Л.5. **Оцінка області притягання нелінійної автономної динамічної системи**

Рассмотрим осциллятор с нелинейной восстанавливающей силой

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\,\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)-\Omega^2\,\mathrm{x}(t)^3=0$$

Система имеет три положения равновесия; на рисунке 1.3 представлен фазовый портрет.

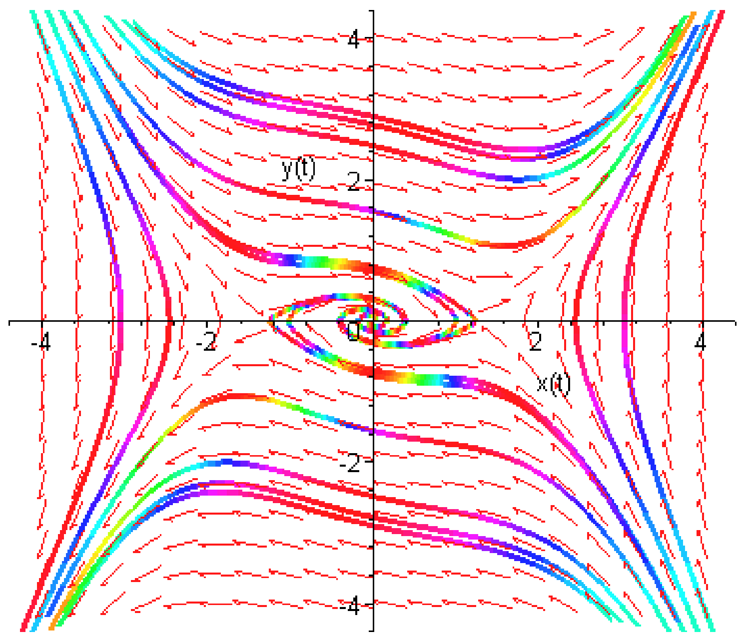

Рис.5.1 Область притяжения начала координат ограничивают устойчивые сепаратрисы пары седловых особых точек.

В начале координат (рис.5.1), как и в предыдущем случае, имеем фокус (иллюстрация структурной устойчивости – нелинейные члены не могут изменить качественную структуру фазового портрета в окрестности начала координат). Однако область притяжения начала координат существенно видоизменилась, ее ограничивают устойчивые сепаратрисы пары седловых особых точек.

Дифференциальное следствие уравнения

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\,\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)+\omega^2\,\mathrm{x}(t)-\Omega^2\,\mathrm{x}(t)^3\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)=0$$

приводит к следующей функции Ляпунова:

$$V1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2 - \frac{1}{4}\Omega^2\,\mathrm{x}(t)^4;$$

ее производная неположительна, следовательно, область положительной определенности функции Ляпунова определяет область притяжения нулевого решения (положения равновесия)

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{x}(t)^2 - \frac{1}{4}\Omega^2\,\mathrm{x}(t)^4\right) = -2\,\gamma\,\mathrm{D}(\mathrm{x}(t)).$$

Замкнутые линии уровня функции Ляпунова целиком принадлежат области притяжения нулевого решения, определяя максимально возможное значение соответствующей константы, получаем оценку области притяжения нелинейного осциллятора (рис.5.2)

