

Приклади розв'язання задач до теми 15.

Приклад 1. Знайти значення інтеграла $\int_{-1}^4 (4x^5 - 2x^3 - x + 5)dx$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 (4x^5 - 2x^3 - x + 5)dx &= 4 \cdot \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 5x \Big|_{-1}^4 = \frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 5x \Big|_{-1}^4 = \\&= \frac{2 \cdot 4^6}{3} - \frac{4^4}{2} - \frac{4^2}{2} + 5 \cdot 4 - \left(\frac{2 \cdot (-1)^6}{3} - \frac{(-1)^4}{2} - \frac{(-1)^2}{2} + 5 \cdot (-1) \right) = \\&= \frac{8192}{3} - \frac{256}{2} - \frac{16}{2} + 20 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 5 \right) = \frac{8192}{3} - 116 - \frac{2}{3} + 6 = 2620\end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти значення інтеграла $\int_1^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\int_1^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} &= \frac{2\sqrt{3x+4}}{3} \Big|_1^7 = \frac{2\sqrt{3 \cdot 7 + 4}}{3} - \frac{2\sqrt{3 \cdot 1 + 4}}{3} = \frac{2\sqrt{25}}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \\&= \frac{10}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{10 - 2\sqrt{7}}{3}\end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти значення інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

$$\text{Розв'язання. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = \left. \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ t_1 = \cos 0 = 1 \\ t_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_1^0 = -0 - \left(-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Приклад 4. Знайти значення інтеграла $\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}dx = \left. \begin{array}{l} t = x^2 + 9 \\ dt = 2x dx \\ t_1 = 0^2 + 9 = 9 \\ t_2 = 4^2 + 9 = 25 \end{array} \right| = \int_9^{25} \sqrt{t} dt = \int_9^{25} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25} = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \Big|_9^{25} = \frac{2}{3} (\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}) =$$

$$= \frac{2}{3} (125 - 27) = \frac{2}{3} \cdot 98 = \frac{196}{3}.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^2 x e^{x^2} dx$.

Розв'язання. Нехай $t = x^2$. Тоді $dt = 2x dx$, або $x dx = \frac{dt}{2}$. Обчислимо нові

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_0^2 e^{x^2} \cdot x dx = \int_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e^0) = \frac{1}{2} (e^4 - 1).$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

Розв'язання. Скористаємось методом інтегрування частинами

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} \cdot \ln e - \frac{1^3}{3} \cdot \ln 1 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} (e^3 - 1^3) = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Приклади розв'язання задач до теми 16.

Приклад 1. Знайти значення інтеграла $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ або дослідити його на

збіжність.

Розв'язання.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |b| - \ln |1| = \infty - 0 = \infty$$

Інтеграл розбіжний.

Приклад 2. Знайти значення інтеграла $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$ або дослідити його на

збіжність.

Розв'язання.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 3. Знайти значення інтеграла $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$ або дослідити його на

збіжність.

Розв'язання.

$$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{a} \right) = -1 - 0 = -1$$

Інтеграл збіжний.

Приклад 4. Знайти значення інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$ або дослідити його на

збіжність.

Розв'язання. Згідно з формулою (16.3) маємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx &= \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} e^x \Big|_0^b = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (e^b - e^0) = 1 - 0 + \infty - 1 = \infty. \end{aligned}$$

Інтеграл розбіжний.

Приклад 5. Знайти значення інтеграла $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$ або дослідити його на

збіжність.

Розв'язання. Згідно з формулою (16.1) маємо

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ t_1 = 0 \\ t_2 = b^2 \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \int_0^{b^2} e^{-t} dt \right) = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-t} \right) \Big|_0^{b^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-b^2} + e^0 \right) = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^{b^2}} + 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

Інтеграл збіжний.

Приклад 6. Дослідити інтеграл $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ на збіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{(x-2)^2}$ має в точці $x=2$ розрив.

Тому за формулою (16.5)

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x-2)^{-1}}{-1} \Big|_{2+\varepsilon}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x-2} \right) \Big|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3-2} + \frac{1}{2+\varepsilon-2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = -1 + \infty = \infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

Приклад 7. Дослідити інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ на збіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ має в точці $x=1$ розрив.

Тому за формулою (16.4)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збіжний.