1 ТЕОРІЯ МНОЖИН

У розділі 1 розглядаються основні поняття і означення сучасної дискретної математики: множина, елементи множини, операції над множинами та їх властивості, які становлять базовий словник для дискретної математики й є потрібні для розуміння всього подальшого матеріалу посібника.

1.1 Основні поняття теорії множин

Поняття множини є одне з фундаментальних невизначених понять сучасної математики і береться за основне, тобто за таке, що не зводиться до інших понять. Під *множиною* розуміють деяку сукупність різних поміж собою об'єктів, об'єднаних за певною ознакою, причому таких, що для кожного можна встановити, належить цей об'єкт даній сукупності чи ні. При цьому ніяких припущень що до природи об'єктів не робиться.

Об'єкти, з яких складено множину, називають її *елементами*.

Множини позначаються великими літерами латинської абетки: A, B, C,..., а об'єкти або елементи, які становлять множину, позначаються малими латинськими літерами: a, b, c, ..., або малими латинськими літерами з індексами.

Приклад 1.1

1) Множина N чисел натурального ряду 1, 2, 3, ...;

2) множина R дійсних чисел;

3) множина літер української абетки.

Твердження, що множина A складається з елементів $a_1, a_2, ..., a_n$ умовно записується як $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Порядок елементів множини не має значення.

Належність елемента до множини позначають символом $\in$, тобто $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, …, $a_n \in A$, або скорочено: $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Якщо b не є елементом A, то пишуть: $b \notin A$.

Множина, всі елементи якої є числами, називається *числовою*. Надалі ми будемо, насамперед, розглядати саме такі множини. Множина, елементами якої є інші множини, називається *класом* або *сімейством*.

Множина може мати скінчену кількість елементів, тобто бути *скінченою*, або бути *нескінченною*.

Приклад 1.2

1) множина непарних чисел $P = \{1, 3, 5, ...\}$ (нескінчена);

2) множина всіх розв'язків рівняння $\sin x = 1$ (нескінчена);

3) множина студентів певного вищого навчального закладу (скінчена);

4) множина точок кола (нескінчена).

Існує множина, яка не містить жодного елемента. Така множина називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$.

Приклад 1.3 Множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 16 = 0$ є порожньою.

Не завжди відомо, чи існують елементи, які визначають деяку множину.

Приклад 1.4 Множина виграшних квитків лотереї може стати визначеною тільки після тиражу.

Множина як об’єкт може бути елементом іншої множини.

Приклад 1.5 У множині книг на полиці самі книги можуть розглядатися як множини сторінок.

Передбачається, що границі множини повинні бути чітко визначені. Саме задання множини явно або неявно обмежує сукупність об’єктів, які належать цієї множині. У будь-якій конкретній задачі доводиться мати справу тільки з фіксованою для цієї задачі, множиною.

Універсальною множиною (*універсумом*) називається множина, що містить всі елементи з деякою заданою властивістю. Позначається така множина через U.

Поняття «універсальної множини» залежить від задачі, яку розглядають. Прикладом універсальної множини може бути множина дійсних чисел, множина людей на планеті Земля тощо.

1.2 Потужність множин

Кардинальним числом (позначається $\operatorname{Card} A$ або $|A|$) називається деякий об’єкт для позначення потужності будь-якої множини із сукупності множин.

Потужністю скінченної множини A називається кількість її елементів.

Кардинальне число є узагальненням поняття числа елементів скінченної множини на випадок нескінченної множини.

Стверджують, що множини $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ та $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ мають однакову потужність, якщо кожному елементу множини A можна поставити у відповідність єдиний елемент множини B, тобто можна встановити взаємнооднозначну відповідність поміж їхніми елементами $b_i = f(a_j)$. У цьому разі множини A та B називають *рівнопотужними* та позначають $A \sim B$.

Кожні непорожні скінчені множини з n елементів є рівнопотужними множинами певного відрізку натурального ряду N_n, де $N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. У цьому разі їхня потужність дорівнює $n < \infty$.

