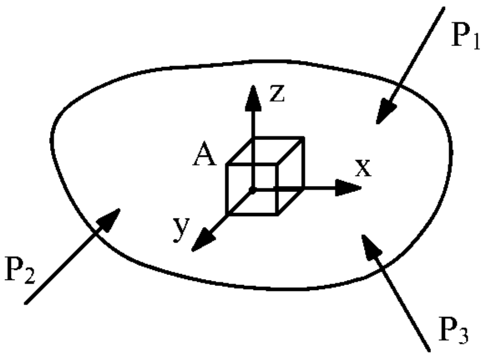
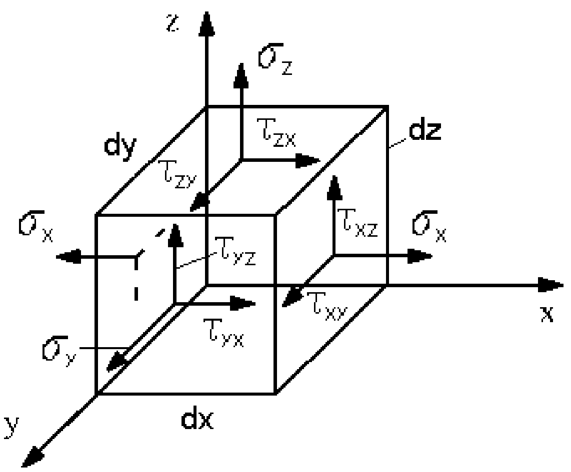
Тема 2. Основи теорії напруженого-деформованого стану

2.1. Напружений стан в точці тіла



Під дією зовнішніх сил в кожній точці тіла виникають напруження. В різних площинах, проведених через дану точку, напруження різні. Для того щоб охарактеризувати напружений стан в точці А, виділимо навколо неї елементарний паралелепіпед з ребрами dx, dy, dz, паралельними відповідним координатним осям. На його гранях діють повні напруження, які можна розкласти на нормальні σ та дотичні τ. Кожне дотичне напруження можна розкласти на дві складові, паралельні відповідним координатним осям .

В позначенні нормальних напружень індекс вказує на напрямок нормалі до площини, в якій вони діють. В позначенні дотичних напружень перший індекс вказує на напрямок нормалі до площини, другий – на напрямок самого напруження.



Сукупність напружень, що діють на всіх гранях паралелепіпеда, визначає напружений стан в точці. Таким чином, напружений стан у довільній точці характеризується дев'ятьма напруженнями. Їх записують у таблицю (матрицю), на головній діагоналі якої розташовані нормальні напруження,

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Ця матриця називається тензором напружень.

2.2. Закон парності дотичних напружень

Запишемо рівняння рівноваги виділеного паралелепіпеда: суми моментів сил відносно осей координат дорівнюють нулю.

$\sum M(X) = \tau_{zy} dy \cdot dx \cdot dz - \tau_{yz} dx \cdot dz \cdot dy = 0$.

Моменти від нормальних сил взаємно компенсуються. З рівняння випливає $\boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz}}$.

Визначивши суму моментів відносно осей X та Z, одержимо:

$\sum M(У) = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$

$\sum M(Z) = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$

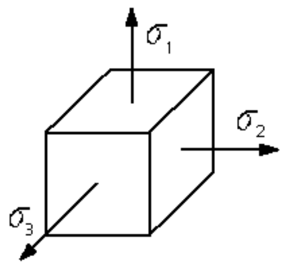
З одержаних результатів випливає ***закон парності дотичних напружень***:
на двох довільних взаємно перпендикулярних площадках , дотичні напруження, перпендикулярні до лінії перетину площадок, рівні за величиною і протилежні за знаком .

2.3. Головні площадки, головні напруження.

Види напруженого стану

При зміні напрямку координатних осей напруження на гранях паралелепіпеда змінюються. Теоретично доведено, що можна завжди знайти таке положення паралелепіпеда, коли на його гранях $\tau = 0$.

