Одержання рівняння руху пластинки з вирізами, виходячи з енергетичних передумов.

Розглянемо процес руху на відрізку часу між моментами t_0 й t_1. Порівняємо для цього відрізка часу різні траєкторії руху точок системи між початковим і кінцевим положеннями.

Виведення ґрунтується на відомому принципі Гамільтона-Остроградського, що визначає рух довільної механічної системи. Останнє відбувається так, що означений інтеграл I здобуває стаціонарне значення стосовно будь-яких можливих варіацій положення системи, якщо початкове й кінцеве положення залишаються фіксованими:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \ddot{I} \right) dt ,$$

де K – кінетична енергія системи, $\ddot{I}$ – потенційна енергія. Дане інтегральне співвідношення отримується із умови, що характеризує істинні траєкторії руху, якщо всі сили, що діють на систему, мають потенціал

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta K - \delta \ddot{I} - \delta' W \right) dt = 0 .$$

Тут під $\delta' W$ розуміється сума елементарних робіт зовнішніх сил.

Кінетична енергія пластинки визначається за наступною формулою:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma h}{g} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dxdy .$$

Потенційна енергія являє собою суму енергій, що відповідають деформації пластинки в її серединній поверхні $\ddot{I}_{\tilde{n}}$. (Для пластинки ця величина дорівнює нулю, тому що дорівнюють нулю нормальні й дотичні зусилля), і деформації вигину $\ddot{I}_{\grave{e}}$.

Будемо припускати, що в пластинці є лише один замкнутий виріз. Запишемо вираз для енергії вигину оболонки з вирізом:

$$\ddot{I}_{\grave{e}} = -\frac{1}{2} \cdot \iint_S D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dxdy +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \iint_{S_1} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dxdy .$$

Кінетична енергія визначається за формулою

$$K = \frac{1}{2} \cdot \iint_S \frac{\gamma h}{g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dxdy - \frac{1}{2} \cdot \iint_{S_1} \frac{\gamma h}{g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dxdy .$$

Область інтегрування: S – площа бічної поверхні пластинки без вирізів, S_1 – площа вирізів.

Елементарна робота зовнішніх сил, що діють по поверхні пластинки, визначається за залежністю:

$$\delta' W = \iint_S q \delta w dxdy .$$

Розглянемо ділянку пластинки, обмежену координатними лініями $x = a_1$; $x = a_2$; $y = b_1$; $y = b_2$. Вважаємо, що ця ділянка охоплює виріз, визначений наступними координатними лініями: $x = x_1$; $x = x_2$; $y = y_1$; $y = y_2$.

Перш ніж перейти до знаходження варіації всіх компонент повної енергії деформівної системи, зробимо ряд спрощуючих перетворень.

Розглянемо вираз для $\text{Ï}_{\text{è}}$. Він являє собою різницю двох подвійних інтегралів по областях S і S_1 з яких область S_1 лежить усередині області S. Припустимо, що ці області прямокутні.

Скористаємося одиничною функцією Хевісайда від двох змінних $\Gamma_0(x - x_1; y - y_1)$:

$$\Gamma_0(x - x_1; y - y_1) = \Gamma_0(x - x_1)\Gamma_0(y - y_1),$$
$$\Gamma_0(x - x_1) = (0 \ \text{ïðè} \quad x < x_1;\ 1 \ \text{ïðè} \quad x > x_1).$$

Фільтруюча властивість одиничної функції визначається за наступною формулою:

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\Gamma_0(x - x_1; y - y_1)dxdy = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)dxdy,$$
$$a_1 < x_1 < a_2;\ b_1 < y_1 < b_2.$$

Відзначена особливість одиничної функції дозволяє, якщо її ввести у вираз $\text{Ï}_{\text{è}}$, замість двох подвійних інтегралів одержати один. Розглянемо цей процес послідовно. Формула

$$\text{Ï}'_{\text{è}} = \iint_S f(x, y)dxdy = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)dxdy$$

являє собою інтеграл по площі S. Далі відшукуємо

$$\text{Ï}'_{\text{è}} = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} [1 - \Gamma_0(x - x_1; y - y_1)] f(x, y)dxdy .$$

…

$$\text{Ï}'_{\text{è}} = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} [1 - \Gamma_0(x - x_1; y - y_1) + \Gamma_0(x - x_2; y - y_1) + \Gamma_0(x - x_1; y - y_2) - \Gamma_0(x - x_2; y - y_2)] f(x, y)dxdy$$

відповідає інтегруванню по площі S за винятком площі S_1.

Таким чином, введення одиничної функції дозволило від двох подвійних інтегралів перейти до одного, що визначається по площі, обмеженій тільки зовнішнім контуром:

$$\text{Ï}_{\text{è}} = \frac{1}{2} \cdot \iint_S \left(\overline{M}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overline{M}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\overline{H} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dxdy,$$

где $\overline{M}_x = -\overline{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$; $\overline{M}_y = -\overline{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$; $\overline{H} = -\overline{D}(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$.

(Риски над компонентами означають, що розглядається суцільна модель, що заміняє конструкцію з отворами).

