Л.10. **Аналіз умов стійкості системи корабель-автостерно (стабілізація курсу пароплава)**

```
> restart:
> PP:=(-h*Phi-kk*psi)/J;
```

$$PP := \frac{-h\,\Phi - kk\,\psi}{J}$$

```
> Psi1:=(-psi+alpha*xi+beta*(phi-xi)/tau)/T;
```

$$\Psi 1 := \frac{-\psi + \alpha\,\xi + \frac{\beta\,(\phi - \xi)}{\tau}}{T}$$

```
> Xi:=(phi-xi)/tau;
```

$$\Xi := \frac{\phi - \xi}{\tau}$$

```
> with(linalg,jacobian):
```

(формування матриці системи лінійного наближення)

```
>
Joo:=subs(jacobian([Phi,PP,Psi1,Xi],[phi,Phi,psi,xi]));
```

$$Joo := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{J} & -\frac{kk}{J} & 0 \\ \frac{\beta}{\tau\,T} & 0 & -\frac{1}{T} & \frac{\alpha - \frac{\beta}{\tau}}{T} \\ \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

(визначення характеристичного рівняння)

```
> chp:=linalg[charpoly](Joo,lambda);
```

$$chp := \frac{1}{\tau\,T\,J}\left(\lambda^4\,\tau\,J\,T + \lambda^3\,J\,T + \lambda^3\,\tau\,J + \lambda^2\,J + \lambda^3\,\tau\,h\,T + h\,\lambda^2\,T + \lambda^2\,\tau\,h + h\,\lambda + \beta\,kk\,\lambda + kk\,\alpha\right)$$

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been
redefined and unprotected
```

```
> N:=4;
```

$$N := 4$$

(коефіцієнти характеристичного рівняння)

```
> for i from 0 to N  do AA[N-i]:=coeff(chp,lambda,i)
od;
```

$$AA_4 := \frac{kk\ \alpha}{\tau\, T\, J}$$

$$AA_3 := \frac{h + \beta\, kk}{\tau\, T\, J}$$

$$AA_2 := \frac{J + h\, T + \tau\, h}{\tau\, T\, J}$$

$$AA_1 := \frac{J\, T + \tau\, J + \tau\, h\, T}{\tau\, T\, J}$$

$$AA_0 := 1$$

```
> #AA:=array(0..N);
> BK:=array(1..N,1..N);
```

$$BK := array(1..4, 1..4, [\,])$$

```
> for k from 1 to N do for j from 1 to N do if  2*k-
j>=0 and 2*k-j<=N then  BK[k,j]:=AA[2*k-j] else
BK[k,j]:= 0 fi; od: od:
```

(формування матриці Гурвіца)

```
> eval(BK):
```

(умови стійкості Рауса-Гурвіца : DG[i]>0, i=1,...,n)

