## Лаб.2. Побудова КФЛ на основі методу диференціальних наслідків

Одним из практических приемов построения квадратичной функции Ляпунова может служить построение знакопостоянной линейной комбинации дифференциалов квадратичных функций фазовых переменных системы. Дифференциалы квадратичных функций фазовых переменных определяются из дифференциальных уравнений возмущенного движения при умножении последних на подходящие фазовые переменные. Если это удается (производная вспомогательной функции – знакопостоянна), то условие ее положительной определенности является одновременно и условием асимптотической устойчивости нулевого решения, нарушение этого условия (положительной определенности) влечет неустойчивость нулевого решения.

А. Определим условия асимптотической устойчивости нулевого решения линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathrm{x}(t)\right) + \omega^2 \mathrm{x}(t) = 0 \; ;$$

чисто мнимые собственные значения: $i\,\omega$ ; $-i\,\omega$ ;

вид общего решения

$$\mathrm{x}(t) = \_C1 \sin(\omega\, t) + \_C2 \cos(\omega\, t) \, .$$

Из уравнения (1), как дифференциальное следствие, получим дифференциал квадратичной формы:

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathrm{x}(t)\right) + \omega^2 \mathrm{x}(t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{x}(t)\right) = 0.$$

Полученная квадратичная форма является функцией Ляпунова (положительно определенной)

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{x}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \mathrm{x}(t)^2;$$

ее производная в силу уравнения (1) равна нулю.

В данном случае функция Ляпунова имет механический смысл полной механической энергии системы (линейного осциллятора без диссипации). В консервативных системах полная механическая энергия сохраняется. На рисунке 2.1 представлен фазовый портрет системы – положению равновесия в начале координат соответствует центр (характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни).

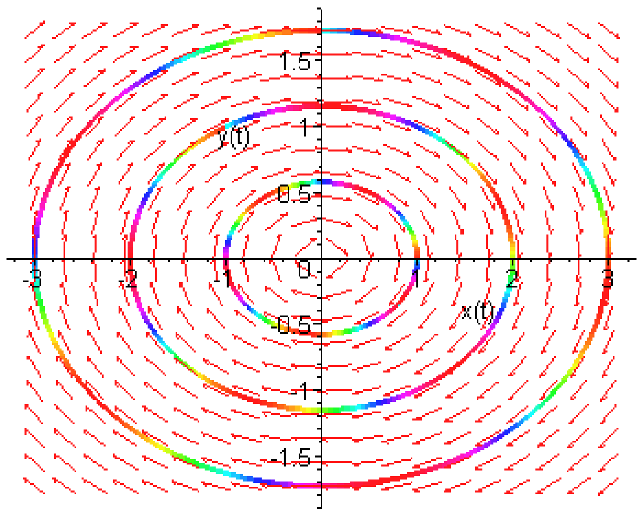


Рис.2.1. Поведение фазовых траекторий в окрестности центра.

Особую точку типа центр (рис.2.1) окружают замкнутые фазовые траектории; центр является структурно неустойчивой особой точкой – малые структурные изменения в системе могу привести к существенной перестройке фазового портрета.

Введем, например, в систему малую диссипацию

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\,\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)=0$$
;

вид общего решения

$$\mathrm{x}(t)=(\_C1\cos(\sqrt{-\gamma^2+\omega^2}\;t)+\_C2\sin(\sqrt{-\gamma^2+\omega^2}\;t))\,\mathbf{e}^{(-t\,\gamma)}$$
,

.

комплексно-сопряженные собственные значения имеют ненулевую действительную часть : $-\gamma\ +\mathrm{i}\ \sqrt{-\gamma^2+\omega^2}$ ; $-\gamma\ -\mathrm{i}\ \sqrt{-\gamma^2+\omega^2}$ .

Фазовый портрет системы представлен на рис.2.2: фазовые траектории являются скручивающимися к началу координат спиралями.

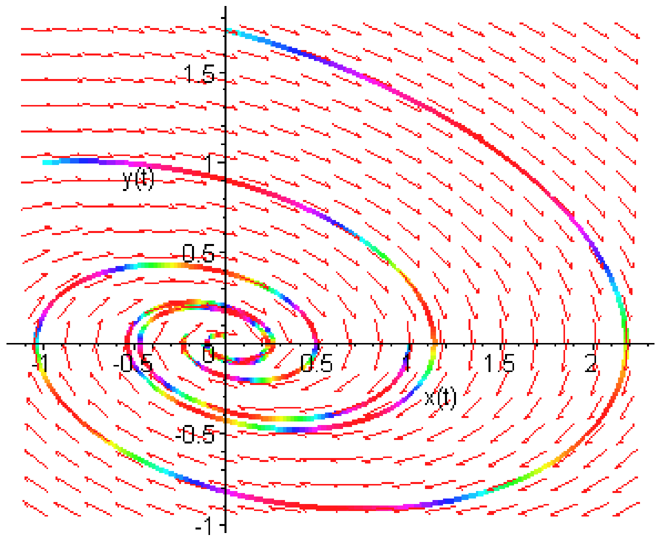


Рис.2.2 Поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивого фокуса.

