

Л.4. Аналіз стійкості моделі літака, колісного екіпажа, колісної пари вагона; аналіз стійкості найпростіших неавтономних систем

Example 6.5: Aircraft altitude dynamics

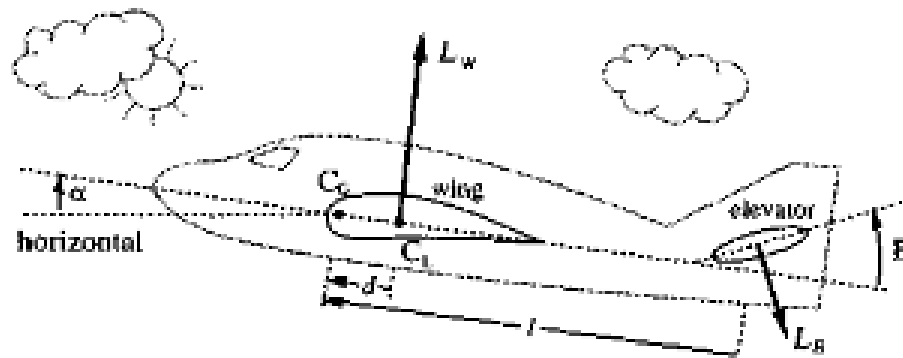


Figure 6.4 : Dynamic characteristics of an aircraft

A schematic diagram of the dynamics of an aircraft (in the longitudinal plane) is shown in Figure 6.4. The sum of the lift forces applied to the aircraft wings and body is equivalent to a single lift force L_W , applied at the "center of lift" C_L . The center of lift does not necessarily coincide with the center of mass C_G (with a positive d meaning that the center of mass is ahead of the center of lift). The mass of the aircraft is denoted by m and its moment of inertia about C_G is denoted by J . We assume that all angles are small enough to justify linear approximations, and that the forward velocity of the aircraft remains essentially constant.

The aircraft is initially cruising at a constant altitude $h = h_0$. To affect its vertical motion, the elevator (a small surface located at the aircraft tail) is rotated by an angle E . This generates a small aerodynamic force L_E on the elevator, and thus a torque about C_G . This torque creates a rotation of the aircraft about C_G , measured by an angle α . The lift force L_W applied to the wings is proportional to α , i.e., $L_W = C_{ZW}\alpha$. Similarly, L_E is proportional to the angle between the horizontal and the elevator, i.e., $L_E = C_{ZE}(E - \alpha)$. Furthermore, various aerodynamic forces create friction torques proportional to $\dot{\alpha}$, of the form $b\dot{\alpha}$. In summary, a simplified model of the aircraft vertical motion can be written

$$J\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + (C_{ZE}l + C_{ZW}d)\alpha = C_{ZE}lE \quad (6.40a)$$

$$m\ddot{h} = (C_{ZE} + C_{ZW})\alpha - C_{ZE}E \quad (6.40b)$$

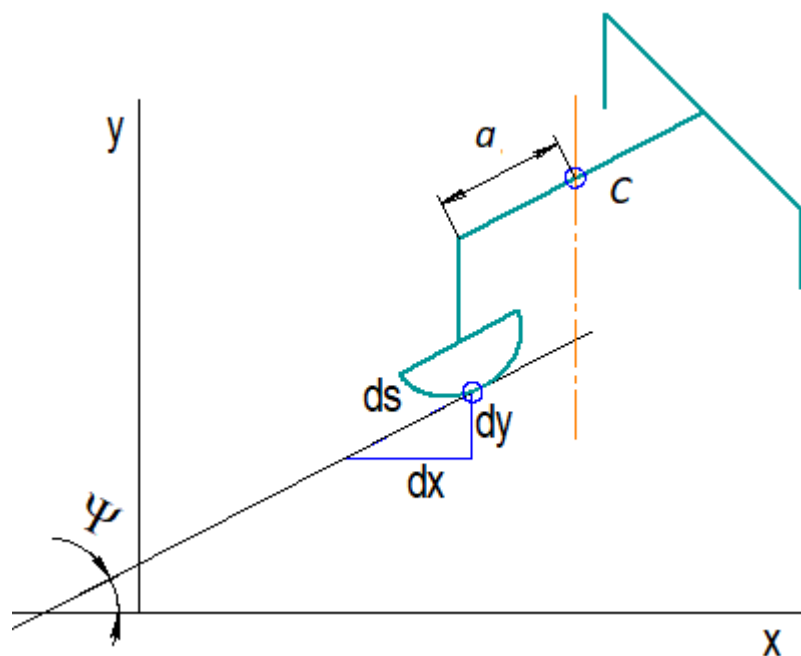
where the first equation represents the balance of moments and the second the balance of forces.

