

Тема 18. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \text{ або } y' = -P(x)y + Q(x), \quad (18.1)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - неперервні функції на деякому інтервалі (a,b) , називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*. У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння (18.1) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Розглянемо один з методів розв'язання рівняння (18.1) – метод Бернуллі. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u(x) \cdot v(x). \quad (18.2)$$

Знаходимо похідну функції y :

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи y та y' в рівняння (18.1), отримаємо

$$\begin{aligned} u'v + uv' + P(x)uv &= Q(x), \\ u'v + u(v' + P(x)v) &= Q(x). \end{aligned} \quad (18.3)$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0. \quad (18.4)$$

Знаходимо v з рівняння (18.4), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

$$\ln |v| = -\int P(x)dx,$$

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функцій $P(x)$.

Знаючи v , знаходимо з рівняння $u'v = Q(x)$, яке випливає з (18.3) і (18.4)

$$v \frac{du}{dx} = Q(x), \quad \frac{du}{dx} = Q(x) e^{\int P(x) dx},$$

$$du = Q(x) e^{\int P(x) dx} dx, \quad u = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (18.2) і отримаємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

Приклад 18.1 Розв'язати диференціальне рівняння $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок будемо шукати у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' в задане рівняння

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3,$$

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x}v) = 2x^3.$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2}{x}v = 0.$$

Знаходимо v :

$$v' = \frac{2}{x}v, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |v| = \ln |x^2|, \text{ звідки } v = x^2.$$

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків, то після інтегрування диференціального рівняння відносно v , обираємо константу $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v , отримуємо рівняння для знаходження u

$$u' \cdot x^2 = 2x^3 \text{ або } u' = 2x,$$

$$du = 2x dx,$$

$$u = x^2 + C.$$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння $y = uv = (x^2 + C)x^2$.

Рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \text{ або } y' = -P(x)y + Q(x)y^\alpha, \quad (18.5)$$

де функції $P(x), Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b) , $\alpha \in \mathbb{R}$, причому $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*. При $\alpha = 0$ рівняння (18.5) перетворюється в лінійне диференціальне рівняння, а при $\alpha = 1$ - в рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язок рівняння Бернуллі будемо шукати у вигляді $y = u \cdot v$.

Приклад 18.2 Розв'язати диференціальне рівняння $x^2 y^2 y' + xy^3 = 5$.

Розділимо праву і ліву частини рівняння на $x^2 y^2$, отримаємо $y' + \frac{y}{x} = \frac{5}{x^2 y^2}$.

Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = u \cdot v$. Тоді

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{5}{x^2 u^2 v^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{5}{x^2 u^2 v^2}.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln |v| = -\ln |x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в рівняння, отримаємо рівняння для знаходження u :

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2 \cdot u^2 \cdot \frac{1}{x^2}}, \quad \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{u^2},$$

$$u^2 du = 5x dx, \quad \frac{u^3}{3} = \frac{5x^2}{2} + C,$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{15x^2}{2} + C}.$$

Загальний розв'язок рівняння запишеться у вигляді

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{15x^2}{2} + C}.$$