

Проект I для самостійного дослідження «Стійкість дзиги»

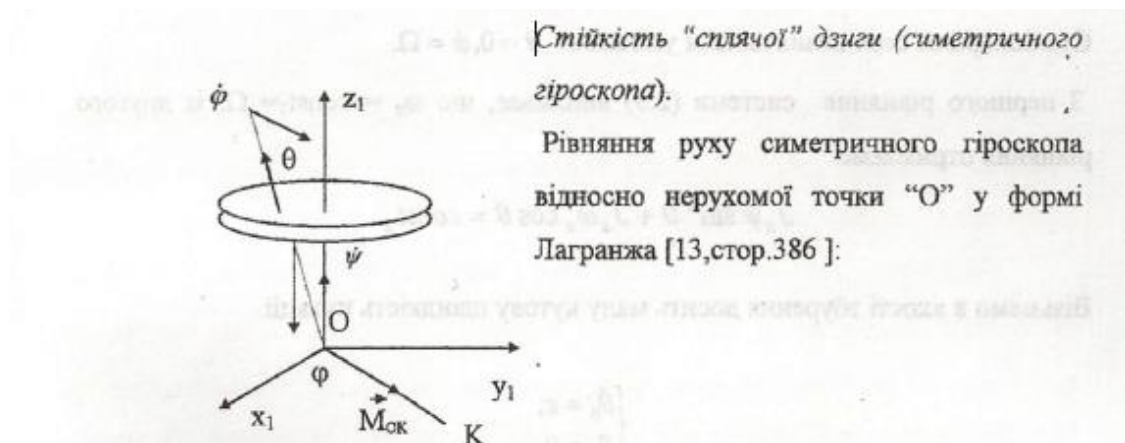


Рис.І.1

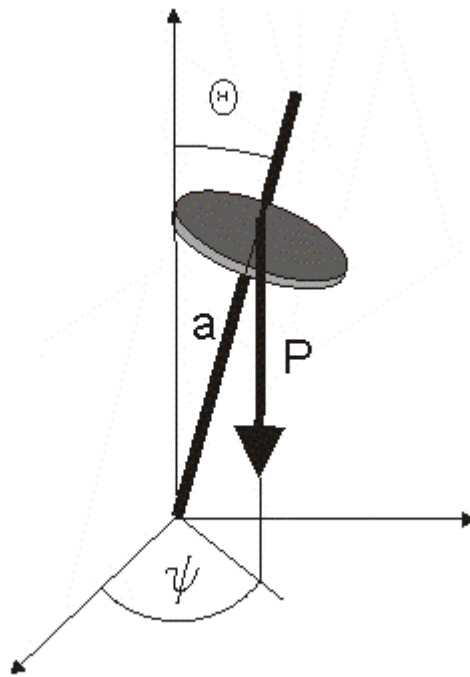


Рис. І.2

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z,$$

$$\frac{d}{dt}(J_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_z \omega_z \cos \theta) = M_{z1},$$

$$J_x \ddot{\theta} - J_x \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \omega_z \dot{\psi} \sin \theta = M_{OK},$$

где

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta, \quad J_x = J_y, \quad M_z = M_{z1} = 0; \quad M_{OK} = Pa \sin \theta.$$

Всем известно одно из удивительных свойств волчка сохранять вертикальное положение равновесия при достаточно большой угловой скорости собственного вращения (эффект гироскопической стабилизации). При отклонении оси волчка от вертикальной оси Oz1 (при «попытке падения») возникает момент силы тяжести $M_{OK} = Pa \sin \theta$, направленный вдоль линии узлов, а вследствие теоремы Резаля, конец вектора кинетического момента и сама ось симметрии будут двигаться в направлении линии узлов. Таким образом, «падение» заменяется прецессией вокруг оси Oz1 с угловой скоростью прецессии $\dot{\psi}$. Определим условия, при которых угол отклонения волчка от вертикальной оси θ (угол нутации) остается все время малым, т.е. условия устойчивости вертикального положения.

