

Тема 12. Диференціювання функції однієї змінної

Визначення. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу Δx прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (12.1)$$

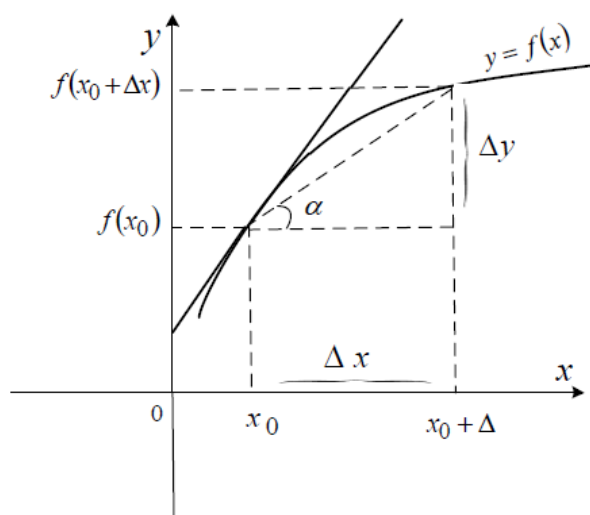
Δy - приріст функції, Δx - приріст аргументу.

Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

Геометричний зміст похідної в точці

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 і кутовому коефіцієнту цієї дотичної

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$



Таблиця 1.1 – Похідні елементарних функцій

1	$(C)' = 0, C = const$	8	$(\cos x)' = -\sin x$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	9	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
3	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	10	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
4	$(e^x)' = e^x$	11	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$	12	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

1. Похідна суми (різниці) двох функцій, кожна з яких має похідну, дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну іншої функції

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

3. Похідна частки двох функцій обчислюється за формулою

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак похідної

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

Приклад 12.1 Обчислити похідну функції $y = 5x^3 - x^2$.

За правилами 1 і 4 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = (5x^3 - x^2)' = (5x^3)' - (x^2)' = 5 \cdot 3x^2 - 2x = 15x^2 - 2x$$

Приклад 12.2 Обчислити похідну функції $y = \sqrt{x}$.

Використовуючи властивості степенів, запишемо функцію у вигляді $y = x^{\frac{1}{2}}$

. За таблицею похідних отримаємо

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Приклад 12.3 Обчислити похідну функції $y = \sin x + 2^x - 4$.

За правилом 1 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = (\sin x + 2^x - 4)' = \cos x + 2^x \ln 2.$$

Приклад 12.4 Обчислити похідну функції $y = x^5 + \frac{1}{x^4} - 6\sqrt[3]{x^2}$.

Використовуючи властивості степенів, запишемо функцію у вигляді $y = x^5 + x^{-4} - 6x^{\frac{2}{3}}$. За правилом 1 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = 5x^4 + (-4) \cdot x^{-4-1} - 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 5x^4 - 4x^{-5} - 4x^{-\frac{1}{3}} = 5x^4 - \frac{4}{x^5} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

Приклад 12.5 Обчислити похідну функції $y = (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x$.

За правилом 2 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = (x^2 - 1)' \cdot \operatorname{tg} x + (x^2 - 1) \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2x \operatorname{tg} x + (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Приклад 12.6 Обчислити похідну функції $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

За правилом 3 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

Похідна складеної функції.

Визначення. Якщо аргументом функції $y = f(u)$ є функція незалежної змінної x , тобто $u = u(x)$, то функція $y = f(u(x))$ називається *складеною* функцією від x . При цьому функцію $f(u)$ називають *зовнішньою*, а функцію $u(x)$ – *внутрішньою* функцією складеної функції $y = f(u(x))$.

Похідна складеної функції $y = f(u(x))$ обчислюється за формулою

$$y' = f'_u \cdot u'_x,$$

де f'_u – похідна зовнішньої функції за проміжною змінною;

u'_x – похідна зовнішньої функції за основним аргументом.

Приклад 12.7 Обчислити похідну функції $y = \sin(2x - 1)$.