```
> for k from 1 to N do M:=
submatrix(BK,1..k,1..k):DG[k]:=det(M): od;
```

$$M := \begin{bmatrix} \dfrac{J\, T + \tau\, J + \tau\, h\, T}{\tau\, T\, J} \end{bmatrix}$$

$$DG_1 := \frac{J\, T + \tau\, J + \tau\, h\, T}{\tau\, T\, J}$$

$$M := \begin{bmatrix} \dfrac{J\, T + \tau\, J + \tau\, h\, T}{\tau\, T\, J} & 1 \\ \dfrac{h + \beta\, kk}{\tau\, T\, J} & \dfrac{J + h\, T + \tau\, h}{\tau\, T\, J} \end{bmatrix}$$

$$DG_2 := -\frac{1}{\tau^2\, T^2\, J^2} \big(-J^2\, T - J\, T^2\, h - 2\, J\, T\, \tau\, h - \tau\, J^2 - \tau^2\, J\, h - \tau\, h^2\, T^2 - \tau^2\, h^2\, T + J\, T\, \tau\, \beta\, kk \big)$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{J\,T+\tau\,J+\tau\,h\,T}{\tau\,T\,J} & 1 & 0 \\ \frac{h+\beta\,kk}{\tau\,T\,J} & \frac{J+h\,T+\tau\,h}{\tau\,T\,J} & \frac{J\,T+\tau\,J+\tau\,h\,T}{\tau\,T\,J} \\ 0 & \frac{kk\,\alpha}{\tau\,T\,J} & \frac{h+\beta\,kk}{\tau\,T\,J} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} DG_3 := -\frac{1}{\tau^3\,T^3\,J^3}\big(&-\tau\,J^2\,h - J\,T^2\,h\,\beta\,kk - J\,T\,\tau\,h\,\beta\,kk \\ &+ 2\,J^2\,T\,kk\,\alpha\,\tau + 2\,J\,T^2\,kk\,\alpha\,\tau\,h - \tau^2\,J\,h\,\beta\,kk - J^2\,T\,\beta\,kk \\ &- 2\,J\,T\,\tau\,h^2 + J^2\,T^2\,kk\,\alpha - \tau\,J^2\,\beta\,kk + \tau^2\,J^2\,kk\,\alpha \\ &+ 2\,\tau^2\,J\,kk\,\alpha\,h\,T - \tau\,h^2\,T^2\,\beta\,kk - \tau^2\,h^2\,T\,\beta\,kk \\ &+ \tau^2\,h^2\,T^2\,kk\,\alpha - \tau^2\,J\,h^2 - \tau^2\,h^3\,T - J\,T^2\,h^2 - J^2\,T\,h \\ &- \tau\,h^3\,T^2 + J\,T\,\tau\,\beta^2\,kk^2\big) \end{aligned}$$

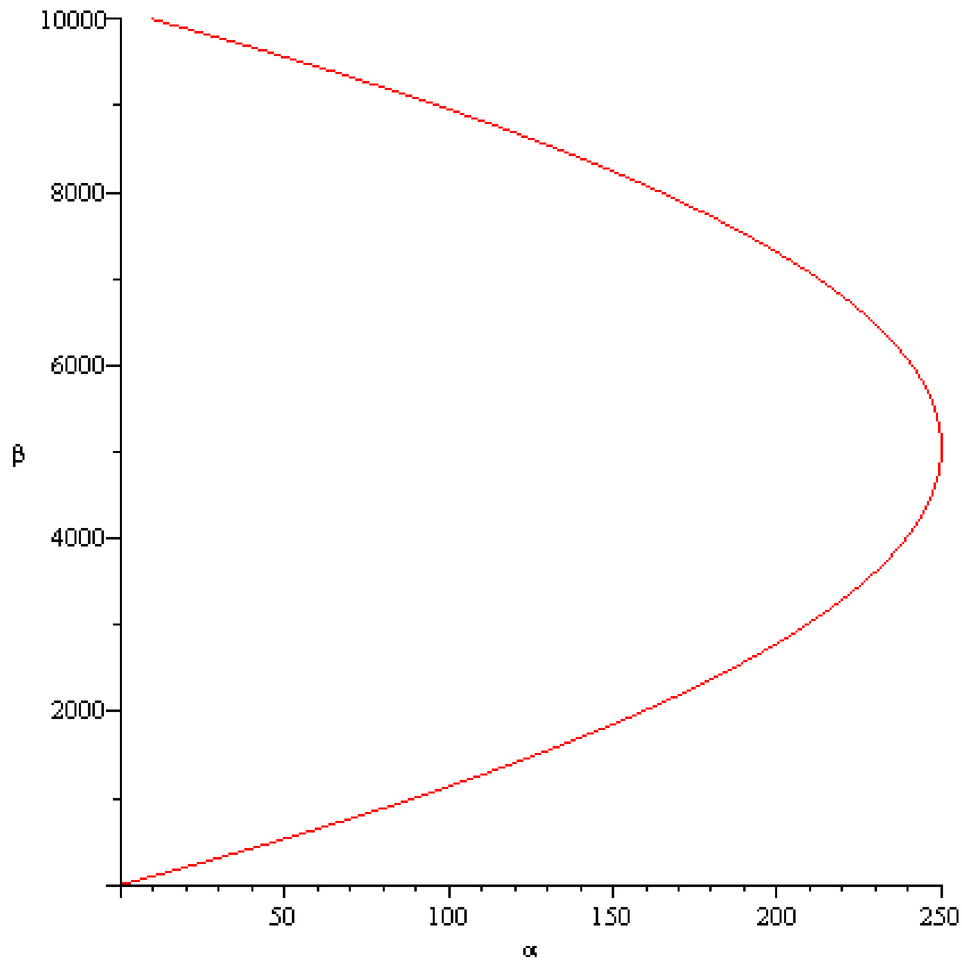
$$\begin{aligned} M := \Bigg[&\left[\frac{J\,T+\tau\,J+\tau\,h\,T}{\tau\,T\,J}, 1, 0, 0\right], \\ &\left[\frac{h+\beta\,kk}{\tau\,T\,J}, \frac{J+h\,T+\tau\,h}{\tau\,T\,J}, \frac{J\,T+\tau\,J+\tau\,h\,T}{\tau\,T\,J}, 1\right], \\ &\left[0, \frac{kk\,\alpha}{\tau\,T\,J}, \frac{h+\beta\,kk}{\tau\,T\,J}, \frac{J+h\,T+\tau\,h}{\tau\,T\,J}\right], \\ &\left[0, 0, 0, \frac{kk\,\alpha}{\tau\,T\,J}\right]\Bigg] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DG_4 := -\frac{1}{\tau^4\,T^4\,J^4}\big(kk\,\alpha\,\big(&-\tau\,J^2\,h - J\,T^2\,h\,\beta\,kk - J\,T\,\tau\,h\,\beta\,kk \\ &+ 2\,J^2\,T\,kk\,\alpha\,\tau + 2\,J\,T^2\,kk\,\alpha\,\tau\,h - \tau^2\,J\,h\,\beta\,kk - J^2\,T\,\beta\,kk \\ &- 2\,J\,T\,\tau\,h^2 + J^2\,T^2\,kk\,\alpha - \tau\,J^2\,\beta\,kk + \tau^2\,J^2\,kk\,\alpha \\ &+ 2\,\tau^2\,J\,kk\,\alpha\,h\,T - \tau\,h^2\,T^2\,\beta\,kk - \tau^2\,h^2\,T\,\beta\,kk \\ &+ \tau^2\,h^2\,T^2\,kk\,\alpha - \tau^2\,J\,h^2 - \tau^2\,h^3\,T - J\,T^2\,h^2 - J^2\,T\,h \\ &- \tau\,h^3\,T^2 + J\,T\,\tau\,\beta^2\,kk^2\big)\big) \end{aligned}$$