Исследуемый стационарный режим задается соотношениями $\theta = 0, \dot{\phi} = \Omega$. Из первого уравнения системы уравнений движения следует, что $\omega_z = const_1 = \Omega$, из второго уравнения получаем второй интеграл $J_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_z \omega_z \cos \theta = const_2$. В качестве возмущения фазовых переменных, определяющих стационарный режим, возьмем достаточно малую скорость нутации

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = \varepsilon; \\ \theta_0 = 0, \end{cases}$$

тогда последний интеграл можно записать в виде ($J_z \omega_z = const_2$)

$$J_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_z \omega_z (\cos \theta - 1) = 0.$$

Из него с точностью до величин второго порядка получим значение скорости прецессии ($\sin \theta \approx \theta; \cos \theta \approx 1 - \theta^2 / 2$)

$$\dot{\psi} = \frac{J_z \Omega}{2J_x}.$$

Подставим это значение в третье уравнение системы и линеаризуем его по переменной θ

$$J_x \ddot{\theta} = \left(Pa - \frac{(J_z \Omega)^2}{2J_x} + \frac{(J_z \Omega)^2}{4J_x} \right) \theta.$$

Тогда достаточное условие устойчивости относительно переменных $\theta, \dot{\theta}$ определяется неравенством (выражение в скобках должно быть отрицательным)

$$\Omega^2 > \frac{4J_x Pa}{J_z^2}.$$

Действительно, в этом случае будем иметь положительно определенную квадратичную функцию Ляпунова

$V = \frac{1}{2} \left[J_x \dot{\theta}^2 + \left(\frac{(J_z \Omega)^2}{4J_x} - Pa \right) \theta^2 \right]$, производная которой равна нулю (выполнены условия теоремы Ляпунова о устойчивости).

Проект II для самостійного дослідження «Аналіз стійкості руху колісної пари на основі методу функцій Ляпунова»

Динаміка колісної пари, незважаючи на солідний вік предмету дослідження, продовжує привертати до себе увагу численних дослідників. Причина такого інтересу зрозуміла - поява нових типів швидкісного залізничного транспорту і питання забезпечення безпеки руху.

Вступ. Наявність конічності поверхні кочення коліс колісної пари є найбільш істотним фактором (елементом) її конструкції і основною причиною її своєрідного динамічного поведінки. Введення конічності в

конструкцію колісної пари - один з інтуїтивно зрозумілих способів пасивного центрування (стабілізації) прямолінійного руху колісної пари з циліндричним профілем кочення, яка «байдужа» до можливих змін напрямку руху - виникнення кутів рискання.

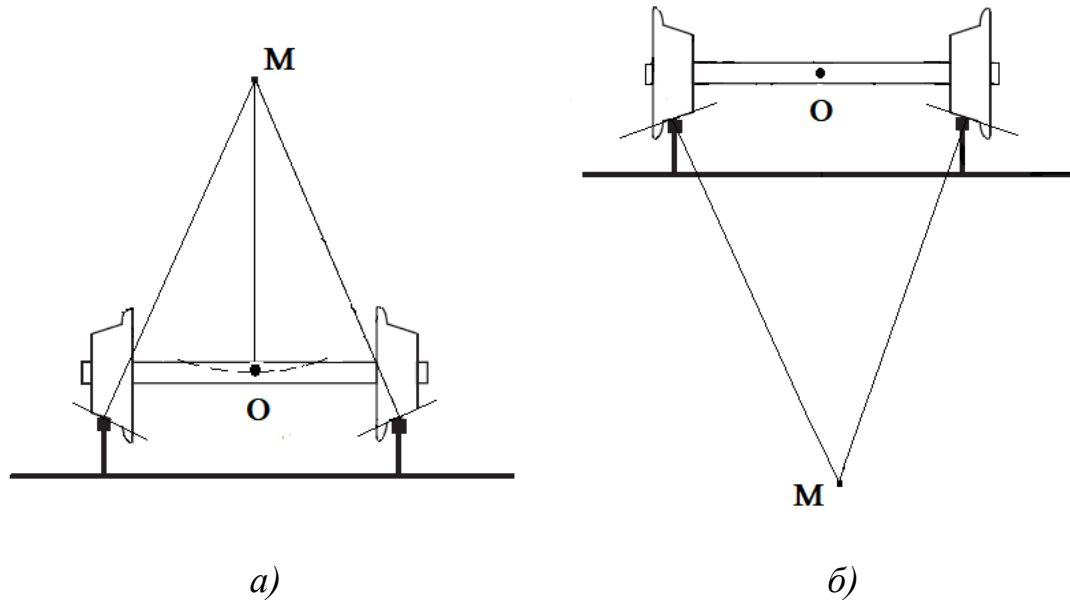


Рис. П.1. Ілюстрація впливу ефекту конічності *a)* - сприятлива з точки зору центрування; *б)* - призводить до «сповзання» з найвищого можливого положення центру мас.

