

Приклади розв'язання задач до теми «Пряма і площина в просторі».

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(5,2,-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3,-4,2)$.

Розв'язання. За рівнянням (9.2) отримаємо

$$3(x-5) - 4(y-2) + 2(z+1) = 0,$$

$$3x - 4y + 2z - 5 = 0.$$

Приклад 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(3,2,-1)$, $M_2(1,0,2)$, $M_3(-1,2,4)$.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням (9.3)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 1-3 & 0-2 & 2+1 \\ -1-3 & 2-2 & 4+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-3) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-10(x-3) - 2(y-2) - 8(z+1) = 0,$$

$$10x + 2y + 8z - 26 = 0.$$

Приклад 3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,2,-3)$ паралельно площині $5x - 2y + z - 6 = 0$.

Розв'язання. Для заданої площини $5x - 2y + z - 6 = 0$ вектор нормалі

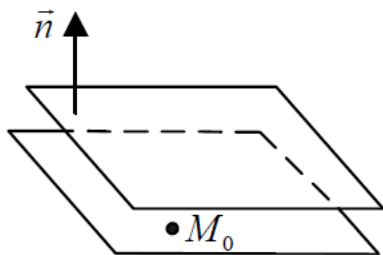
$\vec{n} = (5, -2, 1)$. Оскільки шукана площина паралельна

заданій площині, то вона також буде перпендикулярна до вектора $\vec{n}$. Отже, з рівняння

(9.2)

$$5(x-2) - 2(y-2) + 1(z+3) = 0,$$

$$5x - 2y + z - 3 = 0.$$



Приклад 4. Знайти кут між площинами $3x - y + 2z - 5 = 0$ і

$$3x - 2y + 6z - 1 = 0$$

Розв'язання. Запишемо нормальні вектори до заданих площин:

$\vec{n}_1 = (3, -1, 2)$, $\vec{n}_2 = (3, -2, 6)$. Кут знайдемо з формули (9.4)

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{23}{\sqrt{14} \sqrt{49}} = \frac{23}{7\sqrt{14}},$$

$$\varphi = \arccos \frac{23}{7\sqrt{14}}.$$

Приклад 5. Знайти відстань від точки $A(4, -1, 3)$ до прямої

$$2x - 2y + z + 2 = 0.$$

Розв'язання. За формулою (9.7)

$$d = \frac{|2 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5.$$

Приклад 6. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить $M_0(4, -1, 3)$ через точку паралельно вектору $\vec{a} = (-2, 1, 4)$.

Розв'язання. Канонічні рівняння мають вигляд (9.8)

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4},$$

а параметричні рівняння запишемо у вигляді (9.9)

$$\begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$$

Приклад 7. Пряма задана загальними рівняннями
$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 3 = 0, \\ x + 2y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

Знайти її канонічні рівняння.

Розв'язання. Знайдемо на прямій довільну точку M_0 , наприклад, точку з координатою $x = 0$. Підставивши ці значення в загальні рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} 3 \cdot 0 + y - 2z + 3 = 0, \\ 0 + 2y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи

$$\begin{cases} y - 2z = -3 \\ 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

отримаємо $y = 1$ та $z = 2$. Отже, отримали точку $M_0(0,1,2)$, яка лежить на заданій прямій. Знайдемо напрямний вектор прямої. Нормальні вектори даних площин $\bar{n}_1 = (3,1,-2)$ і $\bar{n}_2 = (1,2,3)$. Їх векторний добуток

$$\bar{a} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 11\bar{j} + 5\bar{k}$$

За знайденою точкою $M_0(0,1,2)$ та напрямним вектором $\bar{a} = (7,-11,5)$ запишемо канонічні рівняння прямої (9.8)

$$\frac{x}{7} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z-2}{5}.$$

Приклад 8. Знайти точку перетину прямої та площини $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$

та площини $2x + 4y + 3z - 8 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої у параметричній формі

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1} = t,$$

$$\frac{x-2}{3} = t \Rightarrow x = 2 + 3t,$$

$$\frac{y-1}{-2} = t \Rightarrow y = 1 - 2t,$$

$$\frac{z+1}{1} = t \Rightarrow z = -1 + t.$$

$$\text{Знайдені рівняння} \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ підставимо в рівняння площини і знайдемо}$$

параметр точки перетину

$$2(2 + 3t) + 4(1 - 2t) + 3(-1 + t) - 8 = 0,$$

$$4 + 6t + 4 - 8t - 3 + 3t - 8 = 0,$$

$$t = 3.$$

Координати точки перетину знайдемо з параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot 3 = 11 \\ y = 1 - 2 \cdot 3 = -5 \\ z = -1 + 3 = 2 \end{cases}$$

Отже, точка перетину $M(11, -5, 2)$.

Приклад 9. Знайти кут між прямими $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4}$ і

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+4}{3}.$$

Розв'язання. За формулою (9.13) знаходимо кут між напрямними векторами $\vec{a} = (-2, 1, 4)$ і $\vec{a}_2 = (5, -2, 3)$ прямих

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{-2 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{0}{\sqrt{21} \sqrt{38}} = 0,$$

$$\varphi = \arccos 0 = 90^\circ.$$

Отже, задані прямі перпендикулярні.

Приклад 10. Знайти кут між прямою $\frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ і площиною

$$x - y + z + 7 = 0.$$

Розв'язання. Випишемо $A = 1, B = -1, C = 1, m = 5, n = 1, p = 1$. Тоді за формулою (9.14)

$$\sin \phi = \frac{1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3} \sqrt{27}} = \frac{5}{9},$$

$$\phi = \arcsin \frac{5}{9}.$$