```
>
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Чисельна побудова області стійкості в площині параметрів (alpha, beta):

```
> implicitplot(subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1},{DG[2]>0,DG[3]>0}),alpha=0..250,beta=0..10000,grid=[200,200]);
```




```
> subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1,alpha=0.1,beta=1.5},{DG[2],DG[3]});
```

$$\{10.09851020, 0.004947774949\}$$

результат останньої підстановки вказує, що область стійкості в просторі параметрів (alpha, beta) охоплюється параболою.

```
>
```

Аналіз умов стійкості системи корабель-автостерно (DG[2]>0, DG[3]>0) в аналітичному вигляді:

```
> collect(numer(DG[3]),{alpha,beta});
```

$$\left(-\tau^2 J^2 kk - J^2 T^2 kk - 2 J T^2 kk\,\tau h - \tau^2 h^2 T^2 kk - 2\tau^2 J kk\,h T - 2 J^2 T kk\,\tau\right)\alpha - J T \tau \beta^2 kk^2 + \left(\tau^2 J h kk + J T \tau h kk + \tau h^2 T^2 kk + \tau J^2 kk + J^2 T kk + \tau^2 h^2 T kk + J T^2 h kk\right)\beta + \tau J^2 h + \tau h^3 T^2 + J^2 T h + \tau^2 h^3 T + J T^2 h^2 + 2 J T \tau h^2 + \tau^2 J h^2$$