На рис. П.1, а) проілюстрований позитивний ефект пасивної стабілізації колісної пари при введенні елемента конічності. У цьому випадку центр мас колісної пари в незбуреному положенні (при відсутності бокового зміщення) займає найнижче з усіх можливих положень, так як досить малі поперечні відхилення від нейтрального положення реалізуються за рахунок обертання відносно миттєвого центру швидкостей M у вертикальній поперечній площині. Для випадку представленому на рис. П.1, б) - ефект протилежний - в незбуреному положенні центр мас колісної пари знаходиться в найвищому положенні, що призводить до «сповзання».

Відзначимо, що аналіз динамічної стійкості колісної пари набагато складніший.

П.1. Кінематичні коливання вільної колісної пари. Перейдемо до аналізу кінематичних коливань колісної пари на прямолінійних ділянках шляху.

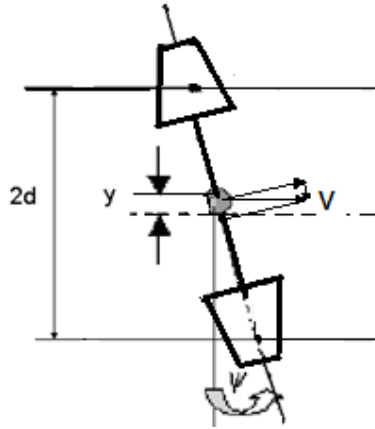


Рис. П.2 Положення моделі визначається двома фазовими координатами: y – поперечним відхиленням центру інерції колісної пари відносно осьової лінії шляху і ψ – кутом виляння.

Якщо припустити, що прослизання в точках контакту колісної пари з рейковими нитками відсутнє, то це призводить до співвідношень, які називаються рівняннями кінематичних коливань

$$\dot{y} = V\psi; \quad \dot{\psi} = -\frac{V\gamma}{dr_0} y. \quad (\text{П.1})$$

Перше рівняння вказує на відсутність поперечного прослизання – сумарне прослизання породжується швидкістю \dot{y} і поперечною складовою швидкості поздовжнього руху $-V\psi$ (рис. П.2). Друге рівняння вказує на відсутність прослизання в поздовжньому напрямку. Дійсно, при наявності поперечного зсуву y на лівому схилі, радіус кочення збільшиться на величину $\Delta r = \gamma \cdot y$, а величина лінійної поздовжньої швидкості на величину $\Delta r \cdot \Omega = \gamma \cdot y \cdot V / r_0$, тоді кутова швидкість рискання визначається другим рівнянням системи (П.1). Відхилення змінних y, ψ в цьому випадку задовольняють співвідношенню (П.2). Останнє виходить як диференціальний наслідок системи (П.1): складемо лінійну комбінацію відповідних частин системи (П.1) (множник першого рівняння $\frac{\gamma}{dr_0} \cdot y$, другого – ψ). Ліва частина

отриманого виразу є похідною за часом від виразу (3.2) – інтегралу руху

$$\frac{\gamma}{d \cdot r_0} y^2 + \psi^2 = const. \quad (\text{II.2})$$

II.2. *Аналіз стійкості прямолінійного руху колісної пари при наявності пружних елементів в буксовими підвісі*

Передбачається, що напрямна рама виконує прямолінійний рух з постійною швидкістю. Проведемо аналіз стійкості прямолінійного руху колісної пари (модель крипу по Картеру) на основі динамічних рівнянь руху.

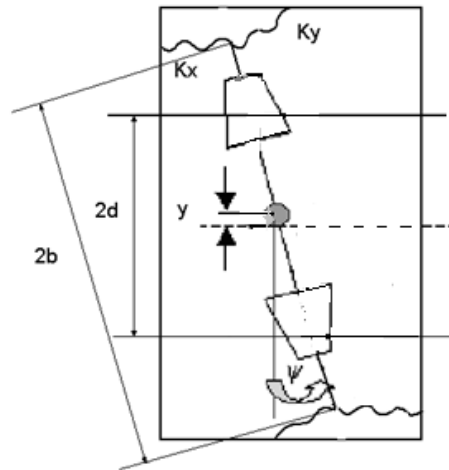


Рис. II.3 Інерційна система відліку (жорстко пов'язана з рамою) рухається з постійною швидкістю вздовж прямої, що збігається з віссю колії.

