2 ВІДНОШЕННЯ

Поняття відношення є фундаментальним поняттям не тільки дискретної математики, але й в інших теоретичних та прикладних дисциплінах. Відношення визначається як будь-яка підмножина впорядкованих кортежів, побудованих з елементів абстрактних множин, і реалізує зв'язки між реальними об'єктами.

2.1 Поняття відношення

Приклад 2.1 Приклади відношень

1) $a \in A$ – зв'язок поміж елементом та множиною;
2) $A \subset B$ – зв'язок поміж множинами;
3) $<, \leq, \neq$ – нерівності;
4) $=$ – рівність;
5) «бути братом»;
6) ділення без остачі.

Введемо поняття впорядкованої множини.

Множина називається *впорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність число n ($n \in N$, n – номер цього елемента) та елементи множини розміщено в порядку зростання їхніх номерів.

За кількості елементів $n > 1$ множину можна впорядкувати не в єдиний спосіб.

Відношення позначатимемо літерою R, тоді запис xRy вказує на те, що поміж x та y ($x \in X$, $y \in Y$) існує зв'язок. В прикладі 5) поданому вище можна записати «x є брат y». Тут відношення R – «бути братом».

Відношення, яке визначене на одному об'єктові називається *унарним*, якщо ж його визначено поміж парами об'єктів, – називаються *бінарним*, поміж трьома об'єктами – *тернарним* і т. д.

Відношення повністю визначається парами (x, y), для яких воно виконується, тому кожне бінарне відношення можна розглядати як множину впорядкованих пар (x, y). При цьому порядок вибору елементів істотний. Перший елемент завжди вибирається з першої множини, другий – з другої.

Рівність впорядкованих пар визначається в такий спосіб: $(a, b) = (c, d)$, якщо $a = c$ та $b = d$.

Приклад 2.2 Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а відношення R – «елемент x дільник елементу y», де $x \in A$, $y \in B$. Тоді відношення R визначається парами елементів множин A та B

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\},$$

тому *R* є підмножиною множини, що складається з усіх упорядкованих пар елементів по одному з кожної множини *A* та *B*.

Зауваження. Функція $y = f(x)$ (іноді записують $x \xrightarrow{f} y$) також є відношенням.

2.2 Бінарні відношення

Найпоширенішими з відношень є бінарні відношення.

Бінарним відношенням *R* на множинах *A* та *B* називається довільна підмножина множини декартова добутку $A \times B$. Якщо $(a, b) \in R$, то це записується як: aRb.

Якщо $A = B$, то $R \subseteq A \times A$ і в цьому випадку стверджують, що бінарне відношення *R* задано на множині *A*.

Зображення відношення *R* ($R \subseteq A \times B$) точками в таблиці називають *графіком відношення*; множину *x* ($x \in A$), для яких існує таке *y* ($y \in B$), що $(x, y) \in R$, називають *областю визначення* відношення *R*, а множину *y* ($y \in B$), для яких існує таке *x*, що $(x, y) \in R$, – *множиною значень*.

Зауваження. Кожна підмножина *R* множини $A \times B$ є бінарним відношенням.

Приклад 2.3

1) Позначимо в таблиці (рис. 2.1) точками елементи, які належать до підмножини $R = \{(a,1), (b,m), (\Delta,m)\}$ декартова добутку множин *A* та *B* з прикладу 1.19 ($R \subset A \times B$):

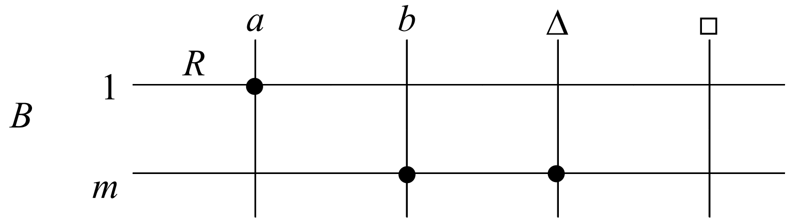


Рисунок 2.1 – Зображення пар елементів відношення *R*

Тоді *R* – бінарне відношення поміж множинами *A* та *B*.

2) Відношення нестрогого порядку $x \le y$ ($x, y \in R$) (рис. 2.2) є підмножиною декартова добутку $R \times R$, тобто всієї площини:

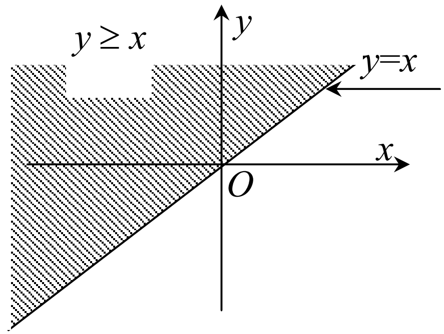


Рисунок 2.2 – Зображення відношення нестрогого порядку $x \le y$ $(x,\ y \in R)$

3) Відношення $\left\{ xRy \in N \times N \middle| \ x \ge y \right\}$ виконується для пар (5, 3), (7, 1), (2, 2), але не виконується для пар (1, 7), (9, 11), (2, 5).

4) Якщо X − множина студентів ЗНУ, а Y − множина груп ЗНУ, то відношення множин X і Y – є множина $\left\{ xRy \in X \times Y \middle| \ x - \text{студент групи } y \right\}$.

5) Якщо X − множина товарів у магазині, а $Y = R^{+}$, то відношення множин X й Y – є множина $\left\{ xRy \in X \times Y \middle| \ y - \text{ціна } x \right\}$.

2.3 Способи задання відношень

Є багато різних способів задання відношень. Найбільш розповсюджені з них задання відношень у табличній формі, стрілками, перетином, переліком пар. Розглянемо кожний з цих способів.

1. Табличний спосіб задання відношень.

Приклад 2.4 Нехай відношення R належить до декартова добутку $A \times B$, де множини $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ та $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, і задане таблицею (рис. 2.3).

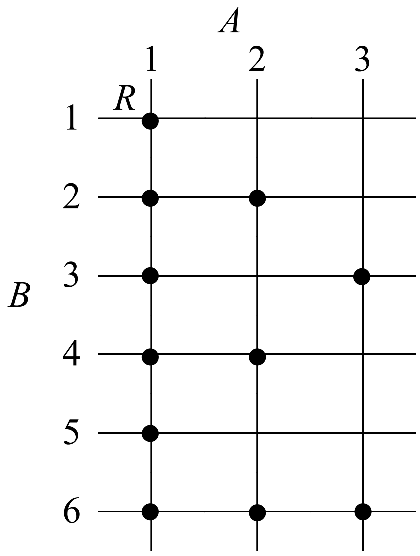


Рисунок 2.3 – Табличне зображення відношення з приклада 2.4

Табличний спосіб завжди можна розглядати як різновид матричного. Тому відношення R можна задати також *матрицею суміжності*, або *відношення*, рядки якої позначають елементами множини A, а стовпчики – елементами множини B і на перетині рядка a_i зі стовпчиком b_j стоїть 1 в разі $a_i R b_j$, та 0 – у противному випадку:

$$R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриці відношення називають *булевими*, тому що їхніми елементами є лише числа 0 або 1.

Для розглянутого вище прикладу матриця відношення буде мати форму:

$$R = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

де компоненти матриці R: $R[a, b] = \begin{cases} 1, \text{ якщо } aRb; \\ 0, \text{ якщо } \overline{aRb}, \end{cases}$ а a, b – елементи множин A та B.

2. ***Відношення* R *можна також*** задавати у вигляді списку пар елементів ***декартова добутку*** $A \times B$ ***, для яких дане відношення виконується:***

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}$.

3. Спосіб задання відношень стрілками.

Цей спосіб проілюструємо за допомогою відношення R з прикладу 2.4. При цьому використаємо два варіанти зображення бінарного відношення (рис. 2.4).

