Л.2. **Конструктивні підходи до побудови С.Ф.Л.**

Метод диференційних наслідків;
метод Н.Н. Красовського;
градієнтний метод

To start with, let us note that a scalar function $V(\mathbf{x})$ is related to its gradient ∇V by the integral relation

$$V(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \nabla V d\mathbf{x}$$

Where $\nabla V = \{\partial V / \partial x_1, \ldots\ldots\ldots, \partial V / \partial x_n\}^T$. In order to recover a unique scalar function V from the gradient ∇V, the gradient function has to satisfy the so-called <u>curl conditions</u>

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

Note that the i^{th} component ∇V_i is simply the directional derivative $\partial V / \partial x_i$. For instance, in the case $n = 2$, the above imply means that

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$$

The principle of variable gradient method is to assume a specific form *for the gradient* ∇V, instead of assuming a specific form for the Lyapunov function V itself. A simple way is to assume that the gradient function is of the form

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

where the a_{ij} 's are coefficients to be determined.

Since satisfaction of the curl conditions implies that the above integration result is independent of the integration path, it is usually convenient to obtain V by integrating along a path which is parallel to each axis in turn, *i. e.,*

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, \ldots\ldots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, x_2, 0, \ldots\ldots, 0) dx_2 + \ldots$$

$$+ \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) dx_n$$

Example 3.20：Let us use the variable gradient method to find a Lyapunov function for the nonlinear system

$$\dot{x}_1 = -2x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1x_2^2$$

We assume that the gradient of the undetermined Lyapunov function has the following form

$$\nabla V_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\nabla V_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

The curl equation is

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$$

$$a_{12} + x_2\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

If the coefficients are chosen to be

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$$

which leads to

$$\nabla V_1 = x_1 \qquad \nabla V_2 = x_2$$

then $\dot{V}$ can be computed as

$$\dot{V} = \nabla V \dot{\mathbf{x}} = -2x_1^2 - 2x_2^2(1 - x_1 x_2)$$

Thus, $\dot{V}$ is locally negative definite in the region $(1 - x_1 x_2) > 0$. The function V can be computed as

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \qquad (3.22)$$

This is indeed positive definite, and therefore the asymptotic stability is guaranteed.

Note that (3.22) is not the only Lyapunov function obtainable by the variable gradient method. For example, by taking

$$a_{11} = 1, a_{12} = x_2^2$$

$$a_{21} = 3x_2^2, a_{22} = 3$$

we obtain the positive definite function

$$V = \frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{2}x_2^2 + x_1 x_2^3$$

whose derivative is

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 2x_2^2(x_1 x_2 - 3x_1^2 x_2^2)$$

Krasovskii's Method

Let us now come back to the problem of finding Lyapunov functions for general nonlinear systems. Krasovskii's method suggests a simple form of Lyapunov function candidate for autonomous nonlinear systems of the form (3.2), namely, $V = \mathbf{f}^T\mathbf{f}$. The basic idea of the method is simply to check whether this particular choice indeed leads to a Lyapunov function.

Theorem 3.7 (Krasovskii) *Consider the autonomous system defined by (3.2), with the equilibrium point of interest being the origin. Let* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *denote the Jacobian matrix of the system, i.e.,*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$$

If the matrix $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ *is negative definite in a neighborhood* Ω, *then the equilibrium point at the origin is asymptotically stable. A Lyapunov function for this system is*

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

If Ω *is the entire state space and, in addition,* $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *as* $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, *then the equilibrium point is globally asymptotically stable.*

Proof: First, let us prove that the negative definiteness of $\mathbf{F}$ implies that $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ for $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Since the square matrix $F(\mathbf{x})$ is negative definite for *non-zero* $\mathbf{x}$, one can show that the Jacobian matrix $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ is invertible, by contradiction. Indeed, assume that $\mathbf{A}$ is singular. Then one can find a non-zero vector $\mathbf{y}_o$ such that $\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{y}_o = \mathbf{0}$. Since

$$\mathbf{y}_o^T\mathbf{F}\,\mathbf{y}_o = 2\,\mathbf{y}_o^T\mathbf{A}\,\mathbf{y}_o$$

the singularity of $\mathbf{A}$ implies that $\mathbf{y}_o^T\mathbf{A}\,\mathbf{y}_o = 0$, which contradicts the assumed negative definiteness of $\mathbf{F}$.

