

Розділ 5. Інтегральне числення.

Тема 14. Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних функцій $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ ($x \in X$), C – довільна стала.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$	8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	

Приклади. Обчислити невизначений інтеграл за допомогою таблиці інтегралів

$$14.1 \quad \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C \quad (\text{за формулою 2})$$

$$14.2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \text{ (за формулою 2)}$$

$$14.3 \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C \text{ (за формулою 3)}$$

$$14.4 \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \text{ (за формулою 10)}$$

$$14.5 \int \frac{dx}{x^2 - 5} = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C. \text{ (за формулою 11)}$$

$$14.6 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 7} \right| + C. \text{ (за формулою 13)}$$

Методи інтегрування

1. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла.

1. Сталій множник можна винести з-під знака інтеграла

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k = \text{const}, k \neq 0.$$

2. Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

3. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b ($k \neq 0$)

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

Приклади. Обчислити невизначений інтеграл

$$14.7 \int \frac{3}{\cos^2 x} dx = (\text{за правилом 1}) = 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 3 \operatorname{tg} x + C$$

$$14.8 \int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx = (\text{за правилами 1 і 2}) = 4 \int dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int e^x dx = \\ = 4x - 3 \ln|x| + \frac{1}{2} e^x + C.$$

$$14.9 \int \sin(4x + 3) dx = (\text{за правилом 3, } k=4, b=3) = -\frac{1}{4} \cos(4x + 3) + C.$$

$$14.10 \int \frac{dx}{9x^2 + 4} = \int \frac{dx}{(3x)^2 + 2^2} = (\text{за правилом 3 та формулою 10}) = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$$

2. Метод заміни змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C,$$

де $F(x)$ – первісна функція $f(x)$, $g'(x)$ – похідна функції $g(x)$.

При застосуванні цієї формули зручно до нової змінної t , поклавши $t = g(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної x , запишемо диференціал $dt = g'(x)dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t : $\int f(t)dt = F(t) + C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t = g(x)$, остаточно отримаємо $F(g(x)) + C$.

Обчислення інтеграла методом заміни змінної зручно оформляти наступним чином

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{array} \right| = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Приклади. Обчислити інтеграл

$$14.11 \int \sin^2 x \cos x dx$$

Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = (\text{за формулою 2 з таблиці інтегралів}) =$$

$$= \frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

$$14.12 \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = (\text{за прикладом 2}) = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

Метод інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами має вигляд

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Виділимо три класи підінтегральних функцій, для яких необхідно користуватися цією формулою.

1 клас: якщо підінтегральна функція

$$x^n \cdot \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ 1 \\ \frac{\sin^2 x}{1} \\ \frac{\cos^2 x}{1} \\ a^x \\ e^x \end{cases}, \text{ тоді приймаємо за } u = x^n, \quad dv = \begin{cases} \sin x dx \\ \cos x dx \\ dx \\ \frac{\sin^2 x}{dx} \\ \frac{\cos^2 x}{dx} \\ a^x dx \\ e^x dx \end{cases}$$

2 клас: якщо підінтегральна функція

$$x^n \cdot \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctg x \\ \text{arcctg} x \\ \ln x \end{cases}, \text{ тоді приймаємо за } u = \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctg x \\ \text{arcctg} x \\ \ln x \end{cases}, \quad dv = x^n$$

3 клас: якщо підінтегральна функція

$$\sin x \cdot e^x, \cos x \cdot e^x, \sin x \cdot e^x, \cos x \cdot e^x, \ln|\cos x|, \ln|\sin x|,$$

то треба інтегрувати два рази частинами, потім отримати вихідний інтеграл і розв'язати як рівняння.

Приклад 14.4 $\int (x+1) \cdot e^{2x} dx$

$$\begin{aligned} \int (x+1) \cdot e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x+1 \quad du = dx \\ dv = e^{2x} dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} (x+1) e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} (x+1) e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C. \end{aligned}$$