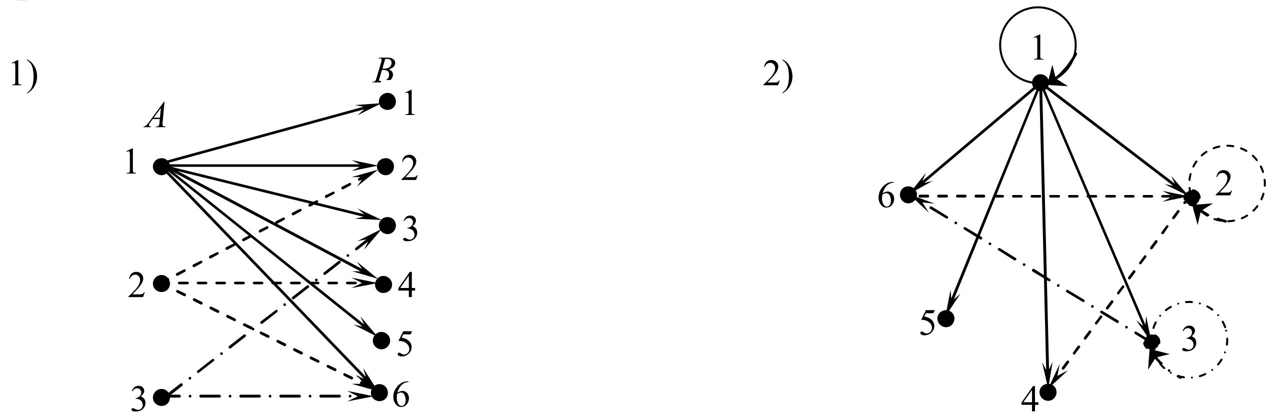


Рисунок 2.4 – Два варіанти зображення бінарного відношення

4. ***Завдання відношень перетином.***

Нехай $c = (a, b)$ – кортеж довжини 2 (де $c \in A \times B$). Елемент a називається *проекцією елемента с на множину A* (або на першу вісь). Позначається як $\text{пр}_A c = \text{пр}_1 c = a$.

Нехай E – підмножина декартова добутку множин A та B ($E \subset A \times B$). Множина елементів з A, які є проекцією елементів множини E на A, називається *проекцією множини E на множину A*. Позначається як $\text{пр}_A E$.

Приклад 2.5 Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$; $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, а відношення $R \subset A \times B$ визначається переліком пар елементів:

$$R = \{(a_1,b_2), (a_1,b_4), (a_2,b_1), (a_2,b_3), (a_3,b_2), (a_3,b_3), (a_3,b_4), (a_5,b_1), (a_5,b_3)\}.$$

Треба знайти: 1) $\text{пр}_A(a_2, b_3)$; 2) $\text{пр}_A R$.

Розв'язання.

Накреслимо графік відношення R (рис. 2.5).

1) Розглянемо кортеж $c_{23} = (a_2, b_3)$. Маємо

$$\text{пр}_A(a_2, b_3) = \text{пр}_1(a_2, b_3) = a_2.$$

2) Відношення R задано на множинах A та B і визначається наступними кортежами: $R = \{c_{12}, c_{14}, c_{21}, c_{23}, c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{51}, c_{53}\}$ ($R \subset A \times B$), тому

$$\text{пр}_A R = \{a_1, a_2, a_3, a_5\}.$$

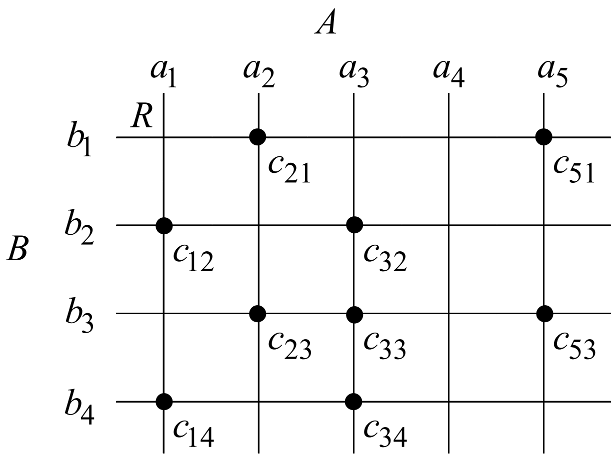


Рисунок 2.5 – Графік відношення з приклада 2.5

Впроваджене поняття проекції кортежу $v = (a_1, a_2)$ довжини 2 можна узагальнити на кортежі $v = (a_1, a_2, ..., a_n)$ довжини n.

Проекцією кортежу $v = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на i -ту вісь називають його i-ту компоненту: $\text{пр}_i v = a_i$.

Проекцією кортежу $v = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на осі з номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ називають вектор довжини k з компонентами: $\text{пр}_{i_1, i_2, ..., i_k} v = (a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k})$.

Проекцією множини векторів $V = \{v_r\}$ на i -ту вісь називають множину проекцій усіх векторів з V на i -ту вісь: $\text{пр}_i V = \{\text{пр}_i v_r : \text{v}_r \in V\}$.

Проекцією множини векторів $V = \{v_r\}$ на осі з номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ називають множину проекцій усіх векторів з V на осі з номерами $i_1, i_2, ..., i_k$:

$$\text{пр}_{i_1, i_2, ..., i_k} V = \{\text{пр}_{i_1, i_2, ..., i_k} v_r : \text{v}_r \in V\}.$$

Перетином $x=a$ *множини* (відношення) R називається множина елементів $y\in B$, для яких $(a,\ y)\in R$.

Приклад 2.6 Перетином $x=a_1$ множини R з прикладу 2.5 буде множина $\{b_2,b_4\}$.

Зауваження. Проекція відокремлює елементи у множині *A*, а перетин – елементи у множині *B*.

Нехай задано відношення $R\subset A\times B$. Позначимо через $R(a)\ (a\in A)$ перетин $x=a$ відношення *R*, тобто множину таких $y\in B$, що $(a,\ y)\in R$. Отже,

$$R(a)=\{y:\ a\in A,\ y\in B,(a,\ y)\in R\}.$$

Множина перетинів $R(a)$ відношення R ($R\subset A\times B$) по всім $a\in A$ називається *фактор-множиною* множини B за відношенням R (позначається через $B\,/\,R$)

$$B\,/\,R=\{R(a),\ a\in A\}.$$

Фактор-множина $B\,/\,R$ повністю визначає відношення *R*.

Приклад 2.7 Розглянемо відношення *R* з прикладу 2.5. Перетином $x=a_i$, $i=\overline{1,\ 5}$ відношення *R* будуть відповідно множини

$$R(a_1)=\{b_2,b_4\},\qquad R(a_2)=\{b_1,b_3\},\qquad R(a_3)=\{b_2,b_3,b_4\},$$

$$R(a_4)=\varnothing,\qquad R(a_5)=\{b_1,b_3\}.$$

Під кожним елементом a_i запишемо його перетин:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{b_2,b_4\} & \{b_1,b_3\} & \{b_2,b_3,b_4\} & \varnothing & \{b_1,b_3\} \end{bmatrix}.$$

Другий рядок буде фактор-множиною множини *B* за відношенням *R*.

Нехай тепер $R\subset A\times B$, а X деяка підмножина множини A ($X\subset A$). Позначимо об’єднання всіх перетинів $R(x)$ за всіма $x\in X$ через $R(X)$, тобто перетином множини *R* по множині *X* є множина

$$R(X)=\{y:\ x\in X,\ y\in B,(x,\ y)\in R\}=\bigcup_{x\in X}R(x).$$

Вочевидь, що $R(X)\subset B$.

Приклад 2.8 Нехай задано три множини – $A=\{a_1,a_2,a_3\}$; $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$; $X=\{a_2,a_3\}\subset A$ – й відомо, що $R(a_2)=\{b_1,b_3,b_4\}$; $R(a_3)=\{b_1,b_2,b_4\}$. Тоді

$$R(\{a_2,a_3\})=R(a_2)\cup R(a_3)=\{b_1,b_3,b_4\}\cup\{b_1,b_2,b_4\}=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}=B.$$

2.4 Композиція відношень

Нехай задано три множини *A*, *B*, *C* й два відношення *R* та *S* поміж ними: $R\subset A\times B$, $S\subset B\times C$.

Композицією двох відношень R та S називається відношення SR (іноді позначають як $S \circ R$) яке задано на декартовому добутку $A \times C$ та визначене як таке, що перетин SR по всіх $a \in A$ збігається з перетином S по підмножині $R(a)$ ($R(a) \subset B$), тобто

$$SR(a) = S(R(a)), \tag{2.1}$$

або

$$SR = \{(a, c): a \in A, c \in C, \text{якщо } \exists b \in B, \text{що } aRb \text{ та } bSc\}.$$

Операцію композиції бінарних відношень іноді ще називають *добутком відношень*.

Зауваження. При визначенні композиції відношень використано символ $\exists$, який називається *квантором існування* і читається «існує, знайдеться хоча б один». Окрім квантора існування ще є двоїстий до нього квантор $\forall$, який називається *квантором загальності*, який читається «для будь-якого, для кожного, для всіх». Застосування кванторів спрощує формальні записи.

Приклад 2.9 Розглянемо відношення R, яке визначене в прикладі 2.5, і відношення S, яке задане таблицею на рис. 2.6.

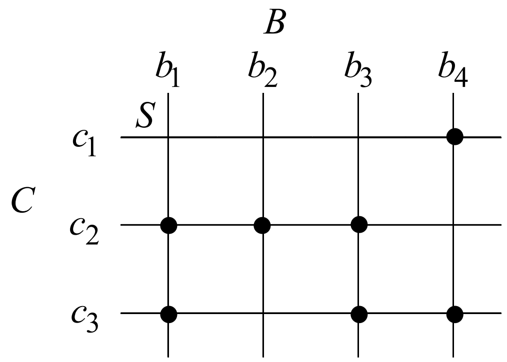


Рисунок 2.6 – Відношення S до приклада 2.9

Тоді відношення SR визначається таблицею на рис. 2.7.