У разі обліку лише лінійного крипу рівняння збуреного руху мають такий вигляд

$$m\ddot{y} + 2k_y y + 2k_1 \left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi \right) = 0; \quad (\text{II.3})$$

$$J\ddot{\psi} + 2k_x b^2 \psi + 2k_1 d^2 \left(\frac{\dot{\psi}}{V} + \frac{\gamma \cdot y}{dr_0} \right) = 0.$$

Коефіцієнти жорсткості k_x , k_y пружних елементів виберемо так, щоб підсистеми, що відповідають фазовим змінним y і ψ , мали однакові власні частоти

$$\frac{2k_y}{m} = \frac{2k_x b^2}{J} = \tau.$$

Незбурених руху колісної пари відповідають нульові значення фазових змінних $y = 0$, $\psi = 0$.

Представимо рівняння збуреного руху колісної пари відносно нових змінних p , q - прослизань в поперечному і поздовжньому напрямках, враховуючи нелінійний характер сил крипу

$$\begin{cases} \dot{y} = p + V\psi, \\ \dot{p} = \left(\frac{V^2\gamma}{dr_0} - \tau \right) y - \frac{V}{d} q - 2 \frac{k_1 p}{mV \sqrt{1 + (k_1 \varepsilon / k_f P)^2}}, \\ \dot{\psi} = -\frac{V\gamma}{dr_0} y + \frac{1}{d} q, \\ \dot{q} = \frac{V\gamma}{r_0} p + \left(\frac{V^2\gamma}{r_0} - \tau \cdot d \right) \psi - 2 \frac{k_1 d^2 q}{JV \sqrt{1 + (k_1 \varepsilon / k_f P)^2}}, \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

тут $\varepsilon = \sqrt{(p^2 + q^2)}/V^2$ – відносне проковзування.

Для системи (II.4) може бути побудована функція Ляпунова у вигляді лінійної комбінації її диференціальних наслідків: кожне рівняння помножається на відповідну змінну з деяким коефіцієнтом, з метою конструювання виразу, що буде похідною за часом від деякої квадратичної форми змінних системи, і, крім того, буде знакопостійною квадратичною формою. На основі такого підходу була отримана канонічна квадратична форма

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma}{r_0} p^2 + \frac{1}{d} q^2 + \frac{\gamma}{r_0} \left(\tau - \frac{V^2\gamma}{dr_0} \right) y^2 + d \left(\tau - \frac{V^2\gamma}{dr_0} \right) \psi^2 \right], \quad (\text{II.5})$$

її похідна за часом в силу системи (II.4) – недодатна

$$\dot{V} = -\frac{2k_1}{V\sqrt{1+(k_1\varepsilon/k_fP)^2}}\left(\frac{p^2\gamma}{mr_0} + \frac{q^2d}{J}\right).$$

З умови позитивної визначеності функції Ляпунова отримаємо вираз критичної швидкості:

$$V_{kr} = \sqrt{\frac{\tau dr_0}{\gamma}}. \quad (3.6)$$

При умові $V < V_{kr}$ незбурений рух асимптотично стійкий, а нелінійний характер сил крипу не накладає обмежень на область тяжіння незбуреного руху. При умові $V > V_{kr}$ незбурений рух – нестійкий. При $\tau = 0$, коли квадратична форма (II.5) відповідає вільній колісній парі, має місце структурна нестійкість.

Умови одно точкового контакту накладають на величини збурень змінних y, ψ деякі обмеження, тому необхідно оцінити область тяжіння незбуреного руху, яка б гарантувала відсутність небажаного контакту реборди колеса з рейкою.

Оцінка області тяжіння. Перейдемо до безрозмірних змінних. Оскільки вираз функції Ляпунова має розмірність прискорення, для безрозмірювання виберемо параметри V, d . Нехай \bar{R} – максимальний радіус кола, що цілком лежить в деякій заданій області D , тобто $\bar{y}^2 + \psi^2 = \bar{R}^2$. Розглянемо чотиривимірну кулю такого ж радіуса, тобто $\bar{y}^2 + \psi^2 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2 = \bar{R}^2$. Його проекція на площину не вийде за межі кола радіусу \bar{R} .

Розглянемо область тяжіння незбуреного руху, що задається співвідношенням

$$\frac{\gamma}{\bar{r}_0} \bar{p}^2 + \bar{q}^2 + \frac{\gamma}{\bar{r}_0} \left(\tau - \frac{\gamma}{\bar{r}_0}\right) \bar{y}^2 + \left(\tau - \frac{\gamma}{\bar{r}_0}\right) \psi^2 < \alpha \bar{R}^2.$$

Ця область гарантує, що наступні збурення змінних не вийдуть за межі кола радіуса \bar{R} , тобто при цьому буде реалізовуватися одно точковий контакт.