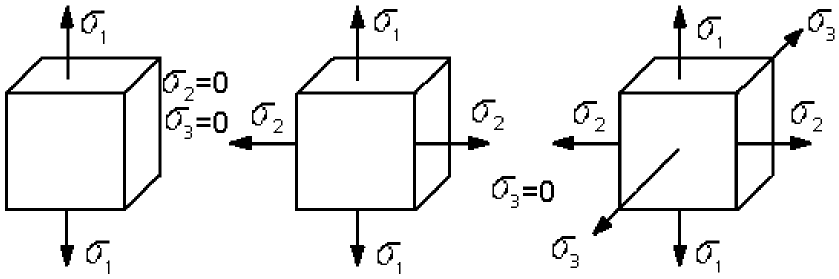
Площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю, називаються ***головними****. Нормальні напруження , що діють на головних площадках, називаються* ***головними напруженнями****.*



Головні напруження позначаються:

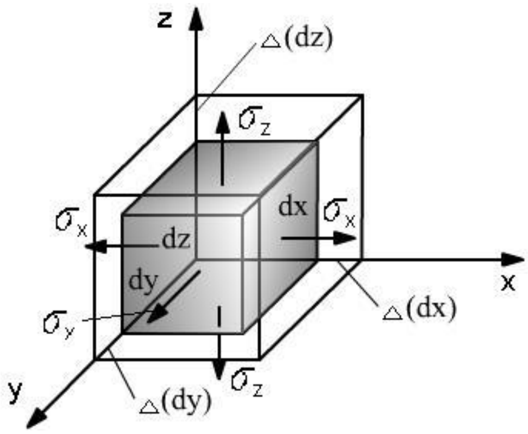
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; при цьому $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Деякі з головних напружень можуть дорівнювати нулю. В залежності від кількості діючих головних напружень розрізняють наступні види напруженого стану :



Лінійний (одновісний) ***Плоский*** (двовісний) ***Об'ємний*** (тривісний)

2.4. Деформований стан в точці



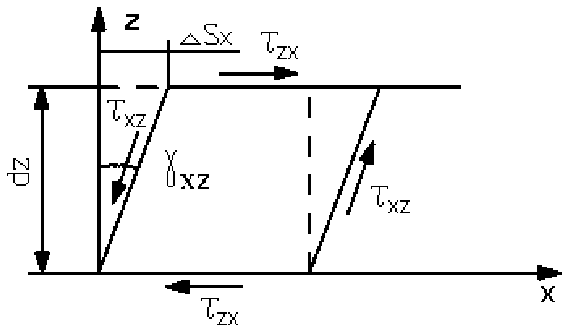
Від дії нормальних напружень паралелепіпед змінює лінійні розміри.

$\Delta(dx), \Delta(dy), \Delta(dz)$ – ***абсолютні лінійні деформації.***

$\varepsilon_x = \dfrac{\Delta(dx)}{dx}$; $\varepsilon_y = \dfrac{\Delta(dy)}{dy}$; $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta(dz)}{dz}$ – ***відносні лінійні деформації.***

Від дії дотичних напружень змінюються кути між гранями паралелепіпеда.

$\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ – абсолютні зсуви.



$\gamma_{zx}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ – ***кутові деформації*** (кути зсуву) в трьох взаємно перпендикулярних площадках.

Як видно з рис., між абсолютним зсувом і кутовою деформацією існує зв'язок $tg\gamma_{xz} = \dfrac{\Delta S_x}{dz}$. Оскільки для малих кутів $tg\gamma \approx \gamma$, то $\gamma_{xz} \approx \dfrac{\Delta S_x}{dz}$; $\gamma_{yx} \approx \dfrac{\Delta S_y}{dx}$; $\gamma_{zx} \approx \dfrac{\Delta S_z}{dy}$

Коли площадки паралелепіпеда є головними, тобто на них діють головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, тоді зсуви відсутні, а відносні лінійні деформації називаються ***головними***: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

2.5. Плоский напружений стан. Напруження на нахилених площадках

Правило знаків:

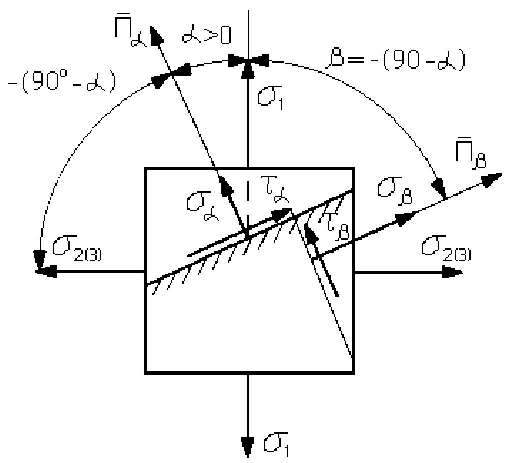
$\sigma > 0$, якщо спричиняють розтяг;

$\sigma < 0$, якщо спричиняють стиск;

$\tau > 0$, якщо повертають елемент відносно довільної точки, взятої всередині елемента, за годинниковою стрілкою;

$\alpha > 0$, якщо поворот від вектора головного напруження до нормалі $\overline{n_\alpha}$ нахиленої площадки відбувається проти годинникової стрілки.