Визначник Гурвіца *DG[3]*є квадратичною функціїю парметра *beta*; *DG[3]*>0 при *beta1*< *beta*< *beta2*, де *betai* дійсні корені рівняння *DG[3]*=0 (маємо від"ємний коефіцієнт при старшому члені).
Знайдемо корені рівняння *DG[3]*=0

```
> BET3:=solve(%=0,beta):
> BET3[1];
```

$$\frac{1}{2 J T \tau kk}\Big(\tau J^2 + J T^2 h + J T \tau h + \tau h^2 T^2 + \tau^2 h^2 T + \tau^2 J h + J^2 T + \big(J^4 T^2 + \tau^2 J^4 - 8 J^2 T^3 \tau^2 kk\,\alpha h - 4 J^3 T^3 \tau kk\,\alpha - 4 J^3 T \tau^3 kk\,\alpha - 8 J^2 T^2 \tau^3 kk\,\alpha h + 8 \tau J^3 T^2 h - 4 J T^3 \tau^3 h^2 kk\,\alpha - 8 J^3 T^2 \tau^2 kk\,\alpha + \tau^4 h^4 T^2 + 2\tau^3 h^4 T^3 + \tau^2 h^4 T^4 + 2 J^3 T^3 h + J^2 T^4 h^2 + 2\tau J^4 T + 2\tau^3 J^3 h + \tau^4 J^2 h^2 + 8 J T^3 h^3 \tau^2 + 2 J T^4 h^3 \tau + 8 J^2 T^3 h^2 \tau + 8\tau^3 J^2 h^2 T + 15\tau^2 J^2 h^2 T^2 + 8\tau^2 J^3 T h + 2\tau^4 h^3 T J + 8 J T^2 \tau^3 h^3\big)^{1/2}\Big)$$

```
> POL:=DG[3];
```

$$POL := -\frac{1}{\tau^3 T^3 J^3}\left(-\tau J^2 h - J T^2 h \beta kk - J T \tau h \beta kk + 2 J^2 T kk\,\alpha\tau + 2 J T^2 kk\,\alpha\tau h - \tau^2 J h \beta kk - J^2 T \beta kk - 2 J T \tau h^2 + J^2 T^2 kk\,\alpha - \tau J^2 \beta kk + \tau^2 J^2 kk\,\alpha + 2\tau^2 J kk\,\alpha h T - \tau h^2 T^2 \beta kk - \tau^2 h^2 T \beta kk + \tau^2 h^2 T^2 kk\,\alpha - \tau^2 J h^2 - \tau^2 h^3 T - J T^2 h^2 - J^2 T h - \tau h^3 T^2 + J T \tau \beta^2 kk^2\right)$$

```
> DISQ[al]:=discrim(POL,beta);
```

$$DISQ_{al} := -\frac{1}{J^6\,T^6\,\tau^6}\Big(kk^2\,\big(-J^4\,T^2-\tau^2\,J^4+8\,J^2\,T^3\,\tau^2\,kk\,\alpha\,h+4\,J^3\,T^3\,\tau\,kk\,\alpha+4\,J^3\,T\,\tau^3\,kk\,\alpha+8\,J^2\,T^2\,\tau^3\,kk\,\alpha\,h-8\,\tau\,J^3\,T^2\,h+4\,J\,T^3\,\tau^3\,h^2\,kk\,\alpha+8\,J^3\,T^2\,\tau^2\,kk\,\alpha-\tau^4\,h^4\,T^2-2\,\tau^3\,h^4\,T^3-\tau^2\,h^4\,T^4-2\,J^3\,T^3\,h-J^2\,T^4\,h^2-2\,\tau\,J^4\,T-2\,\tau^3\,J^3\,h-\tau^4\,J^2\,h^2-8\,J\,T^3\,h^3\,\tau^2-2\,J\,T^4\,h^3\,\tau-8\,J^2\,T^3\,h^2\,\tau-8\,\tau^3\,J^2\,h^2\,T-15\,\tau^2\,J^2\,h^2\,T^2-8\,\tau^2\,J^3\,T\,h-2\,\tau^4\,h^3\,T\,J-8\,J\,T^2\,\tau^3\,h^3\big)\Big)$$