The invertibility and continuity of $\mathbf{A}$ guarantee that the function $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ can be *uniquely* inverted. This implies that the dynamic system (3.2) has only one equilibrium point in Ω (otherwise different equilibrium points would correspond to the same value of $\mathbf{f}$), *i.e.*, that $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ for $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

We can now show the asymptotic stability of the origin. Given the above result, the scalar function $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})$ is positive definite. Using the fact that $\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{A}\mathbf{f}$, the derivative of V can be written

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T\dot{\mathbf{f}} + \dot{\mathbf{f}}^T\mathbf{f} = \mathbf{f}^T\mathbf{A}\,\mathbf{f} + \mathbf{f}^T\mathbf{A}^T\mathbf{f} = \mathbf{f}^T\mathbf{F}\,\mathbf{f}$$

The negative definiteness of $\mathbf{F}$ implies the negative definiteness of $\dot{V}$. Therefore, according to Lyapunov's direct method, the equilibrium state at the origin is asymptotically stable. The global asymptotic stability of the system is guaranteed by the global version of Lyapunov's direct method. □

Let us illustrate the use of Krasovskii's theorem on a simple example.

Example 3.19: Consider the nonlinear system

$$\dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3$$

We have

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6-6x_2^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12-12x_2^2 \end{bmatrix}$$

The matrix $\mathbf{F}$ is easily shown to be negative definite over the whole state space. Therefore, the origin is asymptotically stable, and a Lyapunov function candidate is

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2$$

Since $V(\mathbf{x}) \to \infty$ as $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, the equilibrium state at the origin is globally asymptotically stable. □

While the use of the above theorem is very straightforward, its applicability is limited in practice, because the Jacobians of many systems do not satisfy the negative definiteness requirement. In addition, for systems of high order, it is difficult to check the negative definiteness of the matrix $\mathbf{F}$ for *all* $\mathbf{x}$.

An immediate generalization of Krasovskii's theorem is as follows:

Theorem 3.8 (Generalized Krasovskii Theorem) *Consider the autonomous system defined by (3.2), with the equilibrium point of interest being the origin, and let* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *denote the Jacobian matrix of the system. Then, a sufficient condition for the origin to be asymptotically stable is that there exist two symmetric positive definite matrices* $\mathbf{P}$ *and* $\mathbf{Q}$, *such that* $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *the matrix*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q}$$

is negative semi-definite in some neighborhood Ω *of the origin. The function* $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T\mathbf{P}\mathbf{f}$ *is then a Lyapunov function for the system. If the region* Ω *is the whole state space, and if in addition,* $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *as* $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, *then the system is globally asymptotically stable.*

Одним из практических приемов построения квадратичной функции Ляпунова может служить построение знакопостоянной линейной комбинации дифференциалов квадратичных функций фазовых переменных системы. Дифференциалы квадратичных функций фазовых переменных определяются из дифференциальных уравнений возмущенного движения при умножении последних на подходящие фазовые переменные. Если это удается (производная вспомогательной функции – знакопостоянна), то условие ее положительной определенности является одновременно и условием асимптотической устойчивости нулевого решения, нарушение этого условия (положительной определенности) влечет неустойчивость нулевого решения.

А. Определим условия асимптотической устойчивости нулевого решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (любая система двух линейных дифференциальных уравнений может быть сведена к такому уравнению):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)=0\;;\qquad (1.10)$$

чисто мнимые собственные значения: i ω ; -i ω ;

вид общего решения

$$\mathrm{x}(t)=\_C1\,\sin(\omega\,t)+\_C2\,\cos(\omega\,t)\,.$$

Из уравнения (1.1.11), как дифференциальное следствие, получим дифференциал квадратичной формы:

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)=0. \qquad (1.11)$$

Полученная квадратичная форма является функцией Ляпунова (положительно определенной)

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2+\frac{1}{2}\,\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2;$$

ее производная в силу уравнения (1.10) равна нулю.

