

Тема 13. Диференціювання функції багатьох змінних.

Визначення. Змінну величину називають *функцією двох змінних* x, y , якщо кожній парі їх значень (x, y) із даної області площини поставлено у відповідність єдине значення z . Позначення $z = f(x, y)$. Змінні x, y називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Аналогічно означаються функції трьох та більшого числа змінних.

Під областю визначення функції $z = f(x, y)$ розуміють сукупність точок (x, y) площини xOy , в яких задана функція визначена, тобто набуває певних дійсних значень.

Частинні похідні функції двох змінних.

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ по змінній x -

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ по змінній y -

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

За означенням частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означаються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшого числа змінних.

Приклад 13.1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x^2y + x^2 - y^2 + 5$.

Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = (3x^2y + x^2 - y^2 + 5)'_x = 3 \cdot 2 \cdot xy + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = (3x^2y + x^2 - y^2 + 5)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 = 3x^2 - 2y.$$

Приклад 13.2. Знайти частинні похідні функції $z = 5x \sin y - \cos x + 3$.

Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = (5x \sin y - \cos x + 3)'_x = 5 \cdot 1 \cdot \sin y - (-\sin x) + 0 = 5 \sin y + \sin x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = (5x \sin y - \cos x + 3)'_y = 5x \cos y - 0 + 0 = 5x \cos y.$$

Приклад 13.3. Знайти частинні похідні функції $z = \frac{y}{x}$.

Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = \left(\frac{y}{x} \right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x} \right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2}.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = \left(\frac{y}{x} \right)'_y = \frac{1}{x} \cdot (y)'_y = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Приклад 13.4. Знайти частинні похідні функції $z = (2x^4 + 5y^2)^3$.

Вважаючи y сталою, знаходимо частинну похідну складеної функції

$$z'_x = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (2x^4 + 5y^2)'_x = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot x^3 + 0) = 24x^3(2x^4 + 5y^2)^2$$

Вважаючи x сталою, знаходимо частинну похідну складеної функції

$$z'_y = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (2x^4 + 5y^2)'_y = 3 \cdot (2x^4 + 5y^2)^2 \cdot (0 + 5 \cdot 2 \cdot y) = 30y(2x^4 + 5y^2)^2.$$

Частинні похідні вищих порядків.

Частинними похідними другого порядку функції називають частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. Для частинних похідних другого порядку використовують позначення

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Якщо частинні похідні, що обчислюються, неперервні, то результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад 13.5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = (x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1)'_x = 3x^2 y^4 + 4x,$$

$$z'_y = (x^3 y^4 + 2x^2 - y^3 + 1)'_y = 4x^3 y^3 - 3y^2.$$

Знайдемо частинні похідні від похідних першого порядку

$$z''_{xx} = (3x^2 y^4 + 4x)'_x = 6xy^4 + 4,$$

$$z''_{xy} = (3x^2 y^4 + 4x)'_y = 3x^2 \cdot 4y^3 + 0 = 12x^2 y^3,$$

$$z''_{yx} = (4x^3 y^3 - 3y^2)'_x = 4 \cdot 3x^2 y^3 - 0 = 12x^2 y^3,$$

$$z''_{yy} = (4x^3 y^3 - 3y^2)'_y = 4x^3 \cdot 3y^2 - 3 \cdot 2y = 12x^3 y^2 - 6y.$$

Приклад 13.6. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = (3x + 7y)^5$

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = 5(3x + 7y)^4 \cdot (3x + 7y)'_x = 5(3x + 7y)^4 \cdot 3 = 15(3x + 7y)^4,$$

$$z'_y = 5(3x + 7y)^4 \cdot (3x + 7y)'_y = 5(3x + 7y)^4 \cdot 7 = 35(3x + 7y)^4.$$

Знайдемо другі частинні похідні

$$z''_{xx} = (15(3x + 7y)^4)'_x = 15 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 3 = 180(3x + 7y)^3,$$

$$z''_{xy} = (15(3x + 7y)^4)'_y = 15 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 7 = 480(3x + 7y)^3,$$

$$z''_{yy} = (35(3x + 7y)^4)'_y = 35 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 7 = 980(3x + 7y)^3.$$

Екстремум функції двох змінних

Функція $f(x, y)$ має локальний максимум (мінімум) $f(a, b)$ у точці $P(a, b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x, y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$).
Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційована функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки системи називають *стаціонарними точками*.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці екстремуму $P(a, b)$ знаходимо

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b), \quad \Delta = AC - B^2.$$

Якщо:

1) $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a, b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a, b)$ немає;

3) $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад 13.7. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Знайдемо частинні похідні і складемо систему

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad z'_y = 6xy - 12$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему $\begin{cases} \left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0, \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$ і знаходимо чотири стаціонарні точки

$M_1(1; 2), M_2(2; 1), M_3(-1; -2), M_4(-2; -1)$.

Знайдемо похідні другого порядку

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = 6x, \quad z''_{yy} = 6x.$$

Обчислимо $\Delta = AC - B^2 = 6x \cdot 6x - (6y)^2 = 36x^2 - 36y^2$ для кожної стаціонарної точки:

1) $\Delta(M_1) = 36 \cdot 1^2 - 36 \cdot 2^2 = 36 - 144 = -108$, оскільки $\Delta(M_1) < 0$, то у точці екстремуму M_1 немає;

2) $\Delta(M_2) = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1^2 = 144 - 36 = 108$, оскільки $\Delta(M_2) > 0$, $A(M_2) = 12 > 0$, то у точці M_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x = 2, y = 1$: $z_{\min} = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28$.

3) $\Delta(M_3) = 36 \cdot (-1)^2 - 36 \cdot (-2)^2 = 36 - 144 = -108$, оскільки $\Delta(M_3) < 0$, то у точці M_3 екстремуму немає;

4) $\Delta(M_4) = 36 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot (-1)^2 = 144 - 36 = 108$, оскільки $\Delta(M_4) > 0$, $A(M_2) = 12 > 0$, $A(M_2) = -12 < 0$, то у точці M_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\min} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28$.