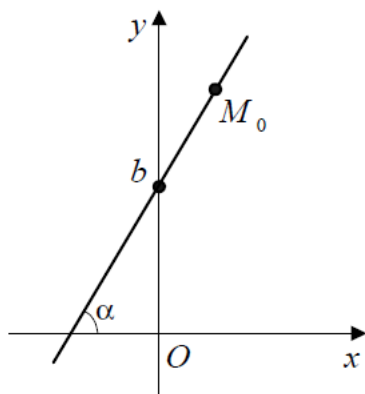
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} \quad (7.3)$$

4) Рівняння прямої за двома точками $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (7.4)$$

5) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



$$y = kx + b \quad (7.5)$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

Кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута між прямою та додатним напрямком осі Ox , b - відрізок, що відтинає пряма на осі Oy .

6) Рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ та має кутовий коефіцієнт k

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (7.6)$$

Взаємне розташування двох прямих на площині

Нехай дві прямі задані своїми загальними рівняннями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Нормальні вектори цих прямих будуть мати координати $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$ відповідно. Тоді один з кутів між прямими знаходиться за формулою

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (7.7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

якщо прямі l_1 та l_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, отже, $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$, або

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (7.8)$$

Умова паралельності прямих:

якщо прямі l_1 та l_2 паралельні, то їх нормальні вектори також паралельні, а значить їх координати пропорційні. Отже,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (7.9)$$

(при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ прямі паралельні, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають)

Якщо прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (7.10)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$k_1 k_2 = -1. \quad (7.11)$$

Умова паралельності прямих:

$$k_1 = k_2. \quad (7.12)$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (7.13)$$