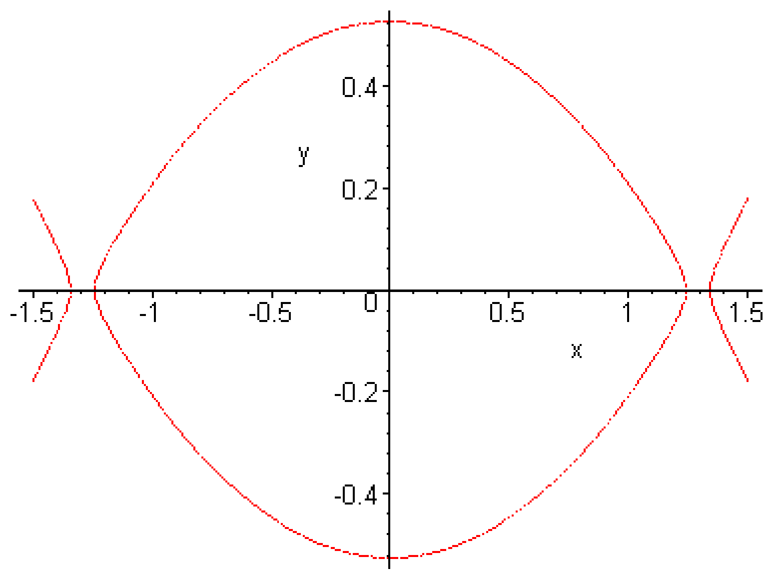

Рис.5.2 Между замкнутой и разомкнутыми линиями уровня функции Ляпунова (на оси абсцисс) находятся седловые особые точки, ограничивающие область притяжения нулевого решения.

Б. Рассмотрим систему

$$\mathrm{Dx}(t) = -\mathrm{y}(t) - \mathrm{x}(t)^3;$$
$$\mathrm{Dy}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)^3.$$

Система имеет единственный стационарный режим в начале координат, которому соответствует точка пересечения двух кубических парабол. Из системы получим дифференциальные следствия, позволяющие сделать вывод об асимптотической устойчивости нулевого решения (стационарного состояния)

$$x(t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)+y(t)+x(t)^3\right)=0$$
$$y(t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}y(t)\right)-x(t)+y(t)^3\right)=0.$$

Из суммы дифференциальных следствий выделим производную от квадратичной формы (функции Ляпунова)

$$D\left(\frac{1}{2}x(t)^2+\frac{1}{2}y(t)^2\right)=-x(t)^4-y(t)^4.$$

Условия асимптотической устойчивости выполняются во всей фазовой плоскости, это свидетельствует о том, что любая возмущенная траектория с течением времени стремится к началу координат (стационарному режиму), т.е. областью притяжения является вся фазовая плоскость.

При отсутствии нелинейных членов производная функции Ляпунова равнялась бы нулю, следовательно, система линейного приближения лишь устойчива (случай чисто мнимых корней). Как уже отмечалось это критический случай пары чисто мнимых корней. В данном случае нелинейные члены привели к асимптотической устойчивости нулевого решения (область притяжения вся фазовая плоскость). На рисунке 5.3 представлен фазовый портрет системы, все траектории с течением времени стягиваются к началу координат. Соответствующая стационарному режиму особая точка является устойчивым фокусом (заметим, что собственные значения ситстемы линейного приближения чисто мнимые, что соответствовало бы особой точке центр).

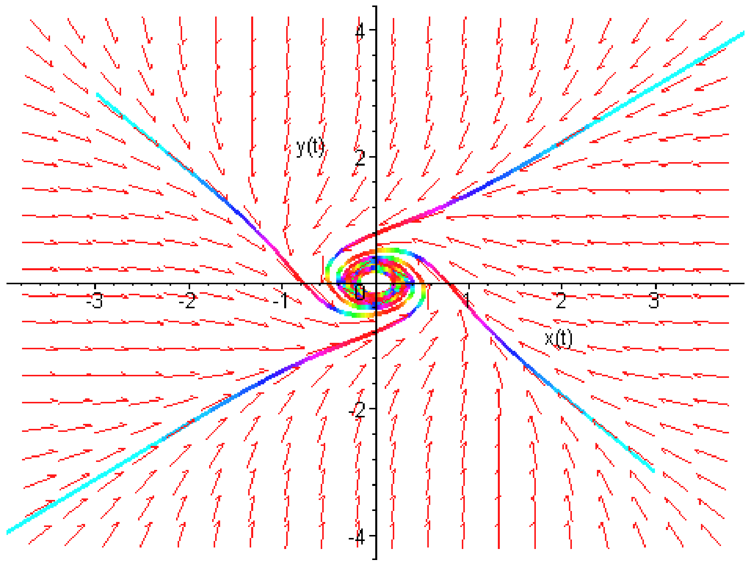

Рис.5.3 Нелинейные члены влияют на структуру фазового портрета в окрестности начала координат.

