

Приклади розв'язання задач до теми 18

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Його розв'язок будемо шукати у вигляді $y = u \cdot v$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Рівняння набуває вигляду

$$u'v + uv' + uvtgx = \cos^2 x,$$

$$u'v + u(v' + vtgx) = \cos^2 x.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + vtgx = 0$. Тоді

$$\frac{dv}{dx} = -vtgx, \quad \frac{dv}{v} = -tgx dx,$$

$$\ln |v| = \ln |\cos x|, \quad v = \cos x.$$

Знайдемо u :

$$u' \cos x = \cos^2 x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad u = \sin x + C.$$

Отже, $y = uv = (\sin x + C) \cos x$.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = u \cdot v$:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Тоді

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln |v| = -\ln |x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Тепер рівняння для знаходження u має вигляд

$$u' \cdot \frac{1}{x} + = \frac{\sin 2x}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{x \sin 2x}{x},$$

$$du = \sin 2x dx, \quad u = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд $y = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + C\right) \cdot \frac{1}{x}$.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = 3xy^3$.

Розв'язання. Маємо рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = u \cdot v$, тоді

$$u'v + uv' + xuv = 3x(uv)^3,$$

$$u'v + u(v' + xv) = 3x(uv)^3.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + vx = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{dx} = -vx, \quad \frac{dv}{v} = -x dx, \quad \ln |v| = -\frac{x^2}{2}, \quad v = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Тоді

$$u' e^{-\frac{x^2}{2}} = 3x \left(u e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^3, \quad \frac{du}{u^3} = 3x e^{-x^2} dx,$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{3}{2} e^{-x^2} + C,$$

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{3e^{-x^2} + C}},$$

$$y = uv = \pm \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3e^{-x^2} + C}}.$$