2.5.1.Пряма задача.



Дано: головні напруження $\sigma_1 > \sigma_2$; кут $\angle\alpha$ між σ_1 і нормаллю $\overline{n_\alpha}$ до нахиленої площадки.

Визначити напруження на нахиленій площадці $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$

Використаємо принцип суперпозиції: напруження на пл. α будемо розглядати як суму напружень від дії напружень σ_1 і σ_2 окремо (складання дії двох лінійних напружених станів).

Від дії $\sigma_1 \Rightarrow \sigma'_\alpha, \tau'_\alpha$. Від дії $\sigma_2 \Rightarrow \sigma''_\alpha, \tau''_\alpha$. При одночасній дії σ_1 і σ_2

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha \\ \tau_\alpha &= \tau'_\alpha + \tau''_\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Використовуючи формули для лінійного напруженого стану (див. § 2.4), запишемо:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha \\ \tau'_\alpha &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma''_\alpha &= \sigma_2 \cos^2[-(90-\alpha)] = \sigma_2 \cos^2(90-\alpha) = \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau''_\alpha &= \frac{\sigma_2}{2} \sin 2[-(90-\alpha)] = -\frac{\sigma_2}{2} \sin(180-2\alpha) = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Підставляючи (3.2) і (3.3) в (3.1), одержимо:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}} \qquad (3.4)$$

Найдемо напруження на пл. β, перпендикулярній до пл. α. Використаємо формули (3.4).

Нормаль до пл. β $\bar{n}_\beta$ створює з σ_1 кут $\beta = -(90-\alpha)$.

Підставляючи в (3.4) замість α кут $\beta = -(90-\alpha)$, знайдемо:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha \\ \tau_\beta &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha\end{aligned}} \qquad (3.5)$$

Складаючи перші рівняння (3.4) і (3.5), одержимо

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 .$$

Сума нормальних напружень на взаємно перпендикулярних площадках не залежить від нахилу цих площадок і дорівнює сумі головних напружень.

З других рівнянь (3.4) і (3.5):

$\tau_\beta = -\tau_\alpha$ – *закон парності дотичних напружень.*

$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ при $\alpha = 45°$.

Виясним о, де діють максимальні нормальні напруження.

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha = 0 .$$

$\sigma_1 - \sigma_2 = 0$; $\sigma_1 = \sigma_2 \rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_1 = \sigma_2$ $\tau_\alpha = \tau_\beta = 0$.

$\sin 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0°; \alpha = 90°$

Екстремальними для нормальних напружень будуть головні напруження (одне - найбільше, друге - найменше)

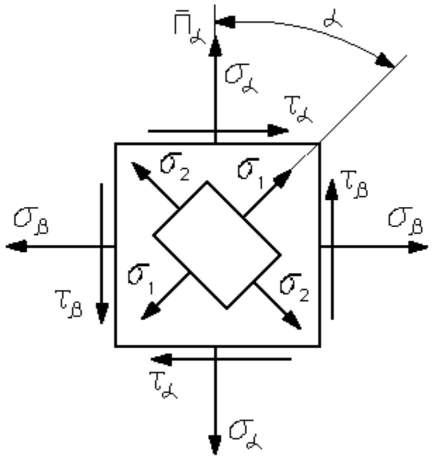
Причому

$\sigma_{\alpha\max} = \sigma_1$, оскільки $\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} < 0$ при $\alpha = 0$;

$\sigma_{\alpha\min} = \sigma_2$, оскільки $\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} > 0$ при $\alpha = 90°$.

$\sigma_2 < \sigma_\alpha < \sigma_1$.

2.5.2. Обернена задача



Дано: напруження на неголовних площадках $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha, \tau_\beta$; $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$; $\tau_\alpha > 0$.

