3 МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

3.1 Алгебра висловлень

3.1.1 Загальні поняття

Логіка – це наука про закони мислення та його форми. Вона як мистецтво суджень бере свій початок з далекої давнини. В логіку було впроваджено математичну символіку, і сьогодні вона використовує мову й методи математики. Звідси й назва – математична логіка. Основи математичної логіки було закладено в середині XIX сторіччя ірландським математиком Дж. Булем.

Останніми десятиліттями логіка набула широкого застосовування в техніці під час дослідження та розроблення електронних схем, обчислювальних машин, дискретних автоматів. Вона використовується також і в інших науках: економіці, біології, психології тощо.

Основним поняттям у логіці є висловлення, під яким розуміють думку, яка подається за допомогою твердження. Тобто *висловлення* – це певне твердження, яке може бути або істинним або хибним.

Приклад 3.1 Наведемо приклади речень.

1) Сніг білий.
2) Одеса – столиця України.
3) 4 є парне число.
4) 2+3=6.
5) x–4=0.
6) Котра година?
7) Читай уважно!

Перших чотири речення – висловлювання, решта три – ні, бо п’яте речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x, шосте та сьоме речення – не розповідні.

Значення «істина» чи «хибність», яких набуває висловлювання, називають його *значенням істинності*. Значення «істина» позначають буквою T (від англ. «truth» чи цифрою 1), а «хибність» – буквою F (від «false» чи цифрою 0). Для позначення висловлювань використовують малі латинські букви з індексами чи без них. Символи, використовувані для позначення висловлювань, називають *атомарними формулами* чи *атомами*.

Приклад 3.2 Наведемо приклади висловлювань.

1. p: «Сніг білий».
2. q: «Одеса – столиця України».
3. r: «4 є парне число».
4. s: «2+3=6».

Тут символи p, q, r, s – атомарні формули. Висловлення «Сніг білий», «4 є парне число» є істинними, а висловлення «Одеса – столиця України», «2+3=6» – хибними.

Поміж висловленнями використовуються різні логічні зв’язки: «якщо ..., то ...», «... або ...», «... і ...» тощо. За їхньої допомоги будуються інші нові висловлення. Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою логічних операцій.

Логічною операцією називається операція, в якій операндами є висловлення, а операторами – логічні зв’язки.

Алгебра логіки (*алгебра висловлень*) являє собою науку про сукупність висловлень, над якими визначені логічні операції.

Висловлення, які характеризуються значеннями 0 чи 1, позначатимемо літерами x, y, z тощо (такі змінні називатимемо *бульовими*).

За допомогою алгебри логіки можна, наприклад, описувати роботу релейно-контактних схем. Для конкретики обмежимося розгляданням двополюсних схем, у яких поміж полюсами можуть існувати релейні контакти, з’єднані послідовно чи паралельно. При цьому стан контакту – 1 (0) означає, що він замкнений (розімкнений), тобто сигнал 1 (0) переводить електронний елемент у відкритий (закритий) стан.

Розглянемо спочатку схеми з одним контактом (рис. 3.1), на яких сам контакт та його стан позначено через x, а стан двополюсника позначатимемо літерою y.

Рисунок 3.1 – Схеми з одним контактом

Вочевидь, змінна x є незалежною, а змінна y – залежною бульовою змінною.

У разі першої схеми коло буде замкнене, якщо буде змінено стан контакту (замкнено), тобто змінна y набуде істинного значення ($y = 1$) тоді й лише тоді, коли змінна x також набуде істинного значення ($x = 1$). У разі другої схеми, навпаки, змінна y набуде істинного значення ($y = 1$), коли змінна x збереже хибне значення, тобто стан контакту не зміниться ($x = 0$).

Перейдемо тепер до розглядання схеми «або» і схеми «і» (рис. 3.2).

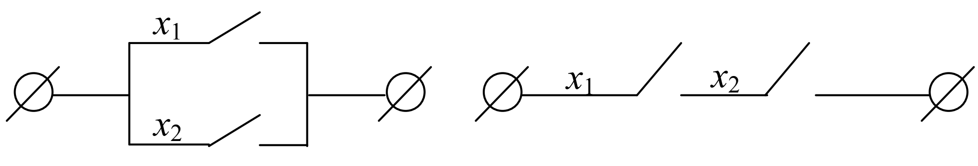

Рисунок 3.2 – Схеми з двома контактами

Якщо контакти x_1 та x_2 з’єднані паралельно, то коло буде замкнене, тобто змінна y набуде істинного значення ($y = 1$), коли хоча б один з контактів x_1 та x_2 є замкненим, і розімкненим, тобто y набуватиме хибного значення, коли обидва контакти x_1 та x_2 є розімкненими. При послідовному з’єднанні контактів x_1 та x_2 коло буде замкнене ($y = 1$), коли обидві змінні x_1 та x_2

набуватимуть істинного значення (тобто $x_1 = 1$, $x_2 = 1$), і розімкнене ($y = 0$), коли хоча б одна зі змінних x_1 та x_2 набуде хибного значення.