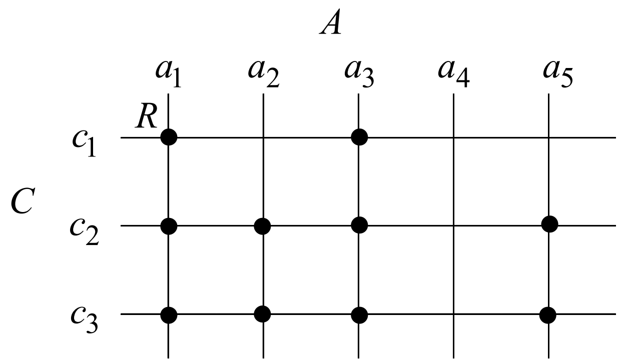


Рисунок 2.7 – Відношення SR з приклада 2.9

Відношення SR можна ще знайти інакше, якщо записати відношення R та S у вигляді підмножин відповідно декартових добутків $A \times B$ та $B \times C$:

$$R = \{(a_1,b_2),(a_1,b_4),(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_3,b_3),(a_3,b_4),(a_5,b_1),(a_5,b_3)\};$$

$$S = \{(b_1,c_2),(b_1,c_3),(b_2,c_2),(b_3,c_2),(b_3,c_4),(b_4,c_1),(b_4,c_3)\}. \tag{2.2}$$

Тоді

$$SR=\{(a_1,c_1),(a_1,c_2),(a_1,c_3),(a_2,c_2),(a_2,c_3),(a_3,c_1),(a_3,c_2),$$
$$(a_3,c_3),(a_5,c_2),(a_5,c_3)\}.$$

У правильності відповіді переконаємося за допомогою задання відношення стрілками (рис. 2.8).

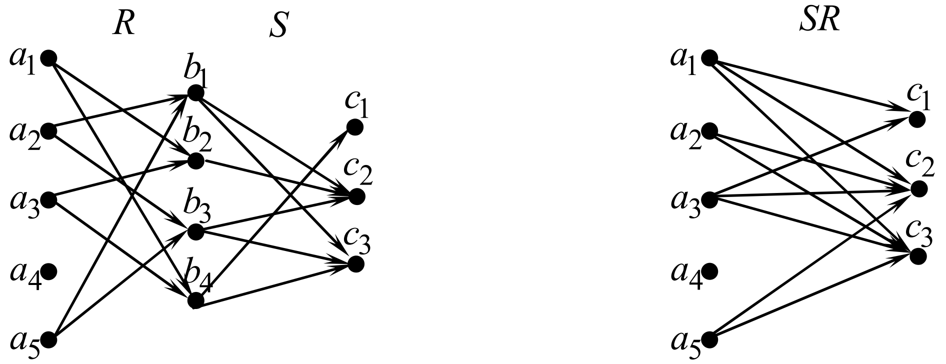


Рисунок 2.8

Композицію двох відношень S та R можна знайти ще й у такий спосіб:

$$\underset{S(R(x))}{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \{c_2\} & \{c_1,c_2\} & \{c_3\} & \{c_4\} \end{bmatrix}}\underset{R(x)}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{b_2,b_4\} & \{b_1,b_3\} & \{b_2,b_3,b_4\} & \varnothing & \{b_1,b_3\} \end{bmatrix}}=$$

$$=\underset{(SR)(x)}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{c_2,c_3\} & \{c_2,c_3\} & \{c_1,c_2,c_3\} & \varnothing & \{c_1,c_2,c_3\} \end{bmatrix}}.$$

Отже,

$$SR=\{(x,z)\in A\times C: \text{якщо } \exists y\in B \text{ такий, що } (x,y)\in R \text{ та } (y,z)\in S\}.$$

Перевіримо, чи виконується визначення (2.1), наприклад, для перетину $a=a_1$. У лівій частині формули дістанемо $(SR)(a_1)=\{c_1,c_2,c_3\}$.

Оскільки $R(a_1)=\{b_2,b_4\}$, то у правій частині формули (2.1) при $a=a_1$, матимемо: $S(b_2,b_4)=S(b_2)\cup S(b_4)=\{c_2\}\cup\{c_1,c_3\}=\{c_1,c_2,c_3\}$. Ліва й права частини збігаються.

Зауваження. *n – степенем відношення R* на множині A називається його n-разова композиція з самим собою, тобто $R^n=\underbrace{R\circ R\circ\ldots\circ R}_{n}$.

2.5 Обернене відношення

Визначимо ще одну додаткову унарну операцію над відношеннями, яка не має аналогів у загальному випадку серед теоретико-множинних операцій, що розглядалися раніше. Це операція оберненого відношення.

Оберненим відношенням щодо певного відношення R ($R \subset A \times B$) називається таке відношення R^{-1}, яке задається на декартовому добутку $B \times A$ і утворюється парами $(b, a) \in B \times A$ для яких $(a, b) \in R$.

З визначення оберненого відношення випливає, що $bR^{-1}a$ має місце тоді й лише тоді, коли існує відношення aRb.

Приклад 2.10 Розглянемо відношення *S*, яке визначене в прикладі 2.9 та має стрілочне зображення (рис. 2.9).

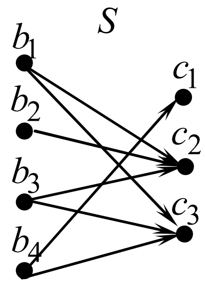


Рисунок 2.9

Оберненим щодо відношення *S* буде відношення S^{-1}, стрілочне зображення якого має вигляд на рис. 2.10.

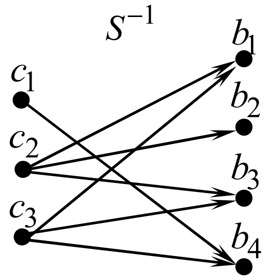


Рисунок 2.10

Відношення S^{-1} у вигляді підмножини запишеться як

$$S^{-1} = \{(c_1, b_4), (c_2, b_1), (c_2, b_2), (c_2, b_3), (c_3, b_1), (c_3, b_3), (c_3, b_4)\}.$$

З табличного подання відношення S^{-1} (рис. 2.11) бачимо, що елементи таблиці S^{-1} є симетричні до елементів таблиці *S* щодо прямої *l*.

Композиція відношень і обернене відношення мають властивості:

1. $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$;
2. *Якщо* $R \subset S$, $T \subset U$, *то* $TR \subset US$.

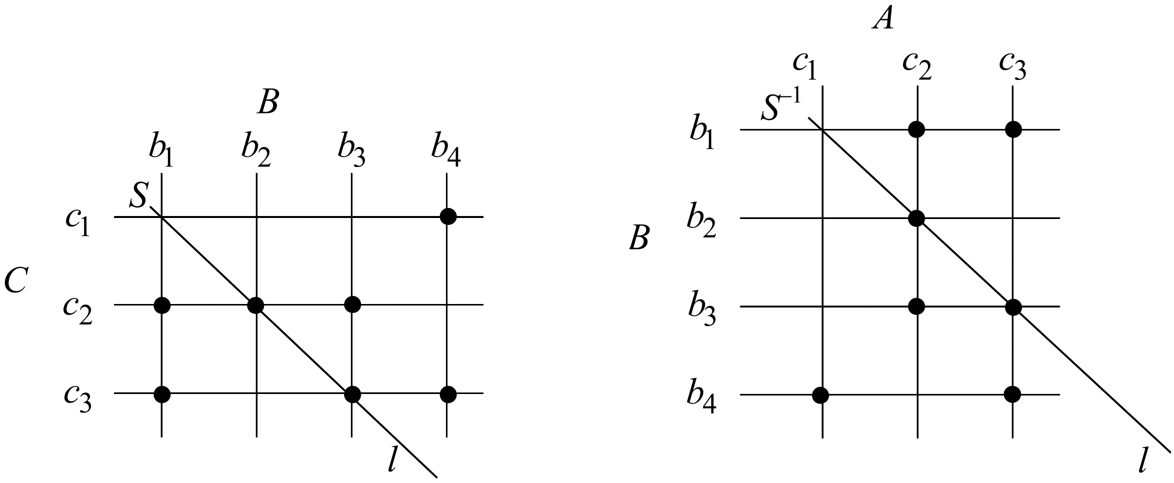


Рисунок 2.11

У теорії бінарних відношень важливу роль відіграють також відношення:

доповнення – $\overline{R} = \{(a, b) : (a, b) \notin R\}$, $\overline{R} \subset A \times B$;

тотожне (*діагональ*) – $I = \{(a, a) : a \in A\}$, $I \subset A^2$;

універсальне *(*повне*)* – $U = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, $U = A \times B$.

