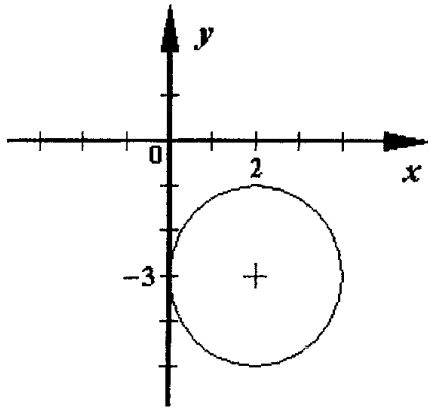


Приклади розв'язання задач до теми «Криві другого порядку».

Приклад 1. Складіть рівняння кола з центром у точці $A(-3,1)$ і з радіусом, що дорівнює 4. Побудуйте це коло.



Розв'язання. Підставимо в рівняння (8.2) задані за умовою координати точки A та радіус і отримаємо

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Приклад 2. Знайти параметри еліпса $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$, координати його фокусів та відстань між ними.

Розв'язання. З рівняння еліпса велика піввісь $a = 7$, мала піввісь $b = 6$. Із співвідношення (8.4) $c^2 = 49 - 36 = 13$, $c = \sqrt{13}$. Отже, координати фокусів $F_1(-\sqrt{13}, 0)$ і $F_2(\sqrt{13}, 0)$, а відстань між ними $2c = 2\sqrt{13}$.

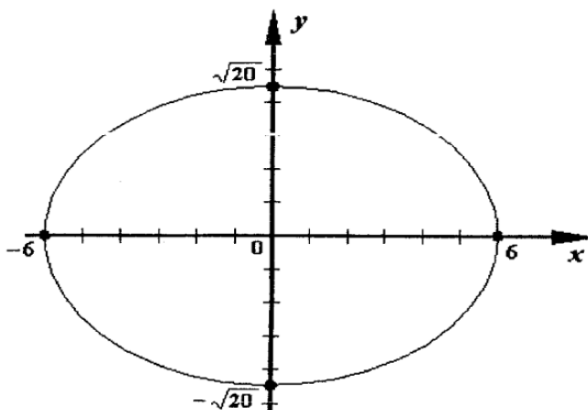
Приклад 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox , якщо велика вісь дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 8.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $a = 6$ і $c = 4$. Із співвідношення

(8.4) знайдемо b

$$b^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20,$$

$$b = \sqrt{20}$$



Підставимо значення a, b в рівняння (8.3)

і дістанемо $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

Приклад 4. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо його велика вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Розв'язання. За умовою $2a=16$, отже $a=8$. Підставимо це значення в формулу (8.10) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{8}$. За умовою $\varepsilon = \frac{2}{3}$, отже $\frac{c}{8} = \frac{2}{3}$ і $c = \frac{16}{3}$. Із співвідношення (8.4) знайдемо $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - \frac{256}{9} = \frac{320}{9}$. Тоді шукане рівняння еліпса буде мати вигляд $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{320/9} = 1$.

Приклад 5. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ і $B(3, \sqrt{2})$.

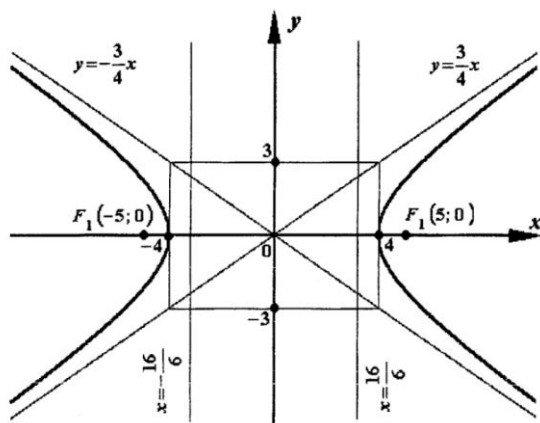
Розв'язання. Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри a і b . Знайдемо їх, підставивши координати точок в рівняння еліпса (8.3)

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{6}{b^2} \right), \\ \frac{9}{3} \left(1 - \frac{6}{b^2} \right) + \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12, \\ b^2 = 8. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Приклад 6. Побудувати гіперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання. З рівняння гіперболи знайдемо її півосі $a=4, b=3$. Тоді із



співвідношення (8.9) знайдемо

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5. \quad \text{Фокуси}$$

гіперболи $F_1(-5, 0)$ і $F_2(5, 0)$. Знайдемо

$$\text{ексцентриситет } \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}. \quad \text{Рівняння}$$

асимптот (8.12) мають вигляд $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Рівняння директрис (8.11) мають вигляд $x = \pm \frac{4}{5/4} = \pm \frac{16}{5}$.

Приклад 7. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами дорівнює 26.

Розв'язання. З умови задачі $2a = 24 \Rightarrow a = 12$, $2c = 26 \Rightarrow c = 13$. Знайдемо

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

Підставимо знайдені параметри в рівняння (8.8) і отримаємо

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Приклад 8. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $F_1(-20,0)$, $F_2(20,0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{4}{3}$.

Розв'язання. З умови задачі маємо $c = 20$. Підставимо це значення в формулу для ексцентриситету $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{20}{a}$. З умовою $\frac{20}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 15$. Далі знайдемо $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{400 - 225} = \sqrt{175}$. Підставимо знайдені параметри в рівняння (8.8) і отримаємо

$$\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{175} = 1.$$

Приклад 9. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо довжина її дійсної осі дорівнює 16 і гіпербола проходить через точку $(10,3)$.

Розв'язання. За умовою $2a = 16$, тобто $a = 8$. Підставивши в рівняння (8.8) значення $a = 8$ і координати заданої точки, отримаємо

$$\frac{10^2}{64} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 16.$$

Підставимо знайдені параметри в рівняння (8.8) і отримаємо

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Приклад 10. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(3,0)$.

Розв'язання. Оскільки фокус лежить на осі Ox , то рівняння параболи має вигляд (8.14). Знайдемо параметр параболи. Оскільки координати фокуса

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, то $\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 3$. Підставивши значення параметра в рівняння параболи, отримаємо $y^2 = 6x$.

Приклад 11. скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(2, -4)$.

Розв'язання. Шукана парабола симетрична відносно осі Oy , отже, її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$. Підставимо в це рівняння координати точки A і знайдемо p

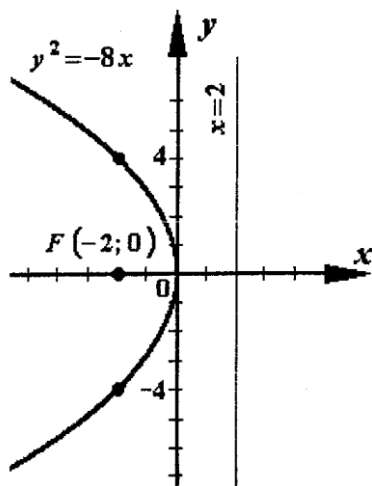
$$2^2 = 2p \cdot (-4),$$

$$4 = -8p,$$

$$p = -\frac{1}{2}.$$

Підставимо знайдене значення параметра в рівняння параболи $x^2 = -y$.

Приклад 12. За заданим рівнянням параболи $y^2 = -8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси. Побудувати параболу.



Розв'язання. З рівняння параболи маємо $2p = -8 \Rightarrow p = -4$. Парабола симетрична відносно осі Ox , її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, тобто $F(-2, 0)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, тобто $x = 2$.