Опис більш складних релейно-контактних схем здійснюється за допомогою бульових функцій.

У логіці висловлювань використовують п'ять логічних операцій: *заперечення* (читають «не» та позначають знаком «¬»), *кон'юнкцію* (читають «і (та)» й позначають знаком «∧»), *диз'юнкцію* (читають «або (чи)» та позначають знаком «∨»), *імплікацію* (читають «якщо ..., то» та позначають знаком «→»), *еквівалентність* (читають «тоді й лише тоді» та позначають знаком «~»).

Наприклад, якщо *A* та *B* – твердження, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$ будуть, відповідно, запереченням твердження *A*, кон'юнкцією тверджень *A* та *B* тощо.

Приклад 3.3 Наведемо приклади складних висловлювань.

1. Сніг білий, і небо теж біле.
2. Якщо погода хороша, то ми їдемо відпочивати.

У наведених прикладах логічні операції – це «і» та «якщо ..., то».

Приклад 3.4 Розглянемо такі висловлювання: *p*: «Вологість велика», *q*: «Температура висока», *r*: «Ми почуваємо себе добре». Тоді речення «Якщо вологість велика та температура висока, то ми не почуваємо себе добре» можна записати складним висловлюванням

$$\left((p \wedge q) \rightarrow (\neg r) \right).$$

У логіці висловлювань атом p чи складне висловлювання називають *правильно побудованою формулою* або *формулою*. Вивчаючи формули, розглядають два аспекти – *синтаксис* і *семантику*.

3.1.2 Формули алгебри висловлень. Синтаксис і семантика. Класифікація та рівносильність формул

Під *алфавітом* будемо розуміти кожну непорожню множину символів:

пропозиційних змінних – x, y, z, x_1, x_2, ...;

логічних зв'язок – ¬, ∧, ∨, →, ~, ...;

технічних символів – (,) тощо.

Словом у певному алфавіті називається довільна скінчена послідовність символів (можливо, порожня). Слово *a* називається *підсловом* *b*, якщо $b = b_1 a b_2$ для певних слів b_1 та b_2. Слово ab називається *сполученням* (*конкатенацією*) слів *a* та *b*.

Синтаксис – це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів. *Формулою алгебри висловлень* (*ФАВ*) називається слово, яке задовольняє такому означенню:

1) кожна пропозиційна змінна – формула;

2) якщо p та q – формули, то $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \sim q)$ – формули;

3) слово є формулою, якщо воно побудоване лише з використанням скінченної кількості правил.

Наприклад, вирази (слова) $\left(\left(\overline{p} \to q\right) \vee p\right)$, $\left(\left(p \sim q\right) \to \left(\overline{r}\right)\right)$ є формулами, а слова $\left(p \sim q\right)$, $\left(\overline{r}\right)$, p, q, r – підформули останньої формули.

Часто заперечення висловлювання p позначають також $\left(\overline{p}\right)$. Такий спосіб запису заперечення не потребує дужок. Якщо не виникає непорозумінь, то зовнішні дужки у формулах можна випускати.

З метою економії дужок операції виконуються в такому порядку (пріоритет операцій): ¬, ∧, ∨, →, ~.

Раніше зазначалося, що висловлення може бути чи то істинне, чи хибне. *Інтерпретувати формулу* – означає приписати їй одне з двох значень істинності.

Семантика – набір правил інтерпретації формул, який має бути композиційним, тобто значення формули має бути функцією значень її складових.

Нехай p та q – формули. Тоді значення істинності формул $\left(\neg p\right)$, $\left(p \wedge q\right)$, $\left(p \vee q\right)$, $\left(p \to q\right)$, $\left(p \sim q\right)$ так пов'язані зі значеннями істинності формул p та q.

1. Формула $\left(\neg p\right)$ істинна, коли p хибна, і хибна, коли формула p істинна. Формулу $\left(\neg p\right)$ читають «не p» чи «це не так, що p» та називають *запереченням* формули p.

2. Формула $\left(p \wedge q\right)$ істинна, якщо p та q водночас істинні. У всіх інших випадках формула $\left(p \wedge q\right)$ хибна. Формулу $\left(p \wedge q\right)$ читають