

Тема 8. Криві другого порядку.

До кривих другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола, парабола, рівняння яких у декартовій прямокутній системі координат є рівняннями другого степеня відносно x і y . Криві другого порядку називають ще конічними перерізами, оскільки їх можна дістати як лінії перетину прямого кругового конуса площинами. Так, якщо перетнути конус площиною, яка не проходить через вершину конуса і перетинає всі його твірні, то матимемо еліпс (рис. 8.1, а), якщо перетнути конус площиною, паралельною двом твірним конуса, то дістанемо гіперболу (рис. 8.1, б), якщо перетнути конус площиною, паралельною одній твірній конуса, то матимемо параболу (рис. 8.1, в).

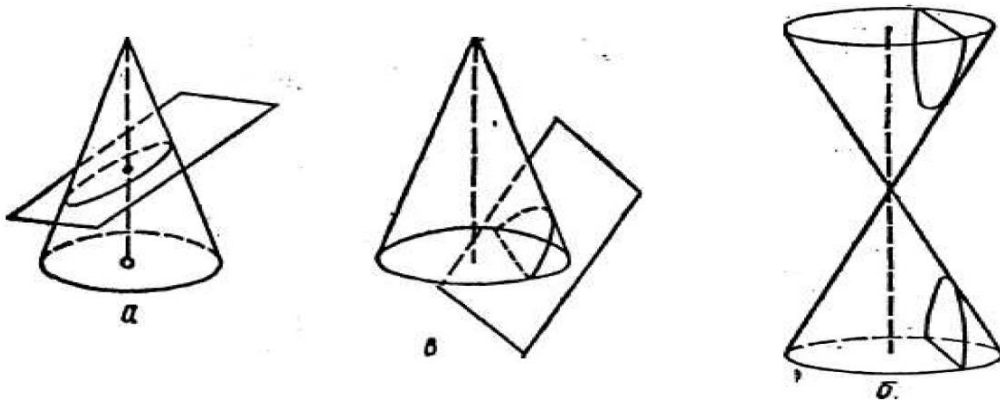


Рисунок 8.1 – Конічні перерізи

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини, яка називається центром.

Рівняння кола з центром в початку координат і радіусом R має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (8.1)$$

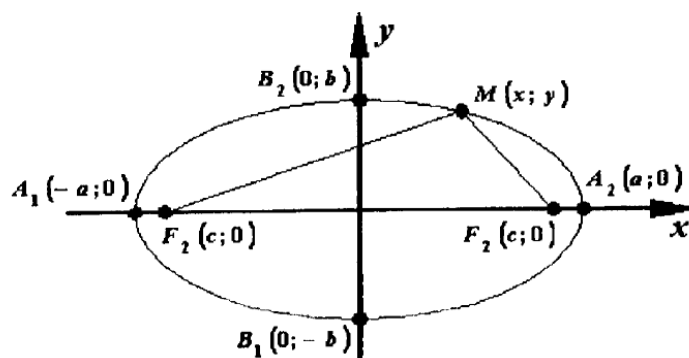
Рівняння кола з центром в точці $O(x_0, y_0)$ радіуса R має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (8.2)$$

Еліпсом називається множина точок площини сума відстаней від яких до двох заданих точок, що називаються фокусами, є величина постійна, більша за відстань між фокусами.

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox , має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad (8.3)$$



де a - довжина великої півосі, b - довжина малої півосі. Фокуси еліпса знаходяться у точках $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$.

Залежність між параметрами a, b, c виражається співвідношенням

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (8.4)$$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (8.5)$$

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса називаються прямі, які перпендикулярні до великої осі еліпса і лежать на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра еліпса. *Рівняння директрис еліпса* мають вигляд:

$$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}. \quad (8.6)$$

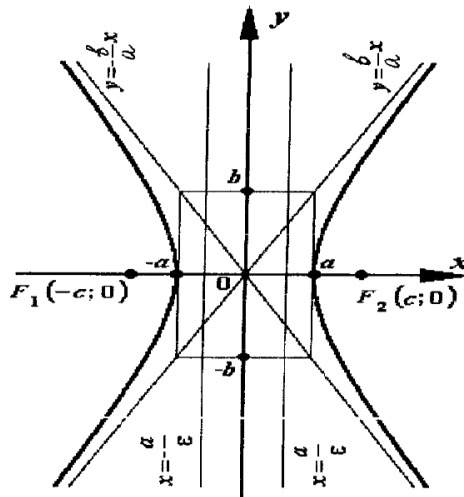
Якщо центр симетрії еліпса знаходиться в точці $M(x_0, y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox , Oy , то рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (8.7)$$

Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней від яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина постійна, менша за відстань між фокусами

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox , має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.8)$$



де a - довжина дійсної півосі, b - довжина уявної півосі. Фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$.

Залежність між параметрами a, b, c виражається співвідношенням

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (8.9)$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної відстані $2c$ до дійсної осі $2a$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (8.10)$$

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$.

Директрисами гіперболи називаються прямі, які перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і лежать на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра гіперболи. Рівняння директрис гіперболи мають вигляд:

$$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}. \quad (8.11)$$

Гіпербола має дві *асимптоти*, рівняння яких

$$y = \frac{b}{a}x \text{ і } y = -\frac{b}{a}x \quad (8.12)$$

Якщо центр симетрії гіперболи знаходиться в точці $M(x_0, y_0)$, а осі симетрії паралельні осям Ox , Oy , то рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (8.13)$$

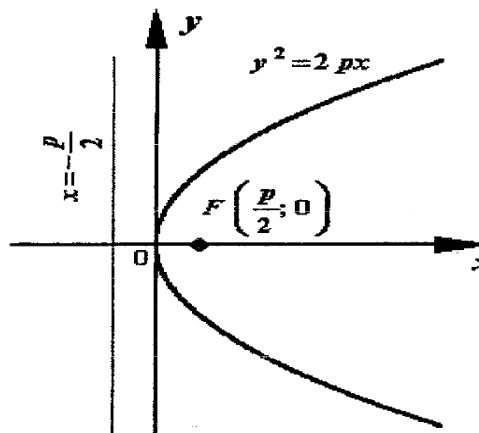
Параболою називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і від даної прямої, яка називається директрисою.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox , має вигляд

$$y^2 = 2px, \quad (8.14)$$

де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то гілки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то гілки параболи напрямлені вліво.



Фокус параболи знаходиться у точці $F(\frac{p}{2}, 0)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy , має вигляд

$$x^2 = 2py. \quad (8.15)$$

Якщо $p > 0$, то гілки параболи напрямлені вгору, якщо $p < 0$, то гілки параболи напрямлені вниз. Фокус такої параболи є точка $F(0, \frac{p}{2})$, а рівняння директриси

$$y = -\frac{p}{2}.$$