Визначити: головні напруження σ_1, σ_2 і кут α, який визначає їх напрям.

Розв’язок прямої задачі

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha ; \qquad (1)$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha ; \qquad (2)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha . \qquad (3)$$

Розв’яжемо систему рівнянь (1),(2),(3) відносно нових невідомих: σ_1, σ_2 і α

(1)+(2) $\quad \sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$; $\quad$ (4)

(1)-(2)	$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha$;	(5)
$(3)^2$	$4\tau_\alpha^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \sin^2 2\alpha$;	(6)
$(3)^2 + (5)^2$	$4\tau_\alpha^2 + (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2$;	(7)
$\sqrt{(7)}$	$\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} = \sigma_1 - \sigma_2$;	(8)

$(4) \pm (8)$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right]; \tag{3.6}$$

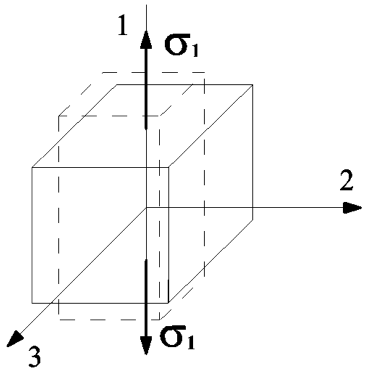
(3) : (5)

$$tg\, 2\alpha = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}\ . \tag{3.7}$$

В формули напруження підставляти зі своїм знаком.

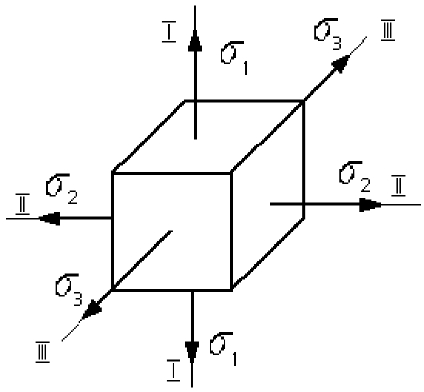
2.6. Узагальнений закон Гука

При одновісному розтягу $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.
Деформований стан – об’ємний.
$\varepsilon_1 > 0; \varepsilon_2 < 0; \varepsilon_3 < 0$
Згідно з законом Гука для лінійного напруженого стану стану



$$(1)\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E}; \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1; \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\dfrac{\sigma_1}{E}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Розглянемо об’ємний напружений стан. Використовуючи принцип суперпозиції, об’ємний напружений стан представимо як сукупність трьох лінійних.
Тоді деформація в напрямку 1 буде $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1'''$, де $\varepsilon_1^{/}$ від дії тільки σ_1, $\varepsilon_2^{//}$ від дії тільки σ_2, $\varepsilon_3^{///}$ від дії тільки σ_3. Враховуючи формули (1) для лінійного напруженого стану, знаходимо:



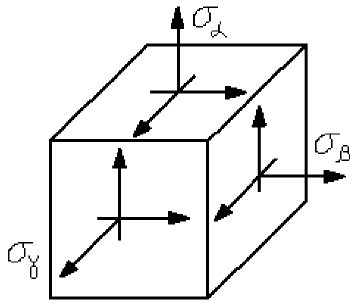
$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E}; \varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E};$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Аналогічно знайдемо деформації $\varepsilon_2, \varepsilon_3$
В результаті будемо мати узагальнений закон Гука:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \end{aligned}} \tag{3.9}$$

При малих деформаціях впливом дотичних напружень на лінійну деформацію можна знехтувати. Тоді:



$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}\left[\sigma_\alpha - \mu\left(\sigma_\beta + \sigma_\gamma\right)\right]$$
$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\beta - \mu\left(\sigma_\alpha + \sigma_\gamma\right)\right]$$
$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{E}\left[\sigma_\gamma - \mu\left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta\right)\right]$$

2.7. Об'ємна деформація

Об'єм елемента із сторонами *a, b, c* до деформації $V_0 = abc$

Після деформації $V = (a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c) = abc\left(1+\frac{\Delta a}{a}\right)\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right) =$

$$= V_0(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = V_0\left(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}_{нехтуємо}\right) \approx$$

$\approx V_0(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$.