Якщо позначити через $M(R)$, $M(\overline{R})$ та $M(R^{-1})$ матриці відповідно відношень R, $\overline{R}$ та R^{-1} то

$$M(R^{-1}) = [M(R)]^T, \quad M(\overline{R}) = M(U) - M(R),$$

де $M(U)$ – матриця універсальної множини, всі елементи якої дорівнюють 1, чи то, інакше $M(\overline{R}) = \overline{M(R)}$, де $\overline{r_{ij}} = 1 - r_{ij}$.

2.6 Типи відношень

Нехай на множині A задано відношення R.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо всякий елемент цієї множини знаходиться у відношенні R з самим собою, тобто $(a, a) \in R$ для всіх $a \in A$ (інакше aRa для всіх $a \in A$).

Наприклад, відношення нестрогої нерівності на множинах N, Z, R.

2. Відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо з $(a, b) \in R$ випливає $a \neq b$ (тобто $\neg aRa$, що є одне й те саме, що $aRb \neq bRa$).

Наприклад, відношення строгої рівності на множинах N, Z, R або відношення «бути начальником», «бути братом», «бути молодшим» на множині людей.

З визначення антирефлексивності випливає, що якщо умова рефлексивності не виконується ні для жодного елементу множини A, то відношення R буде антирефлексивним.

Якщо умова рефлексивності виконується не для всіх елементів множини *A*, то говорять, що відношення *R* є нерефлексивне.

Наприклад, відношення, яке не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним є відношення «бути симетричним відносно осі Ox» не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним (точка є симетричною самій собі, якщо вона лежить на осі Ox, і не є симетричною самій собі в протилежному випадку).

3. Відношення *R* на множині *A* називається *симетричним*, якщо для кожної пари елементів *a* та *b*, які належать до *A*, з того, що $(a, b) \in R$, випливає $(b, a) \in R$ (тобто для $\forall a, b \in A$ з $aRb \Rightarrow bRa$).

Наприклад, відношення рівності на множинах N, Z, R; «бути симетричним відносно осі Ox» та відношення «бути братом» на множині людей.

4. Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *антисиметричним*, якщо для всіх *a* та *b*, які належать до *A*, з належності (a, b) та (b, a) до відношення *R* випливає $a = b$ (тобто якщо aRb та $bRa \Rightarrow a = b$).

Наприклад, відношення нестрогої нерівності на множинах N, Z, R: $a \geq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$.

Властивості симетричності і антисиметричності не є взаємно виключними.

5. Відношення *R* називається *асиметричним*, якщо для будь-яких елементів a, b або $\overline{aRb}$ або $\overline{bRa}$. ($\forall a, b \in A$ $\overline{aRb}$ або $\overline{bRa}$).

Наприклад, відношення строгого включення в множині всіх підмножин деякого універсуму або відношення «бути батьком» в множині людей.

6. Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *транзитивним*, якщо для будь-яких трьох елементів *a*, *b* та *c*, які належать до множини *A*, з того, що $(a, b) \in R$ та $(b, c) \in R$, випливає, що $(a, c) \in R$ (тобто з того, що aRb та $bRc \Rightarrow aRc$).

Наприклад, відношення =, ≤, «жити в одному місті» або відношення «мати непорожній перетин» на системі множин не є транзитивним.

7. Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *повним*, якщо для всіх елементів *a* та *b*, які належать до *A*, або $a = b$, або $(a, b) \in R$, або $(b, a) \in R$ (тобто, або $a = b$, або aRb, або bRa).

Приклад 2.11

1) Відношення, яке позначене знаком «=» – рефлексивне;
2) відношення «бути сином» – антирефлексивне;
3) відношення «жити в одному місті» – симетричне;
4) відношення «бути начальником» – антисиметричне;
5) відношення «бути братом» – транзитивне.

Зауваження 1 При задаванні відношення *R* ($R \subset A \times A$) матрицею:

– відношення є рефлексивне, якщо всі елементи головної діагоналі матриці дорівнюють 1 (тобто $I \subset R$);

– відношення є антирефлексивне, якщо немає жодної одиниці на головній діагоналі (тобто $R \cap I = \varnothing$);

– відношення є симетричне, якщо матриця є симетрична щодо головної діагоналі (тобто $R = R^{-1}$);

– відношення є антисиметричне, якщо немає жодної пари одиниць симетричної головної діагоналі (окрім одиниць на самій діагоналі) (тобто $R \cap R^{-1} = I$).

Зауваження 2 Транзитивність бінарного відношення R на множині A перевіряється простим перебиранням всіх елементів множини A (на A повинно виконуватися включення $R \circ R \subset R$).

Зауваження 3 Відношення є повне, якщо $R \cup R^{-1} \cup I = U$.

Приклад 2.12 Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. До якого типу належить відношення

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (1,5), (3,1), (3,5), (5,1), (5,3)\} ?$$

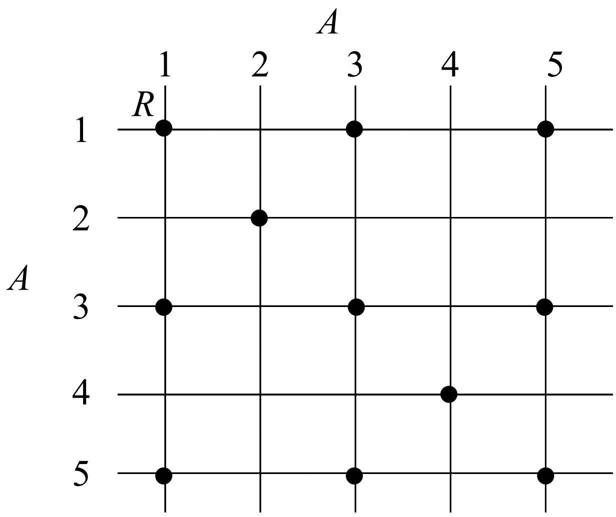


Рисунок 2.11

Розв'язання. Зобразимо відношення R за допомогою таблиці (рис. 2.11).

– Відношення R – рефлексивне, оскільки для кожного $a \in A$, маємо $(a, a) \in R$ ($I \subset R$);

– відношення R – симетричне, оскільки для всіх пар $(a, b) \in R$ ($a \neq b$) маємо

Випадок	$(a, b) \in R$	(b, a)	$(b, a) \in R$?
1	(1, 3)	(3, 1)	так
2	(1, 5)	(5, 1)	так
3	(3, 5)	(5, 3)	так

– відношення R – транзитивне, оскільки

Випадок	$(a, b) \in R$	$(b, c) \in R$	(a, c)	$(a, c) \in R$?
1	(1, 3)	(3, 1)	(1, 1)	так
2	(1, 3)	(3, 5)	(1, 5)	так
3	(3, 1)	(1, 3)	(3, 3)	так
4	(3, 1)	(1, 5)	(3, 5)	так

5	(5, 1)	(1, 3)	(5, 3)	так
6	(5, 1)	(1, 5)	(5, 5)	так
7	(5, 3)	(3, 1)	(5, 1)	так
8	(5, 3)	(3, 5)	(5, 5)	так

– відношення R – не є антисиметричним, тому що, наприклад, з того, що $(1, 3) \in R$ й $(3, 1) \in R$, не випливає 1=2.

2.7 Функціональні відношення

2.7.1 Поняття функціонального відношення

Відношення R ($R \subset A \times B$) називають *функціональним*, якщо для кожного $x \in A$ перетин R по x містить не більше одного елемента $y \in B$ (або один або жодного!, рис. 2.12).

У цьому випадку говорять, що відношення R діє з множини A у множину B і часто використовують позначення $R : A \to B$.

З точки зору теорії множин поняття числової функції є окремим випадком відношення, коли множини A та B є числові. Тому позначення функціональної залежності малими латинським буквами також застосовують в теорії множин і пишуть $f : A \to B$ або $y = f(x)$, а відношення f називають *функцією*.

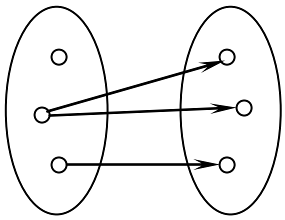


Рисунок 2.12 – Відношення, не функція

Функція f може бути задана не на всій множині A, а тільки на деякій її частині $D \subset A$. В цьому випадку множину D називають *областю визначення* функції f, а підмножину $\mathrm{Im} \subset B$, де $\mathrm{Im} = \{f(x) : x \in D\}$ називають *областю значень* функції f.

Зауваження. Image переводиться як зображення чи образ.

Елемент $b = f(a)$, де $a \in D$, називають *образом елемента a*, а сам елемент *a* – *прообразом* елемента *b*.