Remark that the open-loop stability of the first equation, which defines the dynamics of the angle α , depends on the sign of the coefficient $(C_{Z\dot{E}}l + C_{Z\dot{W}}d)$. In particular, the equation is open-loop stable if $d > 0$, i.e., if the center of mass is ahead of the center of lift (this allows us to understand the shape of a jumbo jet, or the fact that on small aircraft passengers are first seated on the front rows).

To simplify notations, let now

$$J = 1 \quad m = 1 \quad b = 4 \quad C_{Z\dot{E}} = 1 \quad C_{Z\dot{W}} = 5 \quad l = 3 \quad d = 0.2.$$

> Стійкість прямолінійного руху неголономної системи (сани Чаплігіна)



сани Чаплыгіна

Положение системы задается координатами точки контакта острья x , y и курсовым углом Ψ , определяющим положение продольной оси. Центр масс системы лежит на продольной оси на расстоянии a от точки контакта лезвия. В данном случае скорость точки лезвия, контактирующей с поверхностью, должна лежать вдоль плоскости лезвия (боковая составляющая тождественно равна нулю), и, следовательно, имеет место соотношение $dy = \operatorname{tg}\Psi \cdot dx$ или $\dot{y} = \operatorname{tg}\Psi \cdot \dot{x}$, которое называется неинтегрируемой кинематической связью (неголономной связью).

Два дифференциальных уравнения движения относительно переменных V , ω

$$\dot{V} = a\omega^2;$$

$$(J + ma^2)\dot{\omega} = -amV\omega.$$

Последние допускают интеграл энергии (умножив левую и правую части уравнений соответственно на mV и ω , сложим между собой)

$$m\dot{V}V + (J + ma^2)\dot{\omega}\omega = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[mV^2 + (J + ma^2)\omega^2] = const.$$

Так как продольная составляющая скорости ЦМ V монотонно растет ($\dot{V} > 0$ при $\omega \neq 0$), а кинетическая энергия системы постоянна, то составляющая кинетической энергии вращательного движения с течением времени стремится к нулю, а продольная составляющая скорости ЦМ V стремится к максимальному значению

$$V^2 = \sqrt{[mV_0^2 + (J + ma^2)\omega_0^2]}/m,$$

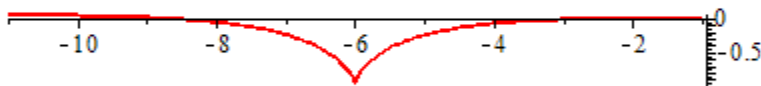
где V_0, ω_0 – начальные значения переменных. Таким образом, приходим к выводу – траектория саней с течением времени стремится к прямолинейному движению вдоль продольной оси ($\omega(t) \rightarrow 0, u(t) \rightarrow 0$).

```
> restart:
> a := 1; k := 1; KOL := 0.5;
>
> with(plots):
> F:=dsolve({diff(u(t),t)=omega(t)^2,diff(omega(t),t)=-
omega(t)*u(t)/k^2,diff(psi(t),t)=omega(t),diff(xr(t),t)=(u(t)+KOL
L*omega(t)/2)*cos(psi(t))-
a*omega(t)*sin(psi(t)),diff(yr(t),t)=(u(t)+KOL*omega(t)/2)*sin(p
si(t))+a*omega(t)*cos(psi(t)),diff(xl(t),t)=(u(t)-
KOL*omega(t)/2)*cos(psi(t))-
a*omega(t)*sin(psi(t)),diff(y1(t),t)=(u(t)-
KOL*omega(t)/2)*sin(psi(t))+a*omega(t)*cos(psi(t)),diff(x(t),t)=
u(t)*cos(psi(t)),diff(y(t),t)=u(t)*sin(psi(t)),u(0)=-
2.,omega(0)=0.01,psi(0)=0,xr(0)=0,yr(0)=-
KOL/2,xl(0)=0,y1(0)=KOL/2,x(0)=-
a,y(0)=0},{u(t),omega(t),psi(t),xr(t),yr(t),xl(t),y1(t),x(t),y(t
)},numeric,relerr=0.0001,abserr=0.0001,output=listprocedure);
> X:=subs(F,(x)(t));
> Y:=subs(F,(y)(t));
```

```

> for i from 0 by 1 to 120 do
L(i) := PLOT(POLYGONS([[rhs(F[5](0.05*i)), rhs(F[6](0.05*i))], [rhs(
F[7](0.05*i)), rhs(F[8](0.05*i))], [rhs(F[9](0.05*i)), rhs(F[10](0.
05*i))]])) end do:
>
plot([X,Y,0..6], style=LINE, linestyle=SOLID, color=RED, scaling=con
strained);
> with(plots):
> with(plottools):
>
display([seq(L(i), i=1..120)], insequence=true, scaling=constrained
);

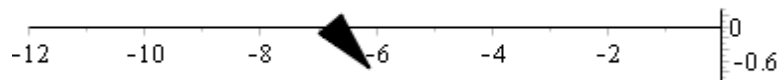
```



```

> with(plots):
> with(plottools):
>
display([seq(L(i), i=1..120)], insequence=true, scaling=constrained
);