Потужність порожньої множини $\varnothing$ вважають рівною 0, тобто $|\varnothing| = 0$.

Приклад 1.6

1) Якщо $A = \{-2, 0, 3, 5\}$, то $|A| = 4$.

Кожна множина, яка рівнопотужна множині натуральних чисел, називається *зліченною*. Її потужність позначається літерою $\aleph_0$ (алеф нуль, алеф – перша літера єврейської абетки).

Приклад 1.7 Множина непарних чисел P є рівнопотужна множині всіх натуральних чисел N, тому множина P є зліченою множиною і її потужність $|P| = \aleph_0$.

Потужність множини дійсних чисел проміжку $[0, 1)$ називається *потужністю континууму*. Позначається через $\mathbb{C}$ або $\aleph$.

Приклад 1.8 Множини дійсних чисел проміжків $[0, 1)$ та $[0, \infty)$ є рівнопотужні, оскільки по між ними можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

1.3 Способи задання множин

При заданні множин слід визначити, які елементи до неї належать.

1) Множину можна задавати ***явним переліченням всіх її елементів***: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Це є спосіб задання множини списком, який підходить тільки для задання множин з невеликою кількістю елементів. Позначення списку – у фігурних дужках.

Приклад 1.9 Множина всіх студентів, присутніх в аудиторії (Петров, Сидоров, ...).

2) Узагальненням першого способу є задання елементів множини за допомогою певних елементів уже відомої множини, тобто так званою ***процедурою, що породжує***.

Приклад 1.10 За відомою множиною цілих чисел $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ визначимо множину степенів числа 3: $Z = \{..., 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, ...\}$.

3) Множину можна задавати ***за допомогою деякої характеристичної властивості***, якою володіє кожен з елементів множини, що розглядається, і не володіє кожен інший елемент, що не входить до цієї множини.

Характеристичну властивість запишемо у вигляді $A = \{x \mid P(x), x \in U\}$ або $A = \{x : P(x), x \in U\}$, причому $a \in \{x : P(x), x \in U\}$, якщо властивість $P(a)$ є істинною.

Приклад 1.11 Нехай задано множину натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Розглянемо сукупність елементів з множини *N*, які діляться на 3 (характеристична властивість). Дістанемо множину чисел, кратних до 3: $M = \{3, 6, 9, ...\}$. Задамо цю множину за допомогою характеристичної властивості $M = \left\{x : \frac{x}{3}, x \in N\right\}$.

Зауваження. Переліченням елементів можна задати лише скінчені множини, а за допомогою характеристичної властивості можна задавати як скінчені так і нескінчені множини.

1.4 Алгебра підмножин

1.4.1 Підмножина, порівняння множин, булеан

Тільки одного поняття множини ще недостатньо для вивчання існуючих дискретних структур. Необхідно ще ввести поняття частини множини і правил створювання нових множин із уже існуючих.

Множина A, всі елементи якої належать і до множини B, називається *підмножиною* (*частиною*) множини B.

Таке співвідношення поміж множинами називається *включенням* і позначається символом «$\subseteq$», тобто $A \subseteq B$ (A включене до B або B містить A). Вочевидь, що $A \subseteq B$, якщо з належності елемента x до множини A випливає належність цього елемента і до множини B, тобто з $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Якщо множина A не міститься в множині B, використовують позначання $A \not\subseteq B$.

Приклад 1.12 Множина невід'ємних дійсних чисел $[0, +\infty)$, яка має спеціальне позначення R^+, міститься у множині дійсних чисел $R = (-\infty, +\infty)$, тобто $R^+ \subseteq R$.

Дві множини A та B називаються *рівними* (позначається $A = B$), якщо $A \subseteq B$ та $B \subseteq A$. Це є визначення рівності двох множин за допомогою операції включення.

У літературі також зустрічається позначення $A \subset B$. У цьому випадку під $A \subset B$ слід розуміти *строге включення* або *строга підмножина*, яке не припускає рівності, тобто якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$. Якщо $A \subseteq B$ й $A \neq B$ та $A \neq \varnothing$, то A називають *власною підмножиною* множини B. Нестроге включення $A \subseteq B$ допускає рівність (тоді A називається *невласною* підмножиною множини B).