Якщо $D = A$, то функція f називається *всюди визначеною* на A. У цьому разі $\text{пр}_A f = A$.

Приклад 2.13 Відношення f_1, яке задано таблицею (рис. 2.13) є функціональним, але не всюди визначеним. Образом елемента a_3 є елемент b_2, а прообразами елемента b_2 є елементи a_3 та a_5.

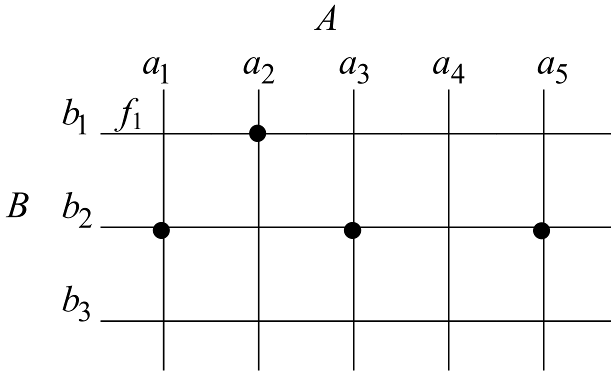


Рисунок 2.13

Зауваження. Якщо відношення f^{-1}, обернене до функціонального відношення $f \subset A \times B$, є також функціональним, то відношення f буде взаємнооднозначним.

Приклад 2.14 (функціонального й оберненого до нього відношення). Нехай $f \subset A \times A$ та визначається таблицею 1 (рис. 2.14). Тоді відношення $f^{-1} \subset A \times A$ визначається таблицею 2 (рис. 2.14) і є функціональним, тому відношення f є взаємнооднозначним.

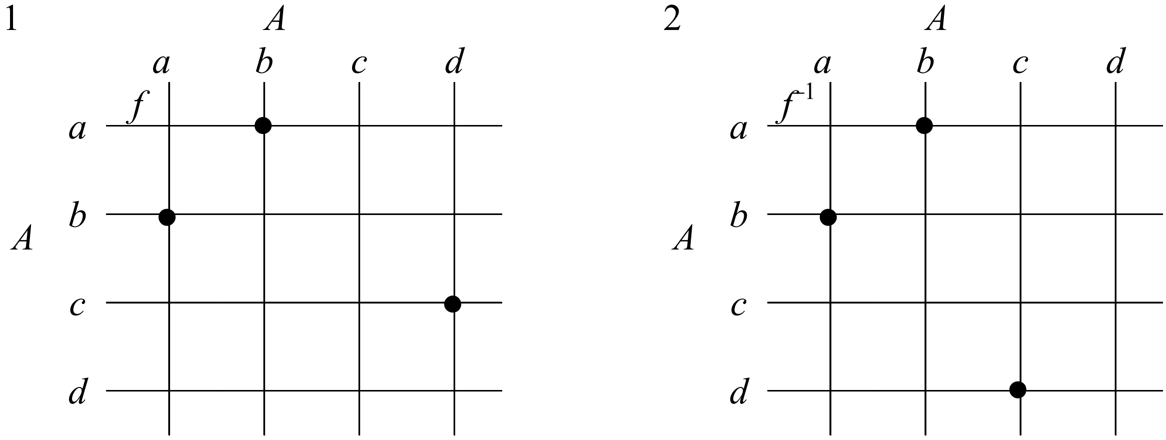


Рисунок 2.14 – Функціональне й обернене до нього відношення

Структура елементів для нас не є важливою, тому функції f і f^{-1} в прикладі, який розглядається, зручно записувати як

$$f = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & a & c \end{bmatrix}, \qquad f^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & d \end{bmatrix}.$$

Якщо відношення водночас є функціональним та всюди визначеним на множині A, то воно називається *відображенням* множини A у множину B.

Наприклад, відношення f_1, яке задано в прикладі 2.13, не є всюди визначеним, тому не є відображенням.

При стрілочному зображенні відображення f з кожної точки повинна виходити лише одна стрілка.

Приклад 2.15 Довизначимо відношення f_1 прикладу 2.13, поклавши $a_4 f_1 b_3$, тоді здобудемо функціональне відношення f_2 (рис. 2.15), яке вже є відображенням.

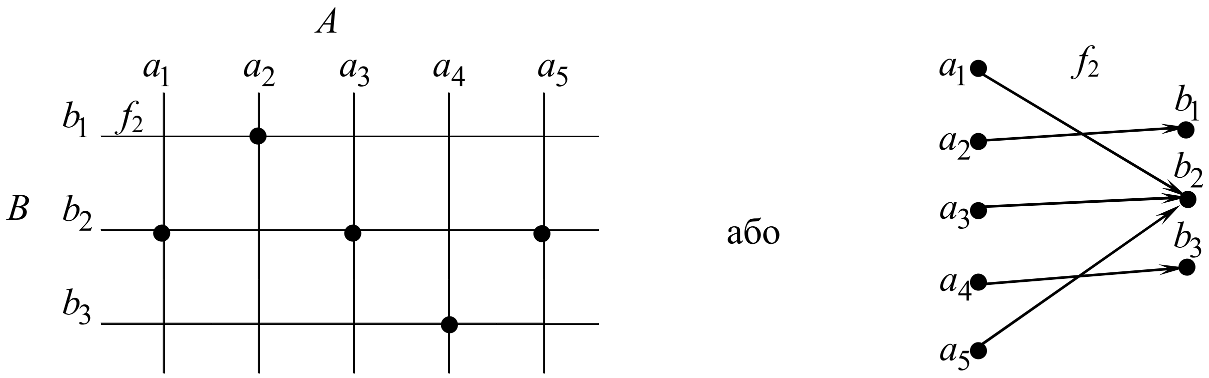


Рисунок 2.15 – Функціональне відношення f_2, яке є відображенням

Зауваження. Нехай *f* є відображенням множини *A* на множину *B*. Перетин $f(x)$ множини f по $x \in A$ є образом елемента *x* для функції *f* і позначається як $y = f(x)$. Елемент *x* називають *аргументом*, $f(x)$ – *значенням функції*. Перетин $f^{-1}(y)$ множини *B* по $y \in B$ є прообразом елемента *y* для функції *f*.

На рис. 2.16 та 2.17 графічно зображені образ елемента *x* та відображення *f*, яке діє з множини *A* у множину *B*.

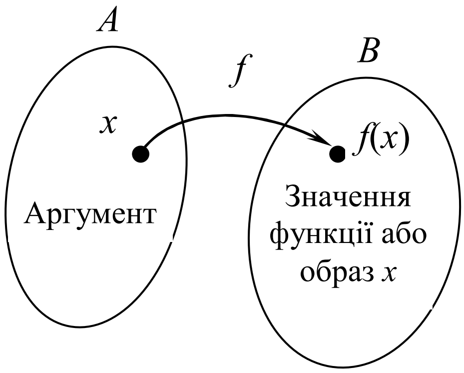


Рисунок 2.16 – Значення або образ функції *f*

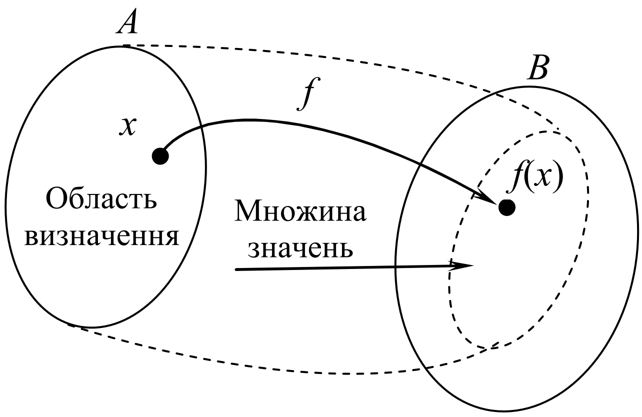


Рисунок 2.17 – Відображення *f* множини *A* у множину *B*

Множина упорядкованих пар $\{(x, y): x \in A, y = f(x)\}$ називається *графіком* відображення *f*.

2.7.2 Типи відображень

Відображення *f* називається *сюр'єктивним*, або просто *сюр'єкцією*, якщо область значень *f* збігається з усією множиною *B* або $f(A) = B$, тобто якщо кожний елемент з множини *B* є образом хоча б одного елемента з множини *A*. У цьому разі *f* відображає *A* на *B* (рис. 2.17).

Відображення f називається *ін'єктивним*, або просто *ін'єкцією*, якщо відношення f^{-1} є функціональне (рис. 2.18), тобто різні елементи множини A переводяться в різні елементи множини B. У цьому разі кожний елемент з області значень f має єдиний прообраз, тобто з рівності $f(x_1) = f(x_2)$ випливає $x_1 = x_2$.

