

Границя функції.

Число a називають *границею функції* $f(x)$ в точці x_0 , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Властивості границь.

Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

При обчисленні границь зручно користуватись тим, що коли x_0 належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Приклади

$$10.2. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$$

$$10.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3} = \frac{(-1)^2 + 2 \cdot (-1)}{(-1)^2 - (-1) + 3} = -\frac{1}{5}$$

$$10.4. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 5) = \infty.$$

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \rightarrow x_0$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно великою* при $x \rightarrow x_0$.

Якщо функція $f(x)$ є нескінченно малою (нескінченно великою), то обернена до неї функція $\frac{1}{f(x)}$ буде нескінченно великою (нескінченно малою).

Приклади.

$$10.5 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty.$$

$$10.6 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} = 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 4 \cdot \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

$$10.7 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-2} = \left[\frac{5}{0} \right] = \infty.$$

Тема 11. Методи знаходження границь функції.

Якщо при підстановці замість x його граничного значення x_0 отримаємо невизначеності типу $\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [0^0], [1^\infty]$, то процес обчислення границі називається *розкриттям невизначеності*.

Правила розкриття невизначеностей.

Правило 1. Для того, щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \rightarrow x_0$ чисельник та знаменник прямують до нуля (невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$), потрібно скоротити дріб на $(x - x_0)$ і перейти до границі.

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладі чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 - корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

Приклад 11.1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$.

Підстановкою значення $x = 3$ переконуємось, що маємо невизначеність

$$\left[\frac{0}{0} \right]:$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x} = \left[\frac{9 - 21 + 12}{9 - 9} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Розглянемо рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Тому $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 4)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 4}{x} = -\frac{1}{3}.$$

Приклад 11.2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{1^3 - 1}{1 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Для знаходження цієї границі застосуємо формулу скороченого множення

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2):$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

Правило 2. Границя частки двох многочленів при $x \rightarrow \infty$ (невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) дорівнює:

- відношенню коефіцієнтів при старших степенях, якщо степені чисельника і знаменника однакові;
- нулю, якщо степінь чисельника менше степені знаменника;
- нескінченності, якщо степінь чисельника більше степені знаменника

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, n = m \\ 0, n < m \\ \infty, n > m \end{cases}$$

Приклади.

$$11.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0,$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \infty,$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-4x+5x^2-6x^3}{2x^3+4x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-6}{2} = -3,$$

$$11.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{5x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{5}.$$

Особливі границі.

Перша особлива границя.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

Наслідки першої особливої границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha, \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad 6. \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1.$$

Приклади.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$$

Друга особлива границя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = [1^\infty] = e$$

Наслідки другої особливої границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e, \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k, \quad 3. \lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e.$$

Приклади.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x = [1^\infty] = e^5,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{3x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-2}{x} \right)^x \right)^3 = (e^{-2})^3 = e^{-6},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x+5} \right)^{x+5} = e^4$$