

Тема 15. Визначений інтеграл.

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ – це число, яке позначають $\int_a^b f(x)dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція, $[a, b]$ – відрізок інтегрування, a та b – нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Властивості визначеного інтеграла.

1. Сталій множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.
2. Визначений інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів кожної від цих функцій.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ця властивість поширюється на будь-яке скінченне число доданків)

3. Якщо в визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Якщо точка c ділить відрізок $[a, b]$ на частини $[a, c]$ та $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Приклад 15.1 Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/3} \cos x dx$.

$$\int_0^{\pi/3} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/3} = \sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Приклад 15.2 Обчислити інтеграл $\int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= \left(5e^x - 10 \cdot \frac{x^5}{5} + \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^1 = \\ &= (5e^1 - 2 \cdot 1^5 + \operatorname{arctg} 1) - (5e^0 - 2 \cdot 0^5 + \operatorname{arctg} 0) = 5e - 7 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо у визначеному інтегралі вводиться нова змінна $\begin{cases} t = t(x) \\ dt = t'(x)dx \end{cases}$, то слід

змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування t_1 визначається як значення введеної змінної в точці $x = a$, а верхня межа t_2 – в точці $x = b$, тобто

$$\begin{cases} t_1 = t(a) \\ t_2 = t(b) \end{cases}.$$

Приклад 15.3. Обчислити інтеграл $\int_0^2 \frac{2x dx}{x^2 + 1}$.

Введемо нову змінну $t = x^2 + 1$. Тоді $dt = (x^2 + 1)' dx = 2x dx$. Обчислимо

нові межі інтегрування $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 + 1 = 1 \\ t_2 = t(2) = 2^2 + 1 = 5 \end{cases}$. Маємо

$$\int_0^2 \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_1^5 = \ln |5| - \ln |1| = \ln 5.$$

Приклад 15.4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$.

Введемо нову змінну $t = \cos x$. Тоді $dt = -\sin x dx$. Обчислимо нові межі

інтегрування $\begin{cases} t_1 = t(0) = \cos 0 = 1 \\ t_2 = t(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$. Маємо

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx = -\int_1^0 t^2 dt = -\left. \frac{t^3}{3} \right|_1^0 = -\left(\frac{0^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі має вигляд

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад 15.5. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -1 \cdot e^{-1} + 0 \cdot e^0 - e^{-x} \Big|_0^1 = \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

Тема 16. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли I-го роду

Інтеграли з однією або двома нескінченними границями інтегрування прийнято трактувати як граничні значення деяких визначених інтегралів

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (16.1)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (16.2)$$

Якщо при цьому границя нескінченна або не існує, то кажуть, що невизначений інтеграл *розбігається*. Якщо ж границя є скінченим числом, то кажуть, що інтеграл *збігається*.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx, \quad (16.3)$$

де кожен з інтегралів у правій частині рівності (16.3) визначається так само, як у рівностях (16.1) і (16.2) відповідно. Причому, якщо хоча б одна з двох границь є

нескінченністю, то невластний інтеграл називається розбіжним. Якщо ж границі обох доданків існують і **скінченні**, то невластний інтеграл називається збіжним.

Приклад 16.1 Дослідити інтеграл $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^4} dx$ на збіжність.

Згідно з формулою (16.2) маємо

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^4} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 \frac{1}{x^4} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3 \cdot 1^3} + \frac{1}{3a^3} \right) = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

Оскільки границя **скінченна**, то інтеграл збіжний.

Приклад 16.2 Дослідити інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ на збіжність.

Згідно з формулою (16.1) маємо

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{1}) = \infty.$$

Оскільки границя не**скінченна**, то інтеграл розбіжний.

Приклад 16.3 Дослідити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ на збіжність.

Згідно з формулою (16.3) маємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) = \\ &= \left| \begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a &= -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right| = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

Невластні інтеграли II-го роду

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x = b$, а в інших точках проміжку інтегрування (a, b) неперервна, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (16.4)$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x = a$, а в інших точках проміжку інтегрування (a, b) неперервна, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (16.5)$$

Якщо точка розриву знаходиться у точці $x = c$, де $a < c < b$, то інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (16.6)$$

Якщо існують і скінченні границі інтегралів (16.4)-(16.6), то такі невласні інтеграли є збіжними.

Приклад 16. 4 Дослідити інтеграл $\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$ на збіжність.

Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ має в точці $x=3$ розрив. Тому за формулою (16.5)

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x-3} \Big|_{3+\varepsilon}^4 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{4-3} - 2\sqrt{3+\varepsilon-3}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

Приклад 16.5 Дослідити інтеграл $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx$ на збіжність.

Підінтегральна функція $\frac{1}{(x-2)^3}$ має в точці $x=2$ розрив. Тому за формулою (16.6)

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx &= \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^3} dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^3} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^3} dx = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(x-2)^2} \right) \Big|_1^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(x-2)^2} \right) \Big|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(2-\varepsilon-2)^2} + \frac{1}{2(1-2)^2} \right) + \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(3-2)^2} + \frac{1}{2(2+\varepsilon-2)^2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right).
\end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon^2} = \infty$, то інтеграл є розбіжним.