Ми будемо використовувати позначання $A \subseteq B$ для нестрогого включення, яке допускає рівність $A = B$.

Вважають, що порожня множина є невласною підмножиною кожної непорожньої множини A, тобто $\varnothing \subseteq A$. Враховуючі, що A теж входить до A, то кожна непорожня множина A має принаймні дві різні підмножини $\varnothing$ та A.

Зауваження 1 Нехай U – деяка фіксована множина. Розглянемо тільки такі множини A, B, C, ..., які є підмножинами множини U. У цьому випадку множина U буде універсальною множиною для всіх множин A, B, C, ...

Зауваження 2 Зі співвідношень $A \subset B$ й $B \subset C$ випливає, що $A \subset C$, тобто відношення включення транзитивне (рис. 1.1).

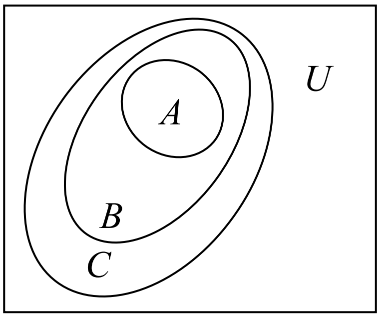

Рисунок 1.1 – Відношення включення $A \subset B \subset C$

Для графічного зображення множини використовують спеціальні конструкції – діаграми Ейлера-Венна, які зображують сукупність елементів, що утворюють множину, овалами, а універсум – прямокутником.

Відношення включення графічно зображено на рис. 1.1.

Скінчені власні підмножини певної множини можуть утворювати різноманітні сполучення з одного, двох, трьох тощо елементів цієї множини.

Множиною всіх підмножин (*булеаном*) певної основної множини *E* називають множину, елементами якої є всі підмножини множини *E*. Позначається булеан через $P(E)$. Він включає до свого складу також елементи $\varnothing$ та множину *E*.

Приклад 1.13 Якщо $E=\{a, b, c\}$, то

$$P(E)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Зауваження 1 Порядок елементів у множині $P(E)$ є несуттєвий.

Зауваження 2 Якщо множина *E* містить *n* елементів, то множина $P(E)$ містить 2^n елементів, звідси й позначання множини $P(E)$ як 2^E.

Зауваження 3 Відношення належності $\in$ та включення $\subseteq$ – різні поняття. Наприклад, множина *A* може бути власною підмножиною множини *A* ($A \subseteq A$), але вона не може бути власним елементом цієї множини ($A \notin A$).

Приклад 1.14 Якщо $A=\{1, \{2, 3\}, 4\}$, то $\{2, 3\} \in A$, а 2 та $3 \notin A$.

1.4.2 Операції над множинами

Зазвичай розглядають п’ять основних операцій над множинами: доповнення, об’єднання, перетин, різницю та симетричну різницю. Подамо їхні означення, припускаючи, що задано певний універсум *U*.

Елементи множини *U*, які не входять до *A*, утворюють *доповнену* множину до *A* (позначаються $\overline{A}$).

За допомогою діаграми Ейлера-Венна доповнену множину можна зобразити геометрично (рис. 1.2), де *A* – затемнена частина.

Зауваження 1 Доповнення множини *A* до множини *U*, це множина $\neg A=\overline{A}=\{x : x \notin A, x \in U\}$.

Об’єднанням двох множин – *A* та *B* (позначається $A \cup B$ або $A+B$) – називається множина *C*, яка складається з усіх тих елементів, які належать хоча б до однієї з цих множин:

$$C = A \cup B = \{x : x \in A \text{ або } x \in B, x \in U\}.$$

Зауваження. Однакові елементи враховуються один раз.

Геометричну інтерпретацію об’єднання двох множин *A* та *B* подано на рис. 1.3, де $A \cup B$ – затемнена частина.

Підкреслимо, що до множині $A \cup B$ належать також і ті елементи, які водночас належать множинам *A* та *B*.