Из уравнения (2) получим дифференциал квадратичной формы:

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\,\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)=0.$$

Функция Ляпунова в этом случае представляет собой приведенную полную механическую энергию осциллятора

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2+\frac{1}{2}\,\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2,$$

ее производная в силу уравнения (2) неположительна

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2+\frac{1}{2}\,\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2\right)=-2\,\gamma\,\mathrm{D}(\mathrm{x}(t))^2.$$

Из теоремы Барбашина-Красовского следует, что положение равновесия асимптотически устойчиво (областью асимптотической устойчивости является вся фазовая плоскость).

Рассмотрим осциллятор с нелинейной восстанавливающей силой

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\,\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)-\Omega^2\,\mathrm{x}(t)^3=0$$

Система имеет три положения равновесия; на рисунке 2.3 представлен фазовый портрет.

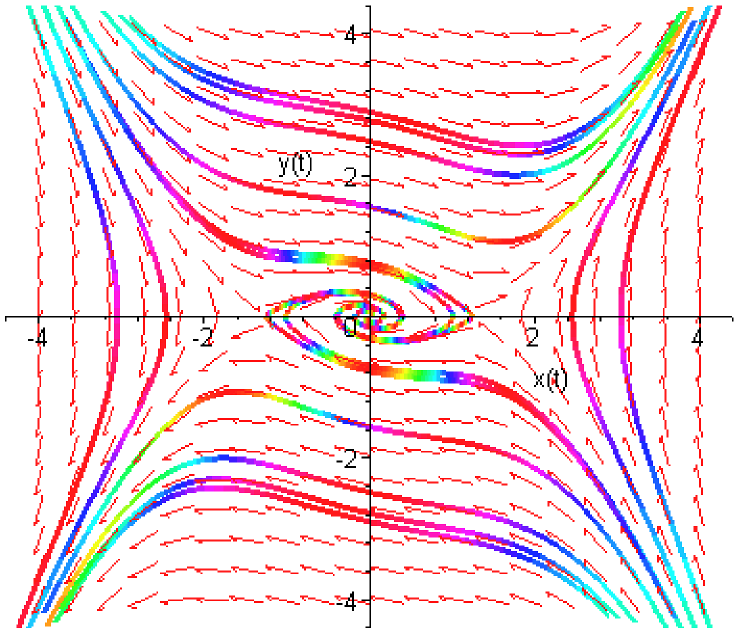


Рис.2.3 Область притяжения начала координат ограничивают устойчивые сепаратрисы пары седловых особых точек.

В начале координат (рис.3), как и в предыдущем случае, имеем фокус (иллюстрация структурной устойчивости – нелинейные члены не могут изменить качественную структуру фазового портрета в окрестности начала координат). Однако область притяжения начала координат существенно видоизменилась, ее ограничивают устойчивые сепаратрисы пары седловых особых точек.

Дифференциальное следствие уравнения

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\,\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)-\Omega^2\,\mathrm{x}(t)^3\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)=0$$

приводит к следующей функции Ляпунова:

$$V1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2+\frac{1}{2}\,\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2-\frac{1}{4}\,\Omega^2\,\mathrm{x}(t)^4;$$

ее производная неположительна, следовательно, область положительной определенности функции Ляпунова определяет область притяжения нулевого решения (положения равновесия)

$$D\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)^2+\frac{1}{2}\omega^2 x(t)^2-\frac{1}{4}\Omega^2 x(t)^4\right)= -2\gamma D(x(t)).$$

Замкнутые линии уровня функции Ляпунова целиком принадлежат области притяжения нулевого решения, определяя максимально возможное значение соответствующей константы, получаем оценку области притяжения нелинейного осциллятора (рис.3)

