Л.3. **Аналіз впливу структури сил на стійкість механічних систем**

Одними из первых результатов в этом направлении были теоремы Томсона-Тэта-Четаева о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость линейной консервативной ситемы, а также классические результаты И.И.Метелицына для случая неконсервативных систем.

В общем случае малые отклонения консервативной механической системы от положения равновесия удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений

$$A\ddot{q} = -Fq,\ q = (q_1,...,q_n); \Pi(q) = \frac{1}{2} q^T Fq;\ T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A\dot{q}, \tag{3.1}$$

а положительная определенность потенциальной энергии системы $\Pi(q)$ является достаточным условием устойчивости положения равновесия. Здесь F – матрица потенциальных сил (симметричная); $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы в малой окрестности положения равновесия (квадратичная форма обобщенных координат q1, … ,qn); T(q) – кинетическая энергия системы (положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей).

В качестве функции Ляпунова можно взять полную механическую энергию системы

$$V(\dot{q}, q) = T(\dot{q}) + \Pi(q), \tag{3.2}$$

производная которой в силу уравнений возмущенного движения равна нулю, т.е. выполнены условия теоремы Ляпунова об устойчивости.

Приведем положения теорем Томсона-Тэта о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия линейной механической системы:

равновесие, неустойчивое при одних консервативных силах, может быть стабилизировано добавлением гироскопических сил только в том случае, если степень неустойчивости (число отрицательных коэффициентов у квадратичной формы потенциальной энергии) четная;

равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, остается устойчивым при добавлении диссипативных сил (с полной или неполной диссипацией) и (или) гироскопических сил;

равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией, а также диссипативных сил с полной диссипацией и гироскопических сил;

равновесие, неустойчивое при одних консервативных силах, не может быть стабилизировано при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил, если последние обладают полной диссипацией.

Неконсервативные позиционные силы, как правило, имеют дестабилизирующий эффект (разрушают устойчивость равновесия линейной системы), но в некоторых случаях могут привести к стабилизации.

Приведем один результат, который корреспондируется с теоремами Томсона-Тэта и относится к системе подверженной воздействию диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных сил. Будем использовать метод функций Ляпунова, это позволит проиллюстрировать основные известные выводы о влиянии структуры сил на устойчивость линейной системы наиболее общего вида.

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$A\ddot{x} + D\dot{x} + G\dot{x} + Fx + Ex = 0, \tag{3.3}$$

где A, D, F - симметричные матрицы размером ($n \times n$); G, E – кососимметриные матрицы ($n \times n$), соответствующие гироскопическим и неконсервативным позиционным сислам.

Теорема. Пусть $A = \{a_{ij}\}; D - A = h\{d^*_{ij}\}; F = l\{f_{ij}\}$ – положительно определенные матрицы ($h > 0, l > 0$), если G=E, то нулевое решение системы (1.5.3) асимптотически устойчиво, если $G \neq E$, то при достаточно большом h>0 или l>0 нулевое решение системы (1.5.3) асимптотически устойчиво (независимо от гироскопических и неконсервативных сил).

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}[\dot{x}^T A\dot{x} + 2\dot{x}^T Ax + x^T(F + D)x]. \tag{3.4}$$

В силу системы (1.5.3) ее производная определяется выражением

$$\dot{V} = \frac{1}{2}[\dot{x}^T A\ddot{x} + \dot{x}^T A\dot{x} + x^T A\ddot{x} + x^T(F + D)\dot{x}]. \tag{3.5}$$

После подстановки в (1.5.5) выражения $A\ddot{x}$ из (3.3) и приведения членов имеем отрицательно определенную форму

$$\dot{V} = \frac{1}{2}[-\dot{x}^T(D-A)\dot{x} - x^T F x]. \tag{3.6}$$

Положительная определенность формы (1.4.3) следует непосредственно из приведения ее к виду $V = \frac{1}{2}[\dot{x}^T A\dot{x} + 2\dot{x}^T Ax + x^T Ax + x^T(F+D-A)x].$ Форма (3.3) положительно определенная, если форма $x^T(F+D-A)x$ положительно определенная.

На основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости делаем вывод об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3.3). Если же $G \neq E$, имеем

$$\dot{V} = \frac{1}{2}[-\dot{x}^T(D-A)\dot{x} - \dot{x}^T(E-G)x - x^T F x]. \tag{3.7}$$

Можно показать, что при достаточно большом h>0 или l>0 форма (3.7) определенно отрицательная.

Из приведенной теоремы следует вывод о возможности стабилизации механической системы общего вида достаточно большими диссипативными силами с полной диссипацией и потенциальными силами.

В общем случае влияние неконсервативных позиционных сил на устойчивость положения равновесия или стационарного состояния является довольно сложным, зависит от всей совокупности действующих сил. Если $F=0$, то тривиальное решение ($x=0$) системы $A\ddot{x} + D\dot{x} + Ex = 0$ неустойчиво при произвольных значениях параметров (система в этом случае называется структурно неустойчивой). Этот факт можно доказать на основе теоремы Четаева (производная знакопеременной формы имеет знакопостоянную производную)

$$\left(2x^T A\dot{x} + x^T Dx\right)' = 2\dot{x}^T A\dot{x}.$$

Если F (матрица потенциальных сил) положительно определенная, то тривиальное решение системы будет устойчивым при выполнении условия (положительно определенная квадратичная форма)

$$\dot{x}^T(D-A)\dot{x} + \dot{x}^T Ex + x^T Fx > 0.$$

Second Order Systems

Consider the system

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=0,\ M^T=M>0,\ C^T=C>0,\ K^T=K>0$$

$$\boxed{E(\dot{x},x)=\tfrac{1}{2}\dot{x}^T M\dot{x}+\tfrac{1}{2}x^T Kx}$$

$$\frac{d}{dt}E(\dot{x},x)=\dot{x}^T M\ddot{x}+x^T K\dot{x}=-\dot{x}^T\left[C\dot{x}+Kx\right]+x^T K\dot{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}E(\dot{x},x)=-\dot{x}^T C\dot{x}}$$

Some interesting generalizations:

1) $C\ge 0$, 2) $C^T\ne C$, 3) $K^T\ne K$

The anti-symmetric terms correspond to 'circulatory' forces (transfer conductances in power systems) – they are non-conservative.