дискримінант є лінійною функцією параметра *alpha:*

```
>
```

Необхідною умовою *DG[3]*>0 є додатність дискримінанта *DISQ[al]*

```
> Al:=solve(DISQ[al]=0,alpha);
```

$$Al := \frac{J^2+2\,J\,h\,T+2\,J\,\tau\,h+T^2\,h^2+2\,T\,\tau\,h^2+\tau^2\,h^2}{4\,J\,T\,\tau\,kk}$$

а необхідна умова стійкості системи корабель - автостерно (*DG[3]*>0) має вигляд $0 < alpha < Al$.

```
> A1:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1},Al);
```

$$A1 := 250.000505($$

Визначник Гурвіца *DG[2]*є лінійною функціїю парметра *beta*; *DG[2]*>0 при $0 < beta < BET2$, де *BET2* розв"язок рівняння *DG[2]*=0.

```
> BET2:=solve(DG[2]=0,beta);
```

$$BET2 := \frac{J^2\,T+\tau\,h^2\,T^2+2\,J\,T\,\tau\,h+\tau^2\,h^2\,T+J\,T^2\,h+\tau^2\,J\,h+\tau\,J^2}{\tau\,T\,J\,kk}$$

```
>
> BET2:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1},BET2);
```

$$BET2 := 10100.0102($$

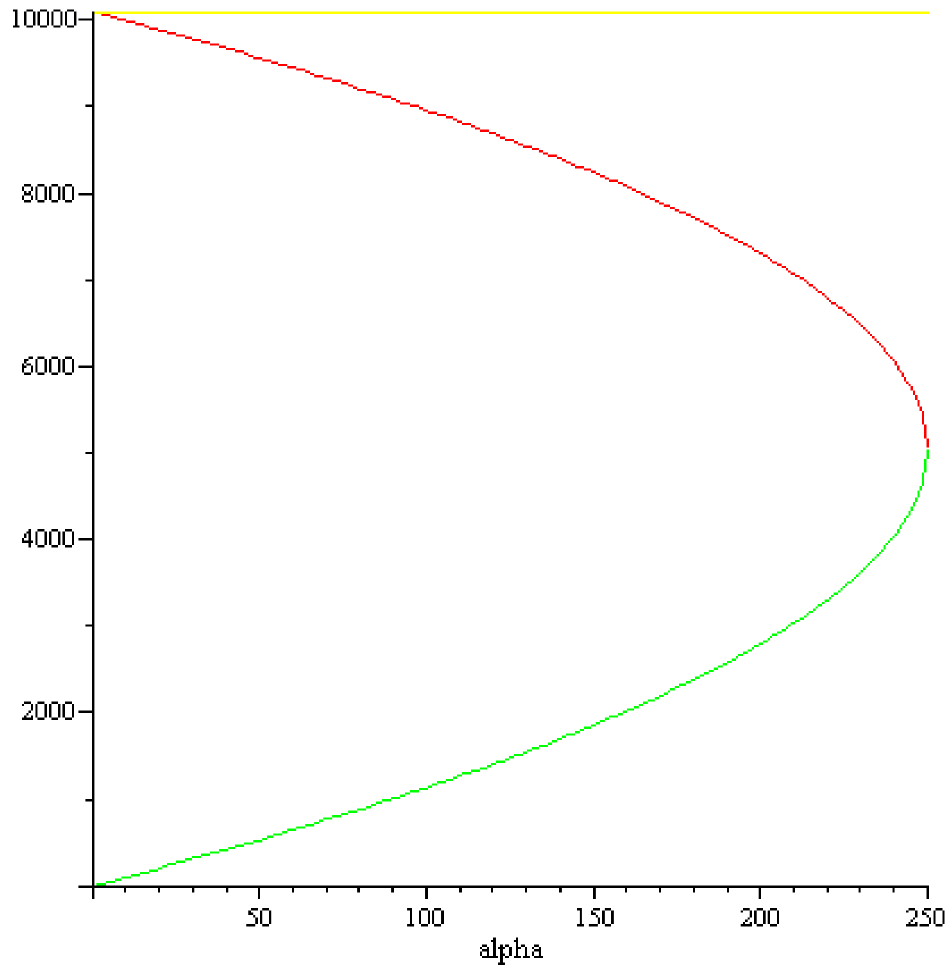
```
> bet1[alpha]:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1,alpha=250},BET3[1]);
```