```



AUTONOMOUS SYSTEMS

INTRODUCTION

Harry G. Kwatny

Department of Mechanical Engineering & Mechanics
Drexel University



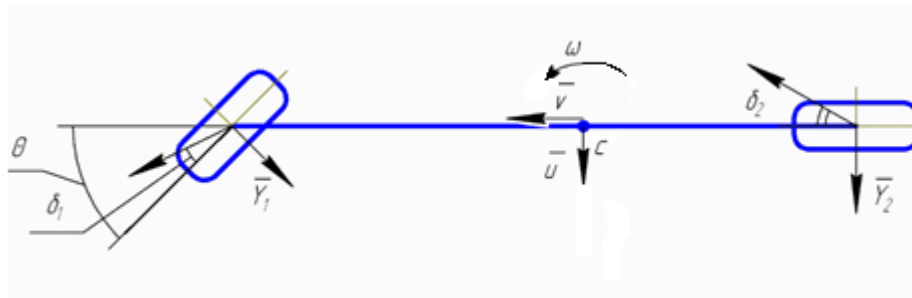
BASIC CONFIGURATION

- ▶ Truck Traxxas E-Maxx/Tamiya TXT-1.
Possible modifications:
 - ▶ Springs & tires
 - ▶ steering servo(s)
 - ▶ motor drive
- ▶ Computing
 - ▶ Low level, Parallax Propeller (on-board)/servo controller
 - ▶ High level, laptop (remote – communication via bluetooth (Parallax Transceiver)
- ▶ Sensors:
 - ▶ Sonar (Parallax Ping)
 - ▶ Vision (CMU Cam)
 - ▶ Optical encoders (US Digital)



Модель двовісного колісного екіпажа.

Розглянемо одномасову «велосипедну» модель екіпажа із закріпленим рульовим управлінням. Розрахункова схема моделі екіпажа



Розрахункова схема екіпажа

Рівняння руху моделі мають вигляд:

$$m(\dot{u} + V\omega) = Y_1(\delta_1) + Y_2(\delta_2);$$

$$J\dot{\omega} = a \cdot Y_1(\delta_1) - b \cdot Y_2(\delta_2).$$

Де Y_1, Y_2 - нелінійні характеристики сил відведення;

Кути відведення на осях визначаються співвідношеннями:

$$\delta_1 = \theta - \frac{u + a\omega}{V};$$

$$\delta_2 = \frac{-u + b\omega}{V}.$$

Далі для полегшення необхідних перетворень знадобиться введення безрозмірних величин :

$$Y_i = \bar{Y}_i N_i;$$
$$N_1 = \frac{mgb}{l}; \quad N_2 = \frac{mga}{l}.$$

Система, що визначає множину стаціонарних станів моделі екіпажа

$$\frac{V\omega}{g} = \bar{Y}_1 \frac{b}{l} + \bar{Y}_2 \frac{a}{l}$$

$$\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 0,$$

може бути зведена до одного визначального рівняння.