У цих співвідношеннях під $\overline{D}$ розуміється згинальна жорсткість пластинки, що залежить від координат x й y:

$$\overline{D} = \frac{E_1 h^3}{12\left(1-\mu^2\right)}.$$

Через E_1 позначений параметр жорсткості: $E_1 = E\cdot\lambda_1$,

де

$$\lambda_1 = 1 - \Gamma_0(x-x_1;y-y_1) + \Gamma_0(x-x_2;y-y_1) + \Gamma_0(x-x_1;y-y_2) - \Gamma_0(x-x_2;y-y_2).$$

Уведемо параметр щільності пластинки: $\gamma_1 = \gamma\cdot\lambda_1$. Тоді кінетична енергія визначиться за формулою:

$$K = \frac{1}{2}\cdot\iint\limits_S \frac{\gamma_1 h}{g}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dxdy\,.$$

Розглянемо інтеграл за часом від частин варіації кінетичної енергії оболонки по u:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta_u K dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdydt\,.$$

У результаті інтегрування по частинах знайдемо:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta_u K dt = \int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t_0}^{t_1}dxdy - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u dxdydt\,.$$

Аналогічно, запишемо варіації по v й w:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta_v K dt = \int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_{t_0}^{t_1}dxdy - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v dxdydt\,,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta_w K dt = \int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]_{t_0}^{t_1}dxdy - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dxdydt\,.$$

Варіація потенційної енергії при варіюванні функції прогину w:

$$\delta_w \ddot{I} = \int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\left[\overline{M}_x\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \overline{M}_y\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2\overline{H}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]dxdy\,.$$

Інтегруємо кожен член по частинах :

$$\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\overline{M}_x\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dxdy = \int\limits_{b_1}^{b_2}\left[\overline{M}_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_{a_1}^{a_2}dy - \int\limits_{b_1}^{b_2}\left[\frac{\partial\overline{M}_x}{\partial x}\delta w\right]_{a_1}^{a_2}dy + \int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\partial^2\overline{M}_x}{\partial x^2}\delta w dxdy\,;$$

$$\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\overline{M}_y\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_{a_1}^{a_2}\left[\overline{M}_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_{b_1}^{b_2}dx-\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{\partial \overline{M}_y}{\partial y}\delta w\right]_{b_1}^{b_2}dx+\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial^2 \overline{M}_y}{\partial y^2}\delta w dxdy\,;$$

$$\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\overline{H}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy=\int_{a_1}^{a_2}\left[\overline{H}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_{b_1}^{b_2}dx-\int_{b_1}^{b_2}\left[\frac{\partial \overline{H}}{\partial y}\delta w\right]_{a_1}^{a_2}dy+\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial x\partial y}\delta w dxdy\,;$$

$$\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\overline{H}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy=-\int_{a_1}^{a_2}\left[\overline{H}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_{b_1}^{b_2}dx+\int_{b_1}^{b_2}\left[\frac{\partial \overline{H}}{\partial y}\delta w\right]_{a_1}^{a_2}dy+\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial x\partial y}\delta w dxdy\,.$$

Таким чином, одержуємо

$$\delta_w \ddot{I}=\int_{b_1}^{b_2}\left[\left(\overline{M}_x+\overline{H}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_{a_1}^{a_2}dy+\int_{a_1}^{a_2}\left[\left(\overline{M}_y+\overline{H}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_{b_1}^{b_2}dx-\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\left[-\frac{\partial^2 \overline{M}_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \overline{M}_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial x\partial y}\right]\delta w dxdy\,.$$

Підставимо отримані вирази в рівняння, що відповідає принципу Гамільтона-Остроградського. Тоді прийдемо до наступного варіаційного рівняння:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\left(-\frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u+\left(-\frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v+\left(-\frac{\partial^2 \overline{M}_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \overline{M}_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial x\partial y}+q-\frac{\gamma_1 h}{g}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{a_1}^{a_2}\left[\left(-\frac{\partial \overline{M}_y}{\partial y}-\frac{\partial \overline{H}}{\partial x}\right)\delta w\right]_{b_1}^{b_2}dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{b_1}^{b_2}\left[\left(-\frac{\partial \overline{M}_x}{\partial x}-\frac{\partial \overline{H}}{\partial y}\right)\delta w\right]_{a_1}^{a_2}dydt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{a_1}^{a_2}\left[\left(\overline{M}_y+\overline{H}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_{b_1}^{b_2}dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{b_1}^{b_2}\left[\left(\overline{M}_x+\overline{H}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_{a_1}^{a_2}dydt+\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma_1 h}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta u+\frac{\partial v}{\partial t}\delta v+\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right)_{t_0}^{t_1}dxdy=0\,.$$

Оскільки варіації δu, δv, δw, що розглядаються як функції часу, довільні, то множники при кожній з варіацій повинні дорівнювати нулю. Звідси, як наслідок варіаційного рівняння, виходять три диференціальних рівняння руху й відповідні граничні й початкові умови задачі:

$$-\frac{\gamma_1 h}{g}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,;$$

$$-\frac{\gamma_1 h}{g}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\,;$$

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{M}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overline{M}_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial x\partial y}\right)+q-\frac{\gamma_1 h}{g}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\,.$$