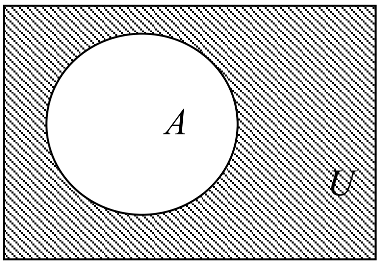

Рисунок 1.2 – Операція доповнення $\neg A = \overline{A}$

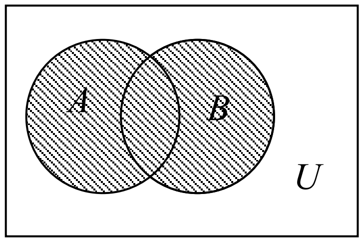

Рисунок 1.3 – Операція об'єднання $A \cup B$

Перетином двох множин – A та B (позначається $A \cap B$ або $A \cdot B$) – називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать множині A і множині B (водночас!):

$$C = A \cap B = \{x : x \in A \text{ і } x \in B,\ x \in U\}.$$

Геометричну інтерпретацію перетину подано на рис. 1.4, де $A \cap B$ – затемнена частина.

Різницею двох множин – A та B (позначається $A \setminus B$) – називається множина $C = A \setminus B = \{x : x \in A \text{ і } x \notin B,\ x \in U\}$.

Геометричну інтерпретацію різниці подано на рис. 1.5, де $A \setminus B$ – затемнена частина.

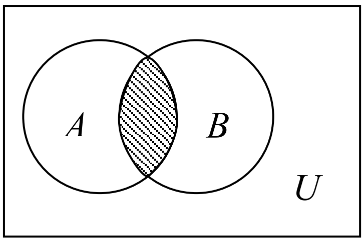

Рисунок 1.4 – Операція перерізу $A \cap B$

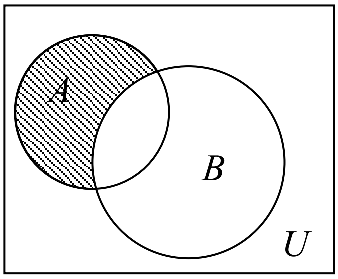

Рисунок 1.5 – Операція різниці $A \setminus B$

Симетричною різницею двох множин – A та B (позначається $A \oplus B$, $A \Delta B$ або $A - B$) – називається множина

$$C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Геометричну інтерпретацію симетричної різниці подано на рис. 1.6, де $A \oplus B$ – затемнена частина.

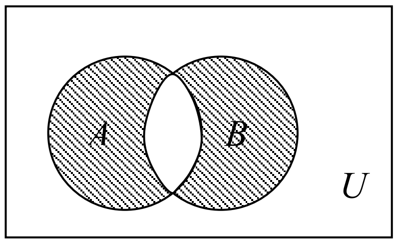

Рисунок 1.6 – Операція симетричної різниці $A \oplus B$

Приклад 1.15 Нехай $A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$, тоді:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}; \qquad A \cap B = \{4, 5\};$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 8\}; \qquad A \oplus B = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}.$$

Якщо визначити універсум $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то $\overline{A} = \{0, 2, 6, 7, 9\}$; $\overline{B} = \{0, 1, 3, 7, 8\}$.

Зауваження. Для скінченного числа множин $A_1, A_2, ..., A_n$ в аналогічний спосіб визначаються операції об’єднання та перетину

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n, \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n.$$

1.4.3 Властивості операцій над множинами

Нехай задано множини A, B, C та U (U – універсум). Тоді для операцій $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\neg$ виконуються такі властивості:

