

Приклади розв'язання задач до теми «Диференціювання функцій багатьох змінних»

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 6x^3 + 9y^2 - 7$

Розв'язання.

$$z'_x = (6x^3 + 9y^2 - 7)'_x = 6 \cdot 3 \cdot x^2 + 0 - 0 = 18x^2$$

$$z'_y = (6x^3 + 9y^2 - 7)'_y = 0 + 9 \cdot 2 \cdot y - 0 = 18y.$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції

$$z = x^3y^4 + 3xy^2 - 5\sin x + 4y - xy - 1$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^3y^4 + 3xy^2 - 5\sin x + 4y - xy - 1)'_x = 3x^2y^4 + 3y^2 - 5\cos x + 0 - y - 0 = \\ &= 3x^2y^4 + 3y^2 - 5\cos x - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= (x^3y^4 + 3xy^2 - 5\sin x + 4y - xy - 1)'_y = x^3 \cdot 4y^3 + 3x \cdot 2y - 0 + 4 - x - 0 = \\ &= 4x^3y^3 + 6xy + 4 - x \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $z = (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^3$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} z'_x &= ((7x^4 + 5xy^2 - 4y)^3)'_x = 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (7 \cdot 4 \cdot x^3 + 5 \cdot 1 \cdot y^2 - 0) = \\ &= 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (28x^3 + 5y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= ((7x^4 + 5xy^2 - 4y)^3)'_y = 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (0 + 5x \cdot 2y - 4 \cdot 1) = \\ &= 3 \cdot (7x^4 + 5xy^2 - 4y)^2 (10xy - 4) \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні функції $z = 5\cos(3x - 2y^4)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} z'_x &= (5\cos(3x - 2y^4))'_x = -5\sin(3x - 2y^4) \cdot (3 \cdot 1 - 0) = \\ &= -15\sin(3x - 2y^4). \end{aligned}$$

$$z'_y = (5\cos(3x - 2y^4))'_y = -5\sin(3x - 2y^4) \cdot (0 - 2 \cdot 4y^3) = \\ = 40y^3 \sin(3x - 2y^4).$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Розв'язання.

$$z_x = (\sqrt{x^2 - y^2})'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} (x^2 - y^2)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$z'_y = (\sqrt{x^2 - y^2})'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} (x^2 - y^2)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Приклад 6. Знайти всі другі частинні похідні функції

$$z = 2xy^2 - yx^2 - \cos x.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку перші частинні похідні

$$z'_x = (2xy^2 - yx^2 - \cos x)'_x = 2y^2 - 2yx + \sin x,$$

$$z'_y = (2xy^2 - yx^2 - \cos x)'_y = 4xy - x^2.$$

Далі знайдемо другі частинні похідні

$$z''_{xx} = (2y^2 - 2yx + \sin x)'_x = 0 - 2y + \cos x = -2y + \cos x,$$

$$z''_{xy} = (2y^2 - 2yx + \sin x)'_y = 4y - 2x + 0 = 4y - 2x,$$

$$z''_{yy} = (4xy - x^2)'_y = 4x - 0 = 4x,$$

Приклад 7. Знайти всі другі частинні похідні функції $z = \ln(3x + 4y)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку перші частинні похідні

$$z'_x = (\ln(3x + 4y))'_x = \frac{1}{3x + 4y} \cdot (3 + 0) = \frac{3}{3x + 4y}$$

$$z'_y = (\ln(3x + 4y))'_y = \frac{1}{3x + 4y} \cdot (0 + 4) = \frac{4}{3x + 4y}$$

Далі знайдемо другі частинні похідні

$$z''_{xx} = \left(\frac{3}{3x + 4y} \right)'_x = \frac{0 \cdot (3x + 4y) - 3 \cdot (3 \cdot 1 + 0)}{(3x + 4y)^2} = \frac{-9}{(3x + 4y)^2}$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{3}{3x+4y} \right)'_y = \frac{0 \cdot (3x+4y) - 3 \cdot (0+4 \cdot 1)}{(3x+4y)^2} = \frac{-12}{(3x+4y)^2}$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{4}{3x+4y} \right)'_y = \frac{0 \cdot (3x+4y) - 4 \cdot (0+4 \cdot 1)}{(3x+4y)^2} = \frac{-16}{(3x+4y)^2}.$$