

Приклади розв'язання задач до теми 17.

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \cos x, \text{ якщо } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad dy = \cos x dx$$

$$\int dy = \int \cos x dx,$$

$$y = \sin x + C - \text{загальний розв'язок.}$$

Далі знайдемо частинний розв'язок з умови $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Підставимо в

$$\text{загальний розв'язок } y = 3 \text{ та } x = \frac{\pi}{2}$$

$$3 = \sin \frac{\pi}{2} + C,$$

$$C = 3 - \sin \frac{\pi}{2} = 3 - 1 = 2.$$

Отже, частинний розв'язок $y = \sin x + 2$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' = 3\sqrt{\frac{x}{y}}$, якщо $y(1) = 9$.

Розв'язання. Запишемо рівняння $y' = 3\sqrt{\frac{x}{y}}$ у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Отже, маємо рівняння з відокремленими змінними. Помноживши рівняння на $\sqrt{y}dx$, отримаємо $\sqrt{y}dy = 3\sqrt{x}dx$. Проінтегруємо це рівняння

$$\int \sqrt{y} dy = 3 \int \sqrt{x} dx,$$

$$\int y^{\frac{1}{2}} dy = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

Загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді

$$y^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Знайдемо частинний розв'язок. Підставимо в загальний розв'язок $x = 1$ і $y = 9$ і отримаємо

$$\begin{aligned} 9^{\frac{3}{2}} &= 3 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C, \\ 27 &= 3 + C, \\ C &= 24. \end{aligned}$$

Остаточно, $y^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot x^{\frac{3}{2}} + 24$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(x + y)dx - xdy = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$xdy = (x + y)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}, \quad y' = \frac{x + y}{x}$$

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x + y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{tx} = \frac{t(x + y)}{tx} = \frac{x + y}{x} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{x + ux}{x}, \quad u'x + u = \frac{x(1 + u)}{x}, \quad u'x + u = 1 + u, \quad u'x = 1, \quad u' = \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad \int du = \int \frac{dx}{x}, \quad u = \ln|x| + \ln C, \quad u = \ln C|x|$$

$$\frac{y}{x} = \ln C|x|,$$

звідки маємо загальний розв'язок $y = x \ln C|x|$.