$$bet1_{\alpha} := 5057.18245($$

```
> bet2[alpha]:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1,alpha=250},BET3[2]);
```

$bet2_{\alpha} := 5042.82765$

```
> plot(subs({J=1000,h=10E-
5,kk=1,T=10,tau=0.1},{BET2,BET3}),alpha=0..250);
```



BET2=BET3[1](alpha=0), тому необхідною і достатньою умовою стійкості системи є { 0 < *alpha* < *Al*, *beta1*< *beta*< *beta2*} - область обмежена параболою і віссю ординат.

```
>
```

Чисельне інтегрування системи диф. рівнянь руху корабля з автостерном

```
> restart:
> with(plots):
> with(plottools):
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> J:=1000;h:=10E-5;k:=1;T:=10;tau:=0.1;alpha:=0;beta:=20;
```

$$J := 1000$$

$$h := 0.00010$$

$$k := 1$$

$$T := 10$$

$$\tau := 0.1$$

$$\alpha := 0$$

$$\beta := 20$$

```
> F:=dsolve({diff(phi(t),t)=(Phi)(t),diff(Phi(t),t)=(-h*Phi(t)-k*psi(t))/J,diff(psi(t),t)=(-psi(t)+alpha*xi(t)+beta*(phi(t)-xi(t))/tau)/T,diff(xi(t),t)=(phi(t)-xi(t))/tau,phi(0)=0.5,Phi(0)=0.,psi(0)=0.0,xi(0)=0.},[phi(t),Phi(t),psi(t),xi(t)],numeric,abserr=0.1e-8,output=listprocedure);
```

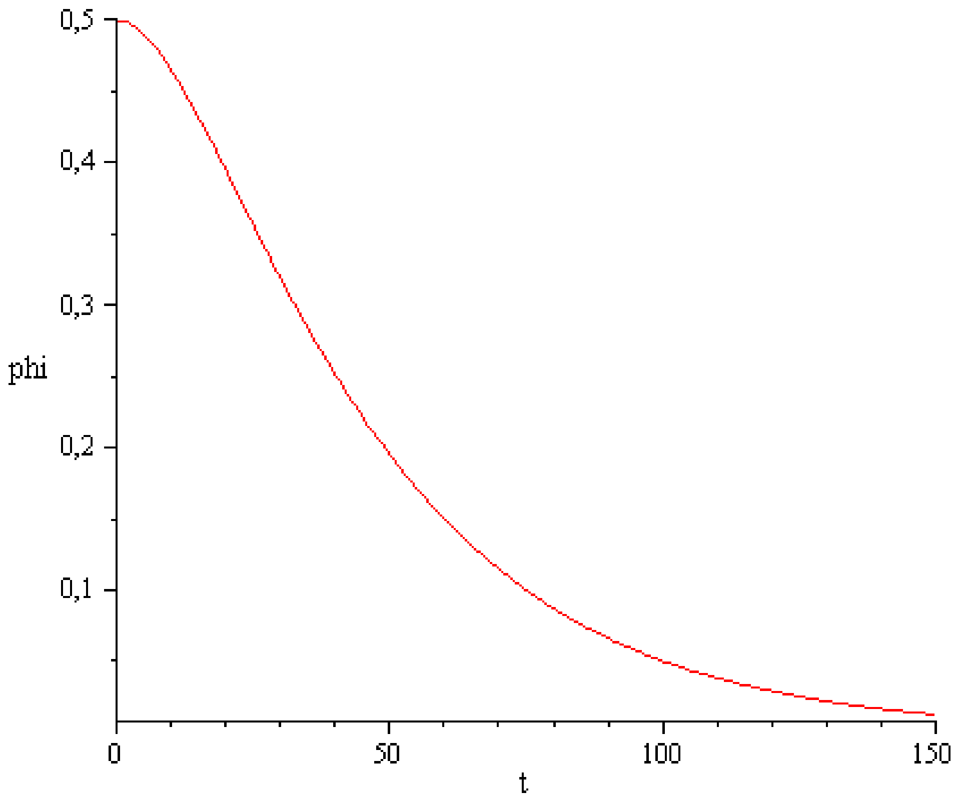
$F := [t = \textbf{proc}(t) \ \ldots \ \textbf{end proc}, \phi(t) = \textbf{proc}(t) \ \ldots \ \textbf{end proc}, \Phi(t) =$

