

Приклади розв'язання задач до теми 14.

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int 12 \cos x \, dx$

Розв'язання. $\int 12 \cos x \, dx = 12 \cdot \sin x + C = 12 \sin x + C$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int (4x^5 - 2x^3 - x + 5) dx$

Розв'язання.

$$\int (4x^5 - 2x^3 - x + 5) dx = 4 \cdot \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 5x + C = \frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 5x + C$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int \left(15x^4 - \frac{13}{x} \right) dx$

Розв'язання. $\int \left(15x^4 - \frac{13}{x} \right) dx = 15 \cdot \frac{x^5}{5} - 13 \ln |x| + C = 3x^5 - 13 \ln |x| + C$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int (7x + 6)^5 dx$

Розв'язання.

$$\int (7x + 6)^4 dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x + 6)^5}{5} + C = \frac{(7x + 6)^5}{35} + C$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int 14^{9x-1} dx$

Розв'язання. Скористаємося формулою (4) з таблиці інтегралів і

отримаємо $\int 14^{9x-1} dx = \frac{14^{9x-1}}{9 \ln 14} + C$

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2\sqrt{3x+4}}{3} + C$$

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + 9}| + C$$

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 25} = \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C$$

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(8x+5)^2 + 4}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (11) з таблиці інтегралів. В нашому випадку $u = 8x + 5$, $a = 2$, отже

$$\int \frac{dx}{(8x+5)^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \arctg \frac{8x+5}{2} + C = \frac{1}{16} \arctg \frac{8x+5}{2} + C$$

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{36 - (2 - 5x)^2}}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (9) з таблиці інтегралів. В нашому випадку $u = 2 - 5x$, $a = 6$, отже

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36 - (2 - 5x)^2}} = \frac{1}{-5} \arcsin \frac{2 - 5x}{6} + C$$

Приклад 11. Знайти невизначений інтеграл $\int \arctg x dx$.

Розв'язання. Скористаємось методом інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \cdot \arctg x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C. \end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти невизначений інтеграл. $\int e^x \cos(e^x) dx$.

Розв'язання. Скористаємось методом заміни змінної

Оскільки $(e^x)' = e^x$, то

$$\int e^x \cos(e^x) dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(e^x) + C$$