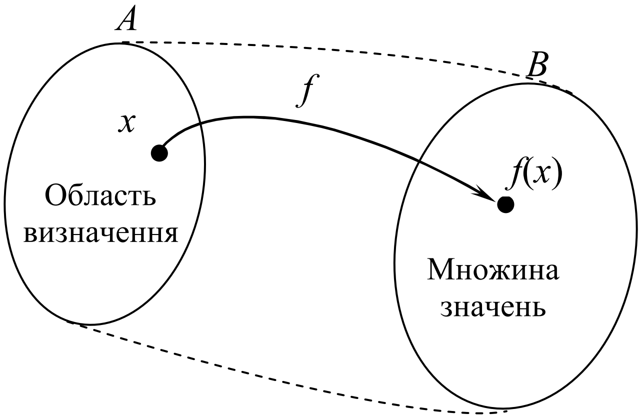


Рисунок 2.17 – Відображення A на B

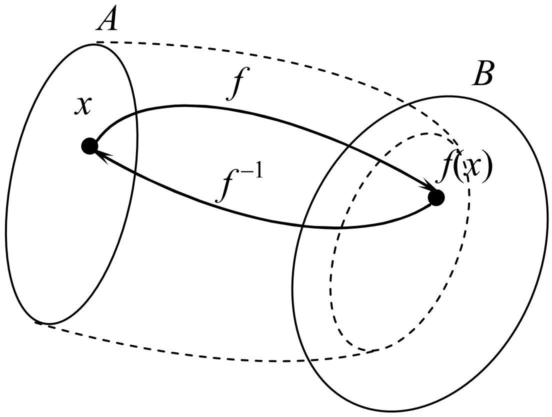


Рисунок 2.18 – Ін'єктивне відображення

Відображення називається *взаємнооднозначним*, або *бієктивним*, або просто *бієкцією*, якщо воно є сюр'єктивне й ін'єктивне, інакше кажучи, якщо обернене відношення є відображенням (рис. 2.19).

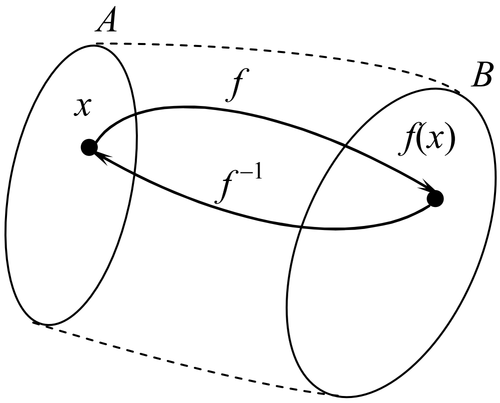


Рисунок 2.19 – Бієктивне відображення

Відображення f^{-1} називається *оберненим* відображенням до відображення f.

Наступний рис. 2.20 ілюструє поняття сюр'єкції, ін'єкції та бієкції.

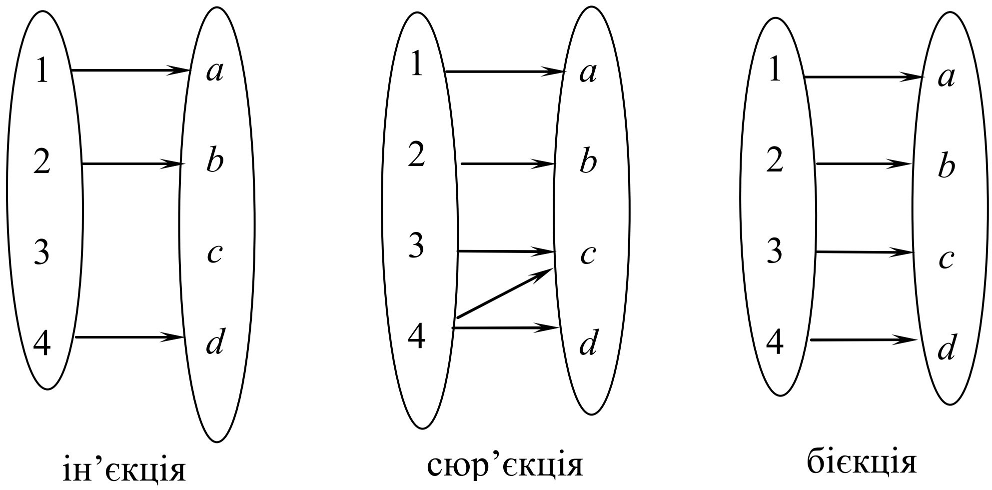


Рисунок 2.20 – Різні типи відображень

Приклад 2.16 Нехай R – множина дійсних чисел, R^+ – множина дійсних додатних чисел, а функція $f : A \to B$.

1) Якщо $A = B = R$, то функція $f : x \to x^2$ задає відображення A у B (не сюр'єктивне, тому що від'ємні числа не є образами).

2) Якщо $A = B = R$, то функція $f : x \to 4x - 3$ задає відображення A на B (сюр'єктивне).

3) Якщо $A = R$, $B = R^+$, то функція $f : x \to 3^x$ – ін'єктивне відображення, тому що воно є взаємнооднозначне: $f^{-1} : x \to \log_3 x$.

Зауваження 1 Якщо функція $f : A \to B$ є бієкцією, то функція $f^{-1} : B \to A$ також буде бієкцією і $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Зауваження 2 Бієкція скінченної множини A на себе називається *підстановкою*. Якщо множина має n елементів, то можна розглядати множину $n!$ всіх підстановок, пов'язаних з даною множиною A.

Елемент x називається *нерухомою точкою* відображення f якщо $f(x) = x$.

Зауваження. Оскільки функція є окремим випадком відношення, це означає, що для функцій є також визначена композиція, яка в цьому разі називається *суперпозицією* функцій. Нехай f – функція, визначена на множині A зі значеннями в множині B, g – функція, визначена на множині B зі значеннями в множині C, тоді композиція $g \circ f$ є функція, яка діє з множини A в множину C. Таким чином суперпозиція функцій знову є функцією. З означення суперпозиції маємо $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Приклад 2.17 Нехай задано функції $f = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ l & m & n & l \end{bmatrix}$ та $g = \begin{bmatrix} l & m & n \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$. Тоді, $f \circ g = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix}$.

Зауваження. Для відображень g і f справедлива формула $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Нехай задано множину $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Тотожним відображенням називається відображення, яке кожному елементові $a_i \in A$ ставить у відповідність цей же самий елемент (позначається символом 1_A). Таким чином, $1_A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix}$.

Якщо f та f^{-1} – відображення, визначені на множині A зі значеннями в цій же самій множині A, то відображення f називається *відображенням на себе* (*бієкцією на себе*) і мають місце рівності:

$$1_A \cdot f = f \cdot 1_A = f; \qquad f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1} = 1_A. \tag{2.3}$$

Приклад 2.18 Нехай відображення f задано таблицею на рис. 2.21. Тоді відображення $f^{-1} \subset A \times A$ визначається таблицею на рис. 2.22.

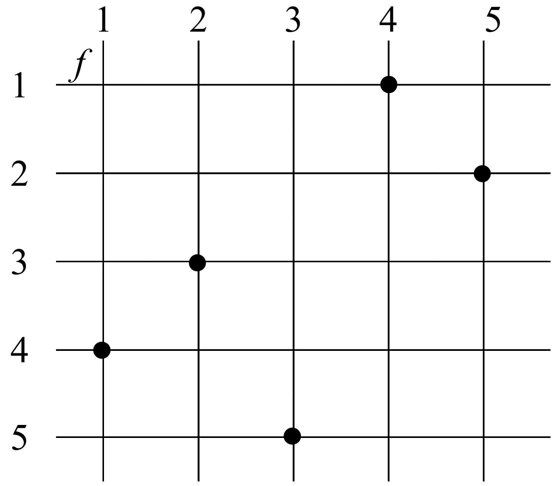


Рисунок 2.21

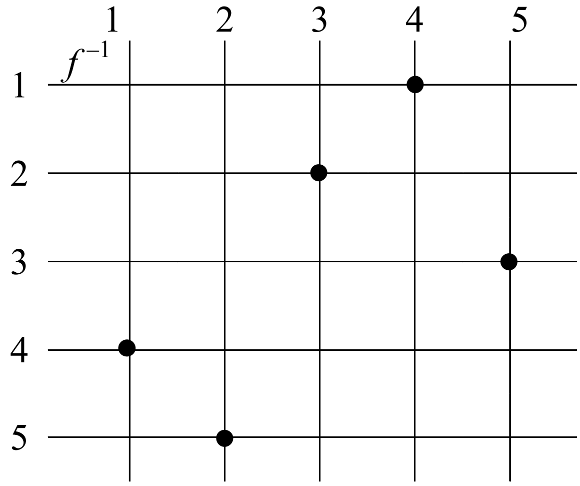


Рисунок 2.22

Функції f і f^{-1} запишемо у вигляді: $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Зображення відображень f і f^{-1} стрілками складається з циклів (рис. 2.23).

