Лаб.4. Вибір КФЛ у матричному вигляді.

Second Order Systems

Consider the system

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=0,\ M^T=M>0,\ C^T=C>0,\ K^T=K>0$$

$$\boxed{E(\dot{x},x)=\tfrac{1}{2}\dot{x}^T M\dot{x}+\tfrac{1}{2}x^T Kx}$$

$$\frac{d}{dt}E(\dot{x},x)=\dot{x}^T M\ddot{x}+x^T K\dot{x}=-\dot{x}^T\left[C\dot{x}+Kx\right]+x^T K\dot{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}E(\dot{x},x)=-\dot{x}^T C\dot{x}}$$

Some interesting generalizations:

1) $C\geq 0$, 2) $C^T\neq C$, 3) $K^T\neq K$

The anti-symmetric terms correspond to 'circulatory' forces (transfer conductances in power systems) – they are non-conservative.

The anti-symmetric terms correspond to 'gyroscope' forces – they are conservative.

Для механічної системи загального вигляду (Walker 1970)

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=0 \qquad (3.13)$$

пропонується шукати квадратичну функцію Ляпунова у вигляді

$$V=x^T Fx+\dot{x}^T G\dot{x}+\dot{x}^T Hx\ , \qquad (3.14)$$

де F, G - симетричні матриці, а матриця Н може мати довільну структуру. Похідна квадратичної функції Ляпунова (14) в силу системи (13) має вигляд

$$\dot{V}=-x^T K^T M^{-1}H\,x-\dot{x}^T\left[2GM^{-1}C-H\right]\dot{x}-\dot{x}^T\left[2F-2GM^{-1}K-C^T M^{-1}H\right]x. \qquad (3.15)$$

Як видно з (15), вибір матриці $F = GM^{-1}K + \frac{1}{2}C^T M^{-1}H$ може значно спростити аналіз знаковизначеності (за умови, що вираз справа є симетричною матрицею), оскільки необхідно вибрати структуру тільки двох матриць *G і H.*

Приклади використання узагальненої квадратичної функції Ляпунова .

Далі розглянемо два приклади, що ілюструють можливості використання узагальненої квадратичної функції Ляпунова виду (3.14).

Приклад 3.1. Гіроскопічна стабілізація нестійкою потенціальної системи

$$\ddot{x}_1 - g\dot{x}_2 - kx_1 = 0; \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{pmatrix};\ K = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix};$$
$$\ddot{x}_2 + g\dot{x}_1 - kx_2 = 0.$$

Виберемо $G = M$ і $H = C$, тоді $K^T M^{-1} H = \begin{pmatrix} 0 & g \cdot k \\ -g \cdot k & 0 \end{pmatrix}$;

$$F = K + \frac{1}{2}C^T M^{-1} C = \begin{pmatrix} -k + g^2/2 & 0 \\ 0 & -k + g^2/2 \end{pmatrix};$$

$$V = x^T F x + \dot{x}^T G \dot{x} + \dot{x}^T H x;\ \dot{V} = 0.$$

Умова додатної визначеності квадратичної функції Ляпунова (3.14): $g^2/4 > k$.

Приклад 3.2. Достатні умови нестійкості механічної системи при наявності потенціальних і неконсервативних позиційних сил

$$\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - e x_2 = 0; \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & -e \\ e & k_2 \end{pmatrix};$$
$$\ddot{x}_2 + e x_1 + k_2 x_2 = 0. \tag{3.16}$$

Виберемо квадратичну функцію Ляпунова $V = \dot{x}^T H x$, де $H = -H^T$, тоді

$$\dot V = -x^T K^T H\, x = -\tfrac{1}{2}\, x^T (K^T H + H^T K)x.$$

Твердження. Якщо існує така кососиметрична матриця *H*, що матриця $K^T H$ має знаковизначену симетричну частину, то нульовий розв'язок системи (3.16) є нестійким.

Наприклад, умова додатної визначеності $K^T H + H^T K \succ 0$ при

$$H = \tfrac{1}{2}(K - K^T): \begin{vmatrix} 2e^2 & e(k_2 - k_1) \\ e(k_2 - k_1) & 2e^2 \end{vmatrix} > 0 \;\Rightarrow\; 2e > k_1 - k_2$$

(прийнято угоду, що $k_1 > k_2$).

Завдання для самостійного виконання

Дослідити стійкість нульового розв’язка при різних значеннях параметрів τ, ε, α (результат пояснити на основі аналізу структури сил)

1. $\begin{cases} x'' = -\tau \cdot x' - 2 \cdot x + \varepsilon \cdot y; \\ y'' = -\tau \cdot y' - \varepsilon \cdot x - 2 \cdot y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'' = -\tau \cdot x' + \alpha \cdot y' + \alpha \cdot y - x; \\ y'' = -\tau \cdot y' - \alpha \cdot x' - \alpha \cdot x - y. \end{cases}$