The anti-symmetric terms correspond to 'gyroscope' forces – they are conservative.

Для механічної системи загального вигляду (Walker 1970)

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=0 \qquad (3.8)$$

пропонується шукати квадратичну функцію Ляпунова у вигляді

$$V=x^T Fx+\dot{x}^T G\dot{x}+\dot{x}^T Hx\ , \qquad (3.9)$$

де F, G - симетричні матриці, а матриця H може мати довільну структуру. Похідна квадратичної функції Ляпунова (3.9) в силу системи (3.8) має вигляд

$$\dot{V}=-x^T K^T M^{-1}H\,x-\dot{x}^T\left[2GM^{-1}C-H\right]\dot{x}-\dot{x}^T\left[2F-2GM^{-1}K-C^T M^{-1}H\right]x. \qquad (3.10)$$

Як видно з (3.10), вибір матриці $F=GM^{-1}K+{}^1\!/_2\,C^T M^{-1}H$ може значно спростити аналіз знаковизначеності (за умови, що вираз справа є симетричною матрицею), оскільки необхідно вибрати структуру тільки двох матриць *G і H.*

Приклади використання узагальненої квадратичної функції Ляпунова .

Далі розглянемо два приклади, що ілюструють можливості використання узагальненої квадратичної функції Ляпунова виду (3.9).

Приклад 3.1. Гіроскопічна стабілізація нестійкою потенціальної системи

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 - g\dot{x}_2 - kx_1 = 0; \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{pmatrix};\ K = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}; \\ &\ddot{x}_2 + g\dot{x}_1 - kx_2 = 0. \end{aligned}$$

Виберемо $G = M$ і $H = C$, тоді $K^T M^{-1} H = \begin{pmatrix} 0 & g\cdot k \\ -g\cdot k & 0 \end{pmatrix}$;

$$F = K + \tfrac{1}{2} C^T M^{-1} C = \begin{pmatrix} -k + g^2/2 & 0 \\ 0 & -k + g^2/2 \end{pmatrix};$$

$$V = x^T F x + \dot{x}^T G \dot{x} + \dot{x}^T H x\ ;\ \dot{V} = 0\ .$$

Умова додатної визначеності квадратичної функції Ляпунова (3.9): $g^2/4 > k$.

Приклад 3.2. Достатні умови нестійкості механічної системи при наявності потенціальних і неконсервативних позиційних сил

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - e x_2 = 0; \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad K = \begin{pmatrix} k_1 & -e \\ e & k_2 \end{pmatrix}; \\ &\ddot{x}_2 + e x_1 + k_2 x_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Виберемо квадратичну функцію Ляпунова $V = \dot{x}^T H x,$ де $H = -H^T$, тоді

$$\dot{V} = -x^T K^T H\, x = -\tfrac{1}{2} x^T (K^T H + H^T K) x.$$

Твердження. Якщо існує така кососиметрична матриця H, що матриця $K^T H$ має знаковизначену симетричну частину, то нульовий розв'язок системи (3.11) є нестійким.

Наприклад, умова додатної визначеності $K^T H + H^T K \succ 0$ при

$$H = \tfrac{1}{2}(K - K^T): \begin{vmatrix} 2e^2 & e(k_2 - k_1) \\ e(k_2 - k_1) & 2e^2 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 2e > k_1 - k_2$$

(прийнято угоду, що $k_1 > k_2$).

Доповнення Шура.

To prove that SOCP is a special case of SDP, we first prove the following lemma that introduces the very useful notion of *Schur complements.*

Definition 7 (Schur complement). *Given a symmetric block matrix* $X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$, *with* $det(A) \neq 0$, *the matrix* $S := C - B^T A^{-1} B$ *is called the Schur complement of* A *in* X.

Lemma 1. *Consider a block matrix* $X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ *and let* $S := C - B^T A^{-1} B$. *If* $A \succ 0$, *then*

$$X \succeq 0 \Leftrightarrow S \succeq 0.$$

Proof: Let $f_v^* := \min_u f(u, v)$, where $f(u, v) := u^T A u + 2v^T B^T u + v^T C v$. Suppose $A \succ 0$, which implies that f is strictly convex in u. We can find the unique global solution of f over

[1]Recall that a point x is an extreme point of a convex set P if it cannot be written as a strict convex combination of two other points in P; i.e., $\nexists y, z \in P$ such that $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$, for some $\lambda \in (0, 1)$.

u as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2Au + 2Bv = 0 \Rightarrow u = -A^{-1}Bv.$$

Hence, we obtain

$$\begin{aligned} f_v^* &= v^T B^T A^{-1} Bv - 2v^T B^T A^{-1} Bv + v^T Cv \\ &= v^T (C - B^T A^{-1} B) v \\ &= v^T S v. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) If $S \not\succeq 0$, then

$$\exists v \text{ s.t. } v^T S v < 0 \Rightarrow f_v^* < 0.$$

Picking

$$z = \begin{pmatrix} -A^{-1}Bv \\ v \end{pmatrix},$$

we obtain $z^T X z < 0$.
($\Leftarrow$) Take any $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Then

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T X \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq f_v^* = v^T S v \geq 0.$$

$\square$