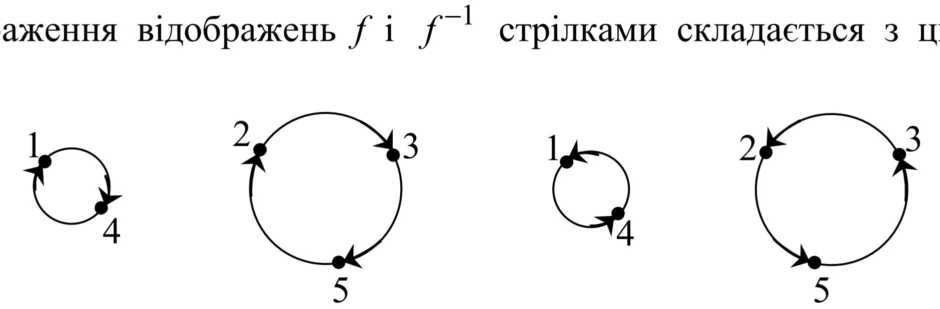


Рисунок 2.23

Перевіримо виконання умови (2.3):

$$1_A \cdot f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = f,$$

$$f \cdot 1_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = f.$$

Звідси випливає, що відображення 1_A є тотожним.

Знайдемо композицію відображень f та f^{-1}:

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 1_A.$$

Функція $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ ($f: A^n \to B$) називається *функцією n аргументів*.

Така функція відображає кортеж $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ у елемент $b \in B$.

2.8 Відношення порядку

2.8.1 Основні визначення

Відношення, котрі зустрічаються на практиці, можуть мати водночас кілька однакових комбінацій властивостей, яким можна надати спеціальну назву й для яких можна вивчати окремо наслідки з цих комбінацій, притаманні всім відношенням з такою комбінацією властивостей. Розгляд розпочнемо з відношення порядку, яке дозволяє порівнювати поміж собою елементи однієї множини.

Бінарне відношення *R*, яке визначено на множині *A*, називається *відношенням порядку*, якщо воно є антисиметричне й транзитивне.

Бінарне відношення *R* на *A* називається *відношенням нестрогого порядку*, якщо воно є рефлексивне, антисиметричне й транзитивне.

Бінарне відношення *R* на *A* називається *відношенням строгого порядку*, якщо воно є антирефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Якщо відношення порядку є повне, то воно називається *відношенням повного*, або *лінійного порядку*, а якщо воно не має властивості повноти, то називається *відношенням часткового порядку*. У цьому разі множина *A* із заданим на ньому відношенням *R* називається *частково впорядкованою множиною* (позначається (A, R), або просто *A*).

Множина, на якій визначено відношення повного порядку, називається *лінійно впорядкованою*. Лінійно впорядковану множину називають також *ланцюгом*.

Зазвичай нестрогий порядок позначають через «≤». У цьому разі маємо нестрого впорядковану множину $(A, \leq)$. Відношення строгого порядку зазвичай, позначають знаком «$<$». Відношення порядку у загальному випадку позначають знаком «$\prec$».

Приклад 2.19 Нехай A – множина дійсних чисел, а відношення R на A є $R=\{(x, y): x \le y\}$. Тут R – відношення нестрогого повного порядку, тому (A, R) – нестрого впорядкована множина (лінійно впорядкована).

Приклад 2.20 Нехай $C=\{1, 2, 3\}$, а $P(C)$ – булеан множини C, тобто множина всіх підмножин множини C. Тоді

$$P(C)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Ця множина містить $2^3=8$ елементів.

Відношення R на множині $P(C)$ визначимо як URV, якщо $U \subseteq V$, де $U, V \subseteq C$ (R – відношення включення множин, тобто елемент $(U, V) \in R$, якщо $U \subseteq V$). Наприклад, $(\{3\}, \{1, 3\}) \in R$, тому що $\{3\} \subseteq \{1, 3\}$, а $(\{1, 3\}, \{3\}) \notin R$, оскільки $\{1, 3\} \not\subset \{3\}$.

Можна перевірити, що відношення R визначене у такий спосіб, є рефлексивне, антисиметричне та транзитивне, тому на множині $P(C)$ воно визначає нестрогий порядок, тобто відношення R на булеані $P(C)$ є відношенням нестрогого часткового порядку.

Два елементи a та b частково впорядкованої множини (A, R) називають *порівнянними*, якщо aRb чи bRa. Якщо a та b – такі елементи, що ні aRb, ні bRa, то їх називають *непорівнянними*.

Нехай на скінченній множині A задано якесь відношення часткового порядку R, задане за допомогою стрілок G_R. Відношення R можна задати за допомогою такої процедури.

Починають із G_R. Оскільки відношення часткового порядку рефлексивне, то в кожній вершині G_R є петля. Потрібно вилучити всі ці петлі. Потім вилучають усі дуги G_R, які є в ньому внаслідок транзитивності. Наприклад, якщо пари (a, b) та (b, c) належать відношенню, то в G_R вилучають дугу (a, c). Більше того, якщо пари (c, d) також належить відношенню R, то в G_R вилучають дугу (a, d). Після цього всі вершини G_R розмішують па площині так, щоб початкова вершина кожної дуги була нижче, ніж кінцева вершина. Тепер усувають усі стрілки, бо дуги спрямовано вгору, до кінцевих вершин.

Усі ці кроки задано коректно, і в разі скінченної множини A кількість таких кроків скінченна. Отримаємо діаграму Гассе (H. Hasse), яка містить усю інформацію, потрібну для визначення відношення часткового порядку.

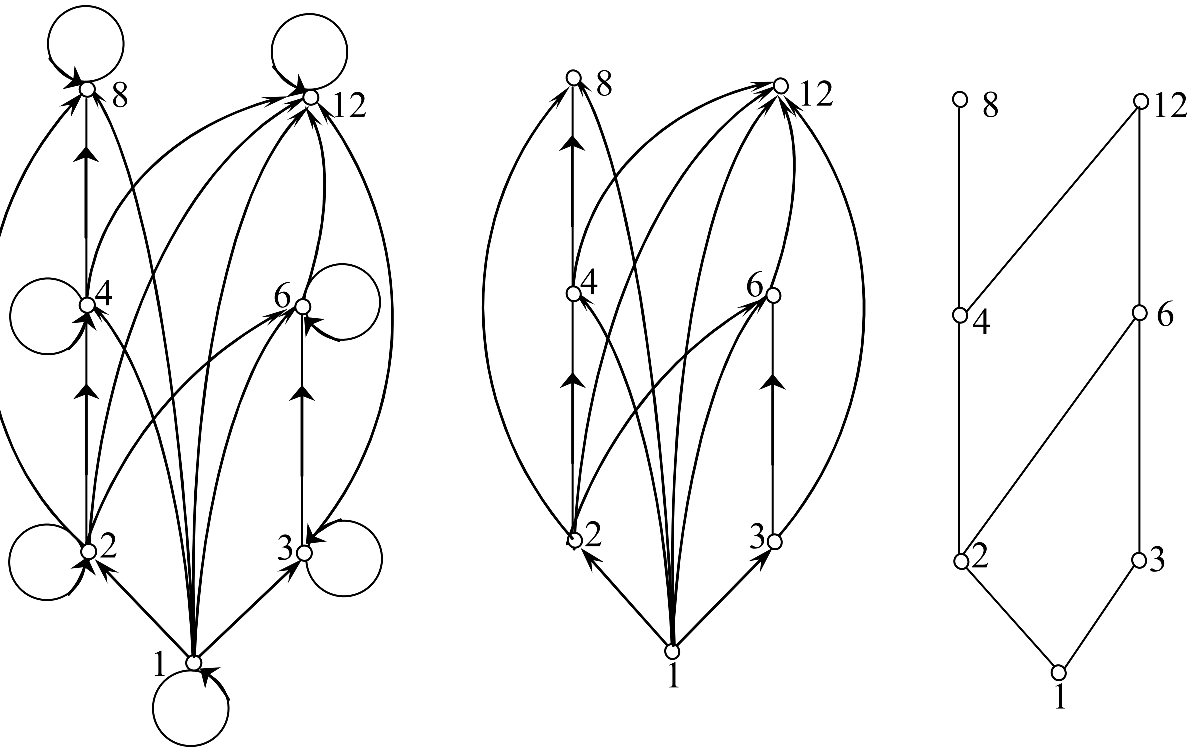
Приклад 2.21 Нехай $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Відношення R задамо так: $(a, b) \in R$ тоді й лише тоді, коли a ділить b. Отже,

$$R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8),$$
$$(2, 12), (3, 3), (3, 6), (3, 12), (4, 4), (4, 8), (4, 12), (6, 6), (6, 12), (8, 8), (12, 12)\}.$$

Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, тому являє собою відношення часткового порядку на множині *A*.