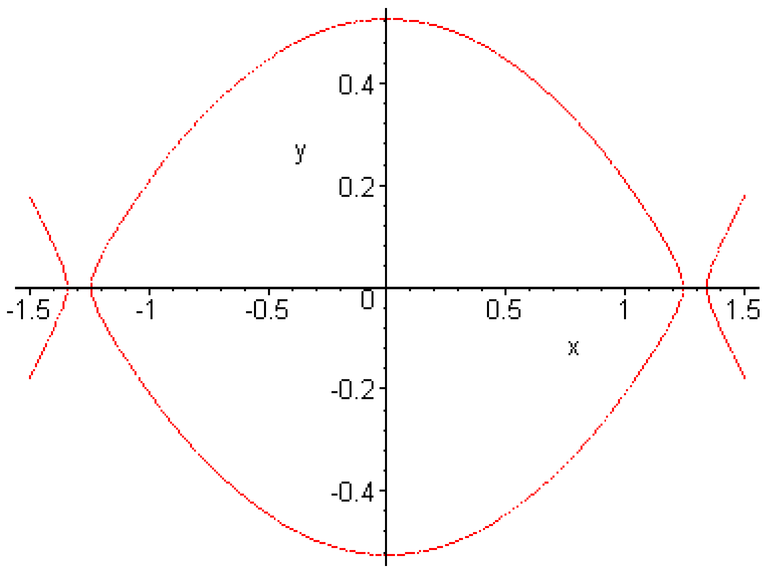


Рис.2.4 Между замкнутой и разомкнутыми линиями уровня функции Ляпунова (на оси абсцисс) находятся седловые особые точки, ограничивающие область притяжения нулевого решения системы (3).

Б. Рассмотрим систему

$$Dx(t) = -y(t) - x(t)^3;$$
$$Dy(t) = x(t) - y(t)^3.$$

Система имеет единственный стационарный режим в начале координат, которому соответствует точка пересечения двух кубических парабол. Из системы получим дифференциальные следствия, позволяющие сделать вывод об асимптотической устойчивости нулевого решения (стационарного состояния)

$$x(t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)+y(t)+x(t)^3\right)=0$$

$$y(t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}y(t)\right)-x(t)+y(t)^3\right)=0.$$

Из суммы дифференциальных следствий выделим производную от квадратичной формы (функции Ляпунова)

$$D\left(\frac{1}{2}x(t)^2+\frac{1}{2}y(t)^2\right)=-x(t)^4-y(t)^4.$$

Условия асимптотической устойчивости выполняются во всей фазовой плоскости, это свидетельствует о том, что любая возмущенная траектория с течением времени стремится к началу координат (стационарному режиму), т.е. областью притяжения является вся фазовая плоскость.

При отсутствии нелинейных членов производная функции Ляпунова равнялась бы нулю, следовательно, система линейного приближения лишь устойчива (случай чисто мнимых корней). Как уже отмечалось это критический случай пары чисто мнимых корней. В данном случае нелинейные члены привели к асимптотической устойчивости нулевого решения (область притяжения вся фазовая плоскость). На рисунке 2.5 представлен фазовый портрет системы, все траектории с течением времени стягиваются к началу координат. Соответствующая стационарному режиму особая точка является устойчивым фокусом (заметим, что собственные значения ситстемы линейного приближения чисто мнимые, что соответствовало бы особой точке центр).

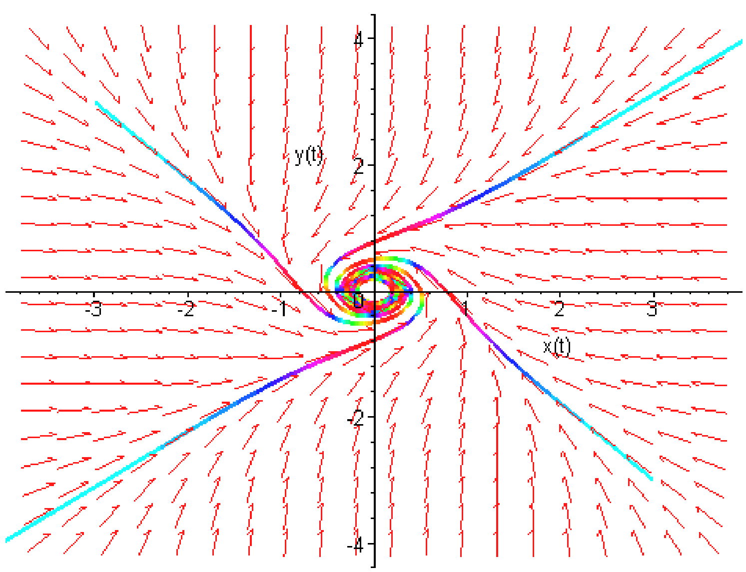

Рис.2.5 Нелинейные члены влияют на структуру фазового портрета в окрестности начала координат.

Если в системе (4) изменить знаки перед нелинейными членами

$$\mathrm{D}x(t) = -y(t) + x(t)^3;$$

$$\mathrm{D}y(t) = x(t) + y(t)^3,$$

то начало координат будет неустойчивым фокусом, та же функция Ляпунова будет иметь положительно определенную производную

$$V = \frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2,$$

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2\right) = x(t)^4 + y(t)^4,$$

т.е. фазовые траектории прошивают линии уровня функции Ляпунова, выходя наружу (рис.2.6).