Дійсно, введемо новий незалежний аргумент

$$\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = \bar{Y},$$

через який будуть визначатися кути відведення на осях: $\delta_1 = G_1(\bar{Y}), \delta_2 = G_2(\bar{Y})$, де $\delta_i = G_i(\bar{Y})$ - функції обернені до функцій $\bar{Y}_i = \bar{Y}_i(\delta_i)$. Враховуючи співвідношення, що впливає із визначення кутів відведення

$$\omega = \frac{V(\theta + \delta_2 - \delta_1)}{l},$$

отримаємо одне визначальне рівняння:

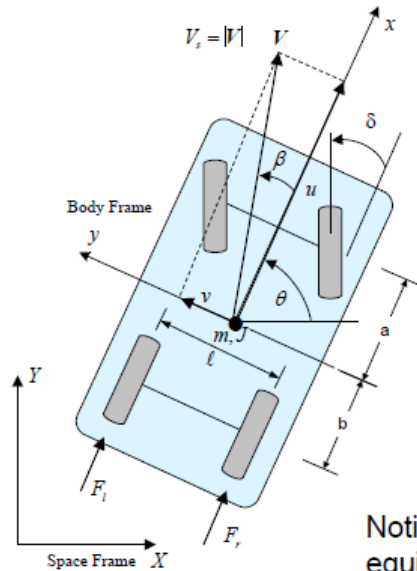
$$G(\bar{Y}) = gl/V^2 \cdot \bar{Y} - \theta,$$

де функція $G(\bar{Y}) = G_2(\bar{Y}) - G_1(\bar{Y})$.

Будемо вважати, що сили відведення визначаються співвідношеннями, де k_i - безрозмірні коефіцієнти відведення

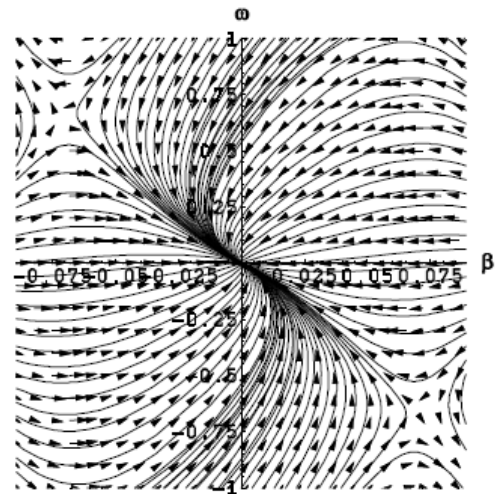
$$\bar{Y}_i = k_i \cdot \delta_i / (1 + (k_i \cdot \delta_i / \varphi_i)^2)^{1/2}.$$

Auto at Constant Speed



Notice the three equilibria.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ \beta \end{bmatrix} = f(\omega, \beta, \bar{V}, \delta)$$



Nonautonomous Systems

Examples

Example 1

$$\dot{x} = -(1 + g(t))x^3$$

where $x \in \mathbb{R}^2$, g is C^0 (continuous) and $g(t) \geq 0, \forall t \geq 0$.

Consider

$$V = \frac{1}{2}x^2$$

and so,

$$\dot{V} = -(1 + g(t))x^4 \leq -x^4$$

Then, $W_1(x) = W_2(x) = V(x)$ and $W_3(x) = x^4$, thus $x = 0$ is GUAS.

Example 2

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

where g is C^1 , $0 \leq g(t) \leq k$ and $\dot{g}(t) \leq g(t)$

Consider

$$V(t, x) = x_1^2 + (1 + g(t))x_2^2$$

Note that,

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x) \leq x_1^2 + (1 + k)x_2^2$$

Thus $V(t, x)$ is positive definite and radially unbounded.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2(1 + g(t))\dot{x}_2 + \dot{g}x_2^2 \\ &= -2x_1^2 - 2gx_1x_2 + 2x_2x_1 - 2x_2^2 + 2x_2gx_1 - 2x_2^2g + \dot{g}x_2^2 \\ &= -2x_1^2 + 2x_2x_1 - [2 + 2g - \dot{g}]x_2^2 \\ &\leq -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ &= - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =: -x^T Q x\end{aligned}$$

Therefore, W_1 , W_2 and W_3 are positive definite quadratic functions ($a=2$)
($\lambda_{\min}(P)x^T x \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)x^T x$) and so we conclude that $x = 0$ is GES.