Внутрішньою функцією буде функція $u(x) = 2x - 1$, а зовнішньою $y = f(u) = \sin u$. Тому

$$y' = (\sin(2x - 1))' = \cos(2x - 1) \cdot (2x - 1)' = \cos(2x - 1) \cdot 2 = 2\cos(2x - 1).$$

Приклад 12.8 Обчислити похідну функції $y = (4x + 3)^5$.

$$y' = ((4x + 3)^5)' = 5 \cdot (4x + 3)^4 \cdot (4x + 3)' = 20(4x + 3)^4.$$

Приклад 12.9 Обчислити похідну функції $y = \operatorname{tg}^3 x$.

$$y' = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 12.10 Обчислити похідну функції $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

$$y' = (\sqrt{x^2 + 5})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} \cdot (x^2 + 5)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

Похідні вищих порядків.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на деякому інтервалі (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку* (*друга похідна*) цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Таким чином, друга похідна від заданої функції є похідна від її першої похідної.

Аналогічно *похідна третього порядку* (*третья похідна*) $y''' = (y'')'$ і т.д.

Приклад 12.11 Знайти похідну третього порядку функції $y = x^5 - 7x^3 + 2$.

Знайдемо першу похідну:

$$y' = 5x^4 - 21x^2,$$

$$y'' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x,$$

$$y''' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42.$$

Приклад 12.12 Знайти похідну п'ятого порядку функції $y = \sin^2 x$.

Знайдемо першу похідну:

$$y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, \quad y'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x,$$

$$y''' = (2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x, \quad y^{(4)} = (-4 \sin 2x)' = -8 \cos 2x,$$

$$y^{(5)} = (-8 \cos 2x)' = 16 \sin 2x.$$

Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, t – параметр,

$t \in T$. Її похідна знаходиться за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

де y'_x – похідна функції $y = f(x)$, y'_t – похідна функції y по змінній t , x'_t – похідна функції x по змінній t .

Приклад 12.13 Знайти похідну функції $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin t \end{cases}$.

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'_t = \cos t,$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \cos^3 t.$$

Приклад 12.14 Знайти похідну функції $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctgt \end{cases}$.

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

Диференціювання функцій, що задані неявно

Якщо кожному числу x з множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел (x, y) задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, функцію $y = f(x), x \in X$ задано неявно.

Незважаючи на те, що рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y , можна знайти похідну $y' = y'(x)$. Для цього потрібно:

- 1) обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x , вважаючи, що y є функцією від x ;
- 2) одержане рівняння розв'язати відносно y' .

Приклад 12.15 Знайти похідну функції, заданої неявно

$$5x + 3y - 7 = 0.$$

Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x :

$$5 + 3y' = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y' :

$$y' = -\frac{5}{3}.$$

Приклад 12.16 Знайти похідну функції, заданої неявно

$$x^3 + y^3 - 4xy = 0.$$

Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x :

$$3x^2 + 3y^2 y' - 4(1 \cdot y + xy') = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y' :

$$3x^2 + 3y^2 y' - 4y - 4xy' = 0, \quad 3y^2 y' - 4xy' = 4y - 3x^2,$$

$$y'(3y^2 - 4x) = 4y - 3x^2, \quad y' = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}.$$

Правило Лопіталя знаходження границь функцій

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційовних функцій, якщо маємо невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

або

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

Де a - число або $+\infty, -\infty$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Приклад 12.17 Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x}$, використовуючи правило Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)'}{(2 \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{2 \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$$

Приклад 12.16. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$, використовуючи правило Лопіталя

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \sin 3x)'}{(2x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{2} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x , то приріст функції $\Delta f(x)$ можна записати у вигляді

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x називають вираз $f'(x)\Delta x$ і позначають $df(x)$ або dy . Диференціалом незалежної змінної x вважають її приріст Δx і позначають dx . Отже, диференціал функції обчислюється за формулою

$$dy = f'(x)dx.$$

З останньої формули випливає, що позначення похідної $\frac{dy}{dx}$ можна розуміти як відношення двох диференціалів.

Приклад 12.17. Обчислити диференціал функції $y = 5^{2x}$.

$$dy = (5^{2x})' dx = 2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 dx$$