1. Комутативність:
$A \cup B = B \cup A$, $\qquad A \cap B = B \cap A$;
2. Асоціативність:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3. Дистрибутивність:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
4. $A \cup \varnothing = A$, $\qquad A \cap \varnothing = \varnothing$;
5. Ідемпотентність:
$A \cup A = A$, $\qquad A \cap A = A$;
6. Доповнення:
$A \cup \overline{A} = U$, $\qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$;
7. $A \cup U = U$, $\qquad A \cap U = A$;
8. $\overline{\varnothing} = U$, $\qquad \overline{U} = \varnothing$;
9. Поглинання:
$A \cup (A \cap B) = A$, $\qquad A \cap (A \cup B) = A$;
10. Закони де Моргана:
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
11. Подвійного доповнення (інволюція): $\qquad \overline{\overline{A}} = A$;
12. Вираз для різниці: $\qquad A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Пари символів $\cup$ та $\cap$ у формулах 1 – 10 називають *двоїстими* між собою. Їх можна змінювати місцями, замінюючи при цьому U на $\varnothing$ й навпаки.

У справедливості властивостей 1 – 12 можна переконатися чи то геометрично, чи формальними міркуваннями щодо кожної рівності.

Приклад 1.16 Спростити вираз $\overline{\overline{A \cap B} \setminus C} \cup A \cap B \cup A \cap \left(\overline{C} \cup \overline{B}\right)$.

Розв’язання.

$$\overline{\overline{A \cap B} \setminus C} \cup A \cap B \cup A \cap \left(\overline{C} \cup \overline{B}\right) = \underbrace{\overline{\overline{A \cap B} \cap \overline{C}}}_{\text{вираз для різниці}} \cup A \cap B \cup \underbrace{A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B}}_{\text{дистрибутивність}} =$$

$$= \underbrace{\overline{\overline{A \cap B}} \cup \overline{\overline{C}}}_{\text{закони де Моргана}} \cup A \cap B \cup A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} = \underbrace{A \cap B \cup C}_{\text{подвійне доповнення}} \cup A \cap B \cup A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} =$$

$$= A \cap B \cup C \cup A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} = \underbrace{A \cap \left(B \cup \overline{B} \right)}_{\text{дистрибутивність}} \cup C \cup A \cap \overline{C} =$$

$$= A \cap U \cup C \cup A \cap \overline{C} = \underbrace{A \cup C}_{\text{комутативність}} \cup A \cap \overline{C} = C \cup \underbrace{A \cup A \cap \overline{C}}_{\text{поглинання}} = \underbrace{C \cup A}_{\text{комутативність}} = A \cup C \cdot$$

1.5 Добуток Декарта

Кортеж – це впорядкований набір елементів. Це не означення кортежу, бо не пояснено, що таке впорядкований набір. Уважатимемо поняття «кортеж» (вектор, рядок, ланцюжок), як і поняття множини, первісним, неозначуваним. Елементи, що утворюють кортеж, називають його *компонентами*.

На відміну від елементів множини, компоненти кортежу можуть повторюватись. Компоненти нумерують, кількість компонент називають *довжиною* (*розмірністю*) кортежу. Кортеж з *n* елементів будемо позначати як $\left(a_1, a_2, ..., a_n \right)$ і будемо говорити, що він має довжину *n*, $n < \infty$. Нескінченні кортежі не розглядатимемо.

Іноді дужки й навіть коми не пишуть, наприклад 011001. Кортежі довжиною 2 часто називають *парами*, довжиною 3 – *трійками*, довжиною *n* – *n*-ками («енками»).

Два кортежі *рівні*, якщо вони мають однакову довжину та відповідні їх компоненти рівні. Інакше кажучи, кортежі $\left(a_1, a_2, ..., a_n \right)$ і $\left(b_1, b_2, ..., a_m \right)$ рівні, якщо $n = m$ та $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_m$.

Нехай задано дві множини – *A* та *B* – певних елементів.

Множина впорядкованих пар елементів, з яких перший належить до *A*, а другий – до *B*, називається *декартовим* (*прямим*) добутком множин *A* та *B* і позначається як $A \times B = \left\{ \left(a, b \right) : a \in A, b \in B \right\}$.

Всі елементи множини $A \times B$ – кортежі довжини 2.

Введене поняття декартова добутку припускає узагальнення. *Декартовим добутком* множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається множина наборів кортежів довжини *n*:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \left\{ \left(a_1, a_2, ..., a_n \right) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n \right\}.$$

Степенем множини *A* називають декартів добуток $A^n = A \times A \times ... \times A$.