Зобразимо діаграму Гассе для заданого відношення часткового порядку.

Почнемо з графічного зображення у вигляді стрілок (рис. 2.24, а). Вилучимо всі петлі (рис. 2.24, б), а потім – усі дуги, зумовлені властивістю транзитивності; це дуги (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 8), (2, 12), (3, 12). Орієнтуємо всі дуги в напрямку знизу вверх і усунемо стрілки. Отримаємо діаграму Гассе (рис. 2.24, в).



а б в

Рисунок 2.24 – Діаграма Гассе

2.8.2 Верхня й нижня межі множини

Нехай *A* – підмножина впорядкованої множини *E*, на якій визначено відношення порядку «$\prec$». Якщо існує такий елемент $m \in E$, що $m \prec a$ для кожного $a \in A$, то *m* називається *нижньою межею* множини *A*. Аналогічно, якщо існує елемент $M \in E$, що $M \succ a$ для кожного $a \in A$, то *M* називається *верхньою межею* множини *A*.

Якщо *m* та *M* належать до множини *A*, то *m* та *M* відповідно називаються *мінімумом* та *максимумом* множини *A* й позначаються символами

$$\min A \text{ або } \min_{a \in A}; \qquad \max A \text{ або } \max_{a \in A}.$$

Верхня та нижня межі для кожної множини існують не завжди й не завжди є єдині.

Якщо існує найбільша нижня межа множини *A*, то вона називається *інфімумом* і позначається $\inf A$, а якщо існує найменша верхня межа множини *A*, то вона називається *супремумом* і позначається $\sup A$.

Максимальні та мінімальні елементи легко визначити на діаграмі Гассе: це відповідно «верхні» й «нижні» її елементи (для «верхніх» елементів немає висхідних ребер, а для «нижніх» – низхідних).

Приклад 2.22 На множині $A=\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ задано відношення часткового порядку $R=\{(a, b): a \text{ ділить } b\}$. Знайдемо максимальні й мінімальні елементи множини (A, R). Діаграму Гассе для цієї множини зображено на рис. 2.25. Із неї доходимо висновку, що максимальні елементи – 12, 20 і 25, а мінімальні – 2 та 5. Цей приклад свідчить, що частково впорядкована множина може мати більше одного максимального чи мінімального елемента.

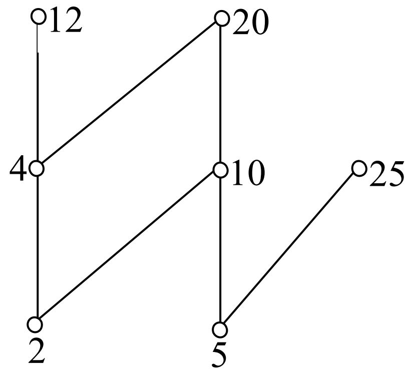


Рисунок 2.25

2.9 Відношення еквівалентності

Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *відношенням еквівалентності*, якщо воно є одночасно рефлексивне, симетричне й транзитивне (позначається символами ~, ≡ або $a=b(\operatorname{mod} R)$).

Приклад 2.23

1) рівність чисел та множин є відношенням еквівалентності;

2) у прикладі 2.12 відношення *R* задовольняє всім трьом наведеним властивостям, тому воно є відношенням еквівалентності.

Наприклад, класифікація об'єктів деякої множини *A* на непересічні підмножини елементів A_i, де $A=\bigcup_i A_i$, $A_i \cap A_k = \varnothing \ (i=k)$, якщо вони мають однакові властивості, визначає відношення еквівалентності. В цьому випадку елементи однієї підмножини A_i володіють однаковою властивістю та є еквівалентні до елементів тієї ж самої підмножини й не є еквівалентні до елементів решти підмножин $A_k \ (i \neq k)$, до того ж серед підмножин A_i немає порожніх. Здобуті підмножини A_i називаються *класами еквівалентності* множини *A*.

Приклад 2.24 Нехай A – множина студентів одного міста. Визначимо на множині A відношення R – «x та y навчаються в одному вищому навчальному закладі», де $x, y \in A$. Відношення R буде відношенням еквівалентності, якщо жоден студент міста не навчається в кількох вищих навчальних закладах. У цьому разі класи еквівалентності становитимуть студенти одного вищого навчального закладу.

Приклад 2.25 Відношення R у прикладі 1.12 розбиває множину A на класи [1], [2], [3], [4], [5], [6], де

$[1] = \{x : (x, 1) \in R\} = \{x : xR1\} = \{1, 3, 5\}$.

Перевіримо: $1 \in [1]$, оскільки $(1, 1) \in R$;

$3 \in [1]$, оскільки $(3, 1) \in R$;

$5 \in [1]$, оскільки $(5, 1) \in R$.

$[2] = \{x : (x, 2) \in R\} = \{x : xR2\} = \{2\}$;

$[3] = \{x : (x, 3) \in R\} = \{x : xR3\} = \{1, 3, 5\}$;

$[4] = \{x : (x, 4) \in R\} = \{x : xR4\} = \{4\}$;

$[5] = \{x : (x, 5) \in R\} = \{x : xR5\} = \{1, 3, 5\}$.

Аналіз здобутих результатів засвідчує, що різними є лише три класи:

$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}$; $\quad [2] = \{2\}$; $\quad [4] = \{4\}$.

Символом $[A]_r$ позначають множину всіх класів еквівалентності множини A за відношенням еквівалентності R та називають *фактор-множиною* множини A за відношенням еквівалентності R. У розглянутому прикладі фактор-множиною буде множина класів

$$[A]_r = \{[1], [2], [4]\}.$$

Кожний елемент класу еквівалентності породжує цей же самий клас еквівалентності, отже представляє цей клас.

Системою представників певного відношення еквівалентності називається підмножина, яка містить по одному елементові з кожного класу еквівалентності.

Приклад 2.26 На множині цілих чисел Z визначимо відношення $R \subset Z \times Z$ за допомогою формули $R = \{(x, y) : x - y = 3k,\ k \in Z\}$.

Відношення R є рефлексивне, тому що $(a, a) \in R$ внаслідок рівності $a - a = 0 = 3 \cdot 0$ для $k = 0$.

Відношення R є симетричне, оскільки з належності $(a, b) \in R$ випливає, що $a - b = 3k$, тобто $b - a = 3(-k)$ і, отже, $(b, a) \in R$.

Відношення R є транзитивне, оскільки з належності (a, b) та (b, c) до R, випливає, що $a - b = 3k_1$, $b - c = 3k_2$, тобто $(a, c) \in R$, оскільки $a - c = a - b + b - c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2)$, де $k_1 + k_2$ – ціле число.

Отже, відношення R є рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому воно є відношенням еквівалентності.

Розглянемо класи чисел

$$[a] = \{x : (x, a) \in \mathrm{R}\} = \{x : x - a = 3k\} = \{x : x = a + 3k,\ k \in Z\}\ .$$

Здобудемо три різні класи еквівалентності стосовно відношення R прикладу, який розглядаємо:

$[0] = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$,

$[1] = \{..., -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, ...\}$,

$[2] = \{..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...\}$.

Множина всіх класів еквівалентності

$$[Z]_R = \{[0], [1], [2]\}$$

є фактор-множиною множини Z за відношенням еквівалентності R.

Елемент x належить до класу $[a]$, якщо $x - a = 3k$, де $k \in Z$. (Пишуть $x = a(\mathrm{mod}\, 3)$).

У загальному випадку, якщо Z – множина цілих чисел, а p – деяке число ($p \in Z$), то вважатимемо $a \sim b$, якщо $(a - b) \vdots p$, де $a, b \in Z$, або, що є одне й те саме, $a = b(\mathrm{mod}\, p)$.

Приклад 2.27 Відношення паралельності прямих q на площині є відношенням еквівалентності, тому що:

1) $q \parallel q$ – рефлексивне;
2) $q_1 \parallel q_2 \Rightarrow q_2 \parallel q_1$ – симетричне;
3) $q_1 \parallel q_2,\ q_2 \parallel q_3 \Rightarrow q_1 \parallel q_3$ – транзитивне.

Кожний клас еквівалентності в множині прямих на площині – це множина паралельних прямих, яка повністю визначається напрямком однієї прямої.

Приклад 2.28 Вважатимемо, що точка $M_1(x_1, y_1)$ площини є еквівалентна точці $M_2(x_2, y_2)$ цієї ж площини, якщо $x_1 = x_2$. У цьому разі класами еквівалентності будуть множини точок на площині з рівними абсцисами (тобто всі прямі, які є паралельні до осі Oy). У цьому випадку фактор-множиною буде множина всіх прямих на площині, які є паралельними до осі Oy.

Прикладами відношення еквівалентності є також рівність векторів, логічних тверджень тощо.