Відносна об'ємна деформація

$$\varepsilon_V = \frac{V-V_0}{V_0} = \frac{V_0(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-V_0}{V_0} = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 .$$

$$\boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} . \qquad (3.10)$$

Підставляючи значення $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ згідно з узагальненим законом Гука (3.9), одержимо

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)} \qquad (3.11)$$

Позначимо середнє напруження

$$\sigma_c = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3};$$
$$\varepsilon_V = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_c; K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

К – об'ємний модуль пружності. В результаті $\varepsilon_V = \frac{\sigma_c}{K}$.

$$\boxed{\sigma_c = K\varepsilon_V} \text{ -- об'ємний закон Гука} \qquad (3.12)$$

При $\mu = 0{,}5$, $K = \infty$ відносна об'ємна деформація $\varepsilon_V = 0$.

2.8. Потенціальна енергія деформації

Потенціальна енергія деформації – енергія, яка накопичується в тілі при його пружному деформуванні – U.

Потенціальна енергія деформації, що приходиться на одиницю об'єму, називається питомою потенціальною енергією деформації – u.

Для лінійного напруженого стану $u = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$.

При об'ємному напруженому стані

$$u = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2}. \qquad (3.13)$$

Додавання робіт головних напружень можливе, тому що σ_1 виконує роботу тільки на ε_1, σ_2 - на ε_2, σ_3 - на ε_3.

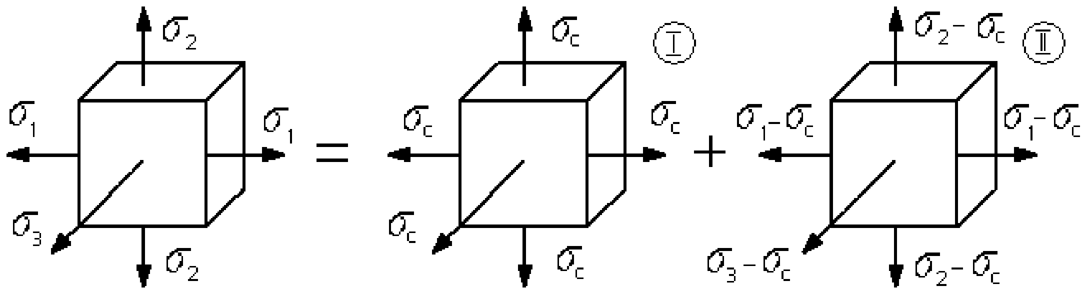
Підставляючи в (5) значення $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ згідно з узагальненим законом Гука (3.9), одержимо

$$\boxed{u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]} \qquad (3.14)$$

3.9. Питома потенціальна енергія зміни об'єму і зміни форми

Представимо питому потенціальну енергію деформації у вигляді суми $u = u_V + u_\Phi$, де
u_V –питома потенціальна енергія зміни об'єму;
u_Φ – питома потенціальна енергія зміни форми.

Для визначення складових енергії розглянемо напружений стан як суму двох напружених станів, представлених на рисунку.



$$\sigma c = \frac{1}{3}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]; \qquad \left.\begin{array}{l}\varepsilon_V' \neq 0 \\ \varepsilon_\Phi' = 0\end{array}\right\} \Rightarrow u_V \neq 0; u_\Phi = 0; \qquad \left.\begin{array}{l}\varepsilon_V'' = 0 \\ \varepsilon_\Phi'' \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow u_V = 0; u_\Phi \neq 0;$$

Для напруженого стану II

$$\varepsilon_V'' = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 - \sigma_c + \sigma_2 - \sigma_c + \sigma_3 - \sigma_c) = 0;$$

$u_V = 0$.

I напружений стан – тільки зміна об'єму $u_V = u^I$;

II напружений стан – тільки зміна форми $u_\Phi = u^{II}$.

Підставляючи в (3.14) замість $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ напруження I напруженого стану $\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, одержимо

$$\boxed{u_V = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \quad \text{або} \quad \left(u_V = \frac{\sigma_c\varepsilon_V}{2}\right) \qquad (3.15)$$

Підставляючи в (3.14) замість $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ напруження II напруженого стану $\sigma_1 - \sigma_c$, $\sigma_2 - \sigma_c$, $\sigma_3 - \sigma_c$, одержимо

$$\boxed{\begin{array}{l} u_\Phi = \dfrac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right] \\ u_\Phi = \dfrac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \end{array}} \qquad (3.16)$$