Пусть дифференциальное неравенство

$$\dot{V}(x) \le \chi V(x) + \sum_i \frac{\mu_i |\nu_i|}{\lambda^2} V^2(x),$$

которое справедливо в сфере R, принадлежащей области допустимых значений переменных x. Соответствующее дифференциальному неравенству уравнение сравнения

$$\dot{u} = \chi u + \beta u^2 \text{ , где } \chi < 0,\ \beta > 0,$$

имеет решение $u(t) = \left(-\dfrac{\beta}{\chi} + c_1 e^{-\chi t} \right)^{-1}$.

Из условия $u(t) \ge 0$ при $t \ge 0$ получаем $c_1 \ge \delta > 0$. Для начальных значений из области $0 < u(0) < -\dfrac{\chi}{\beta}$ решение $u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для КФЛ V(x) на сфере радиуса R имеют место оценки

$$\lambda_{\min} \overline{R}^2 \le V\Big|_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \overline{R}^2} \le \lambda_{\max} \overline{R}^2,$$

тогда гарантированная область притяжения задается соотношением

$$\overline{R}^2 \leq \frac{|\chi|}{\beta\lambda_{\min}}.$$

5. Estimate the region of attraction by using Lyapunov function.

Note that a classical problem of Lyapunov theory is the determination of a domain of attraction [8]. The function $V(x) = x^T Px$ can be used to estimate the region of attraction. Suppose $\dot{V}(x) < 0$, $0 < \|x\| < r$. Letting $c = \min_{\|x\|=r} x^T Px = \lambda_{\min}(P)r^2$ we obtain $\{x^T Px < c\} \subset \{\|x\| < r\}$. This means that all trajectories beginning in the set $\{x^T Px < c\}$ approach the origin as $t \to \infty$. Hence, the set $\{x^T Px < c\}$ is a subset of the region of attraction.

Example 4 Consider the autonomous pendulum with friction

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned} \tag{21}$$

where $a,\ b > 0$. The Jacobian matrix A at the equilibrium point $x = 0$ is given by:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Then the eigenvalues of A are $(-1 \pm j\sqrt{3})/2$. Hence, the origin is asymptotically stable. Taking $Q = I$ the Lyapunov equation becomes

$$PA + A^T P = -I \tag{23}$$

Solving (23) we obtain

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

and $\lambda_{\min}(P) = 0.691$. Thus, the system (17) has a candidate Lyapunov function

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T Px \\ &= 1.5x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned} \tag{25}$$

We obtain the derivative of $V(x)$ as

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (3x_1 - x_2)(-x_2) + (-x_1 + 2x_2)[(x_1 + (x_1^2 - 1)x_2)] \\ &= -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2) \\ &\leq -\|x\|^2 + |x_1||x_1x_2||x_1 - 2x_2| \\ &\leq -\|x\|^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\|x\|^4 \end{aligned} \tag{26}$$

where $|x_1| \leq \|x_1\|$, $|x_1x_2| \leq \frac{1}{2}\|x\|^2$, $|x_1 - 2x_2| \leq \sqrt{5}\|x\|$. Thus, we obtain

$$\dot{V}(x) < 0, \quad 0 < \|x\|^2 < \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Obviously, taking $c = \lambda_{\min}(P)r^2 = 0.619 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.618$, $\{V(x) < c\}$ is an estimate of the region of attraction.

Comments 3 If $A(x)$ has one eigenvalue in the right hand side of the complex plane, thereby implying that the equilibrium point is unstable. Furthermore, if $A(x)$ has all of its eigenvalues in the left hand side of the complex plane with one or more eigenvalues on the $j\omega$-axis, we cannot use Lyapunov indirect method to say anything about stability. Therefore, this tool has some limitation when applied to linear systems.