В данном случае функция Ляпунова имет механический смысл полной механической энергии системы (линейного осциллятора без диссипации). В консервативных системах полная механическая энергия сохраняется. На рисунке 1.1.10 представлен фазовый портрет системы – положению равновесия в начале координат соответствует центр (характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни).

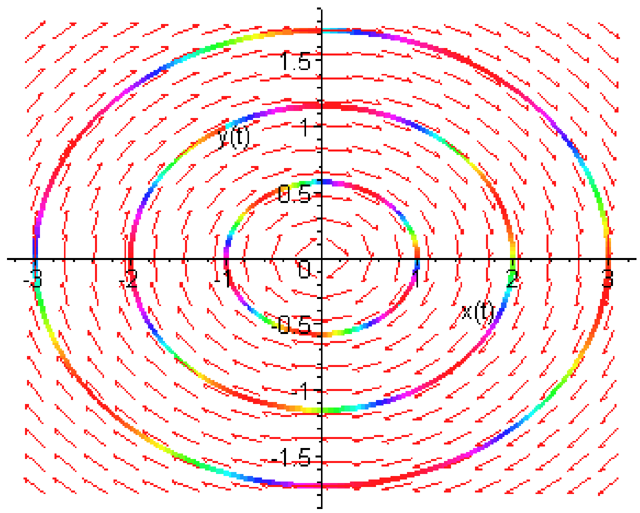

Рис.1.1 Поведение фазовых траекторий в окрестности центра.

Особую точку типа центр (рис.1.1.) окружают замкнутые фазовые траектории; центр является структурно неустойчивой особой точкой – малые структурные изменения в системе могу привести к существенной перестройке фазового портрета.

Введем, например, в систему малую диссипацию

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t)\right)+2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)+\omega^2 x(t)=0 \quad ; \qquad (1.12)$$

вид общего решения

$$x(t)=(\_C1\cos(\sqrt{-\gamma^2+\omega^2}\,t)+\_C2\sin(\sqrt{-\gamma^2+\omega^2}\,t))\,\mathbf{e}^{(-t\gamma)},$$

.

комплексно-сопряженные собственные значения имеют ненулевую действительную часть : $-\gamma + i\sqrt{-\gamma^2+\omega^2}$; $-\gamma - i\sqrt{-\gamma^2+\omega^2}$.

Фазовый портрет системы представлен на рис.1.2: фазовые траектории являются скручивающимися к началу координат спиралями.

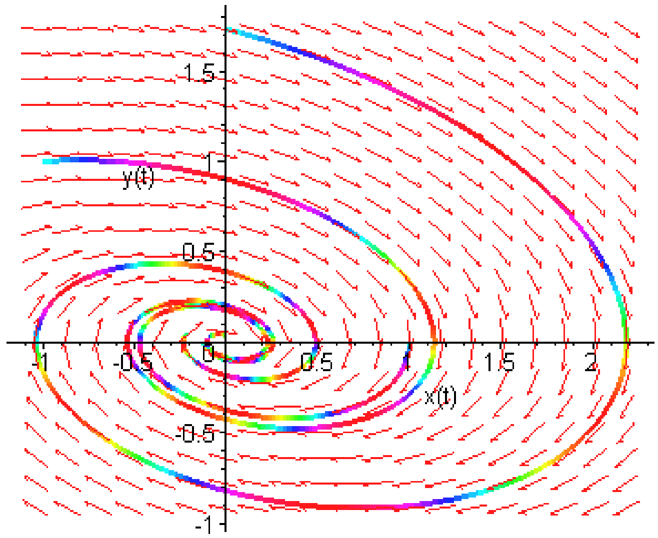

Рис.1.2 Поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивого фокуса.

Из уравнения (1.12) получим дифференциал квадратичной формы:

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\,\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)=0.$$

Функция Ляпунова в этом случае представляет собой приведенную полную механическую энергию осциллятора

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2+\frac{1}{2}\,\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2;$$

ее производная в силу уравнения (1.1.12) неположительна

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2+\frac{1}{2}\,\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2\right)=-2\,\gamma\,\mathrm{D}(\mathrm{x}(t))^2.$$

Из теоремы Барбашина-Красовского следует, что положение равновесия асимптотически устойчиво (областью асимптотической устойчивости является вся фазовая плоскость).