Приклад 1.17 Точка *M* у прямокутній декартовій системі координат на площині задається впорядкованою парою дійсних чисел у такий спосіб: $M\left(x, y \right)$ ($x \in R$, $y \in R$). Тоді $\left(x, y \right) \in R^2 = R \times R$. Звідси й назва добутку – декартів.

Приклад 1.18 Нехай $A = \left\{ 1, 2 \right\}$; $B = \left\{ a, b, c \right\}$. Тоді

$$A \times B = \left\{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \right\},$$

$$B \times A = \left\{ (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) \right\}.$$

Очевидно, що взагалі $A \times B \neq B \times A$.

Приклад 1.19 Якщо $A=\{a, b, \Delta, \square\}$; $B=\{1, m\}$, то декартів добуток має вигляд

$$A\times B=\{(a,1), (a,m), (b,1), (b,m), (\Delta,1), (\Delta,m), (\square,1), (\square,m)\}.$$

Визначимо $A\times B$, як пари елементів по одному з кожної множини A та B (пари елементів, що належать до декартова добутку, позначимо в таблиці точками, рис. 1.7).

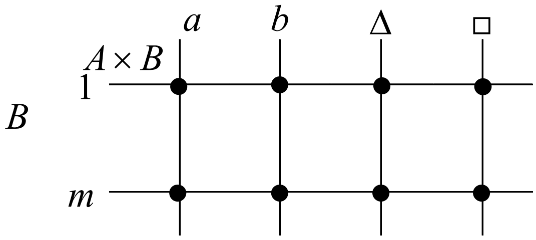

Рисунок 1.7 – Зображення пар елементів декартова добутку $A\times B$

Для скінченних множин потужність (кількість елементів) декартового добутку дорівнює добутку потужностей цих множин: $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

Приклад 1.20

1) $|N|=\left|N^2\right|$, де $N^2=N\times N$, N – множина натуральних чисел.

2) $\left|A^n\right|=|A|^n$, $n<\infty$.

1.6 Комп'ютерне подання множин

У комп'ютері можна подавати множини різними способами. Один зі способів – зберігати невпорядковані елементи множини. Проте в такому разі операції з множинами займатимуть багато часу через те, що потрібно щоразу переглядати елементи. Тому розглянемо інші способи.

Одним із найпоширеніших і найпростіших способів – *подання множин за допомогою бітових рядків*. Упорядкуємо довільним способом елементи універсальної множини. Нехай універсальна множина U містить n елементів, тоді $U=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$.

Множину $A\subset U$ подають у комп'ютері рядком із 0 і 1 довжиною n так: якщо $a_i\in A$, то i-й біт дорівнює 1, а ні, то 0.

Приклад 1.21 Нехай $U=\{a, b, c, d, e, f, m, n, p, q\}$, $A=\{b, m, n, q\}$, $B=\{a, b, f, m, q\}$. Тоді множину A подають рядком 0100001101, а множину B – рядком 1100011001.

Тепер на комп'ютері легко виконати операції над множинами A та B. Неважко переконатись, що об'єднанню множин відповідає порозрядне OR над бітовими рядками, які подають множини A та B, а перетину множин – порозрядне AND над відповідними бітовими рядками.

Приклад 1.22 Використаємо бітові рядки, які подають множини A та B з прикладу 1.21.

Бітовий рядок, який відповідає об’єднанню цих множин $A \cup B = \{a, b, f, m, n, q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного OR:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Бітовий рядок, який відповідає перетину множин $A \cap B = \{b, m, q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного AND:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Якщо універсальна множина U має велику потужність, а її підмножини не дуже потужні, то подання за допомогою бітових рядків неефективне щодо витрат пам’яті. У такому разі доцільно використовувати інші структури даних – зазвичай зв’язані списки та хеш-таблиці [2]. У певних задачах потрібні спеціальні методи подання множин, які ґрунтуються на використанні дерев [2, 23].