

Розділ 6. Диференціальні рівняння

Тема 17. Диференціальні рівняння

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння яке містить незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y' :

$$F(x, y, y') = 0. \quad (17.1)$$

Якщо рівняння (17.1) можна розв'язати відносно y' , то приходимо до рівняння

$$y' = f(x, y). \quad (17.2)$$

Розв'язком рівняння (17.1) на інтервалі (a, b) називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу (a, b) .

Загальним розв'язком рівняння (17.1) називають функцію $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову. Розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ називають *частинним* або *розв'язком задачі Коші*.

Співвідношення $G(x, y, C) = 0$, яким загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ рівняння (17.1) задається неявно, називають *загальним інтегралом* рівняння (17.1). при конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення $G(x, y, C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом*.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x) \quad (17.3)$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то маємо

$\frac{dy}{dx} = f(x)$, або $dy = f(x)dx$. Інтегруємо останню рівність

$$\int dy = \int f(x)dx + C$$

і отримаємо

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Приклад 17.1 Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = x^2 + 4x - 7.$$

Розв'яжемо рівняння за наведеною вище схемою

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 7,$$

$$dy = (x^2 + 4x - 7)dx,$$

$$\int dy = \int (x^2 + 4x - 7)dx,$$

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C \text{ - загальний розв'язок заданого рівняння.}$$

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{17.4}$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

В правій частині маємо добуток двох функцій, одна із яких залежить тільки від x , а друга – тільки від y . Покажемо як розв'язуються такі рівняння.

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ або $dy = f(x) \cdot g(y)dx$. Помножимо

обидві частини останньої рівності на $\frac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y) \neq 0$).

Отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dx}{g(y)} = f(x)dx. \tag{17.5}$$

Інтегруючи рівняння (17.5)

$$\int \frac{dx}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{17.6}$$

отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (17.4).

Розглянемо рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0. \quad (17.7)$$

Його також можна звести до рівняння (17.4). Поділимо ліву і праву частини рівняння (17.7) на добуток $f_1(x)g_2(y) \neq 0$ і перенесемо другий доданок вправо

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx.$$

Інтегруючи ліву частину за змінною y , а праву – за змінною x , отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння (17.7)

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx + C.$$

Приклад 17.2 Розв'язати диференціальні рівняння $y' = \frac{y}{x}$.

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = \frac{1}{x} \cdot y$$

Запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot y$$

або

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо дане рівняння

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C,$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|,$$

тоді загальний розв'язок заданого рівняння $y = Cx$.

Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f(tx, ty) = f(x, y). \quad (17.8)$$

Покладемо $t = \frac{1}{x}$, тоді $f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Отримали рівняння

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (17.9)$$

Введемо допоміжну функцію $u = u(x)$. Покладемо $\frac{y}{x} = u$ або $y = u \cdot x$.

Знайдемо $y' = u' \cdot x + u$. Тепер рівняння (17.9) запишеться у вигляді

$$u' \cdot x + u = g(u), \text{ або } \frac{du}{dx} \cdot x = g(u) - u.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Отже,

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, одержимо

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + C. \quad (17.10)$$

Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$,

отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 17.3 Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

Функція $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{(t)^2(x^2 + y^2)}{2t^2(x)^2} = \frac{(x^2 + y^2)}{2x^2} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u' \cdot x + u$

$$u' \cdot x + u = \frac{x^2 + x^2 u^2}{2x^2}, \quad u' \cdot x + u = \frac{x^2(1 + u^2)}{2x^2}, \quad u' \cdot x + u = \frac{1 + u^2}{2}$$

$$u' \cdot x = \frac{1+u^2}{2} - u = \frac{1+u^2-2u}{2} = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Розв'яжемо його

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{-2}{\frac{y}{x}-1} = \ln C|x|, \quad \frac{-2x}{y-x} = \ln C|x|.$$

Тоді загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}.$$