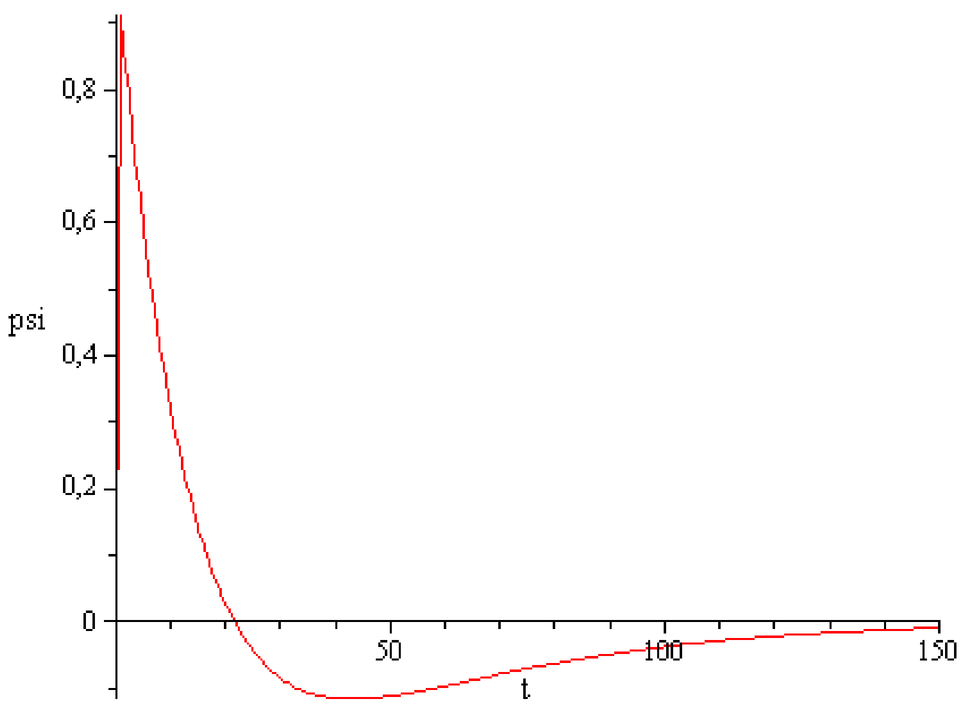
$\textbf{proc}(t)$

$\ldots$

$\textbf{end proc}, \psi(t) = \textbf{proc}(t) \ \ldots \ \textbf{end proc}, \xi(t) = \textbf{proc}(t) \ \ldots \ \textbf{end proc}]$

```
> odeplot(F,[t,phi(t)],0..150,numpoints=150);odeplot(F,[t,psi(t)],0..150,numpoints=150);
```





Курсовий кут та кут стерна як функфії часу на основі чисельного інтегрування

>

Анімація коливань корабля

```
> N:=500;
```

$$N := 500$$

```
> line1:=proc(x,z,x1,z1) curve([[x,z],
[x1,z1]],color=gray,thcikness=5)end proc:
> for i from 1 to N do
q||i:=display(line1(0,0,10,10*rhs(F[2](1*i)))):end do:
>
display([seq(q||i,i=1..N)],insequence=true,scaling=cons
trained);
```