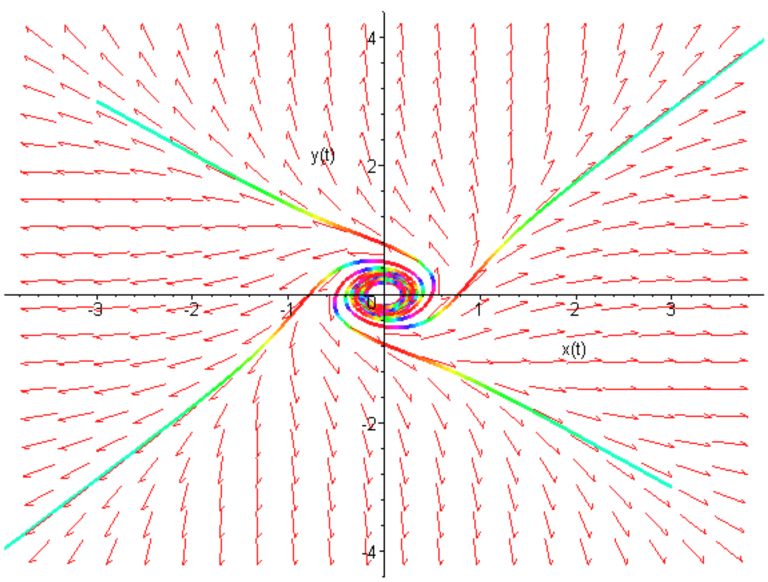


Рис.2.6 Особая точка в начале координат фазовой плоскости является неустойчивым фокусом.

В. Пример построения функции Четаева

$$\begin{cases} x' = -x^2 - xy; \\ y' = y^3 - x^3. \end{cases}$$

Система имеет единственную особую точку в начале координат, схема построения дифференциальных следствий остается неизменной – необходимо добиться построения знакопостоянной производной

$$\begin{cases} x' x_2 = -x^4 - x^3 y; \\ y' y = y^4 - x^3 y. \end{cases} \Rightarrow \frac{d(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3)}{dt} = y^4 + x^4;$$

В данном случае выполнены условия теоремы Четаева о неустойчивости, область $V > 0$ представляет большую часть фазовой плоскости, вырезаемую полукубической параболой $y^2 = 2x^3/3$ (рис.2.7).

Замечание. Факт неустойчивости может быть установлен из анализа фазовых траеторий, совпадающих с осью ординат.

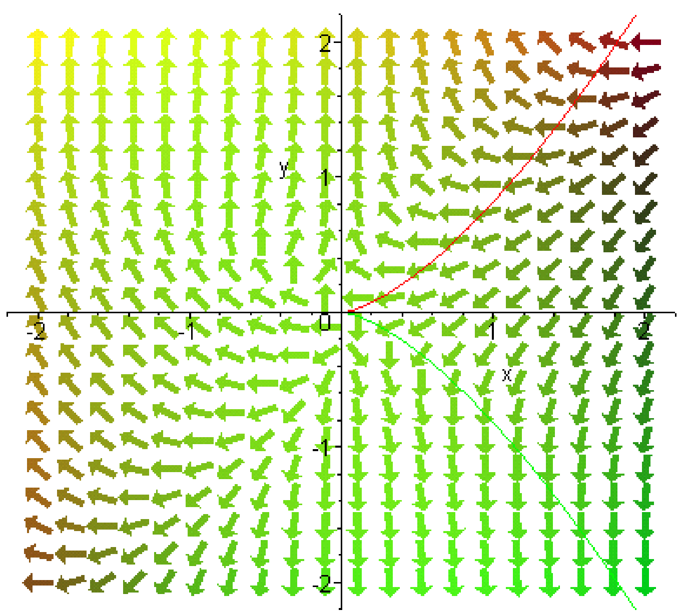


Рис.2.7 Фазовые траектории в области V>0 удаляются от начала координат.

Пример фазового портрета (рис.2.7) существенно нелинейной системы (отсутствует линейное приближение): в начале координат находится кратная особая точка. Фазовые траектории не могут покинуть область $V > 0$, удаляясь от начала координат.

**Завдання для самостійного виконання**

Дослідити стійкість нульового розв'язка на основі методу диференціальних наслідків

1. $\begin{cases} x' = y^3 + x^2 y; \\ y' = x^3 - xy^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -x^3 + y^4; \\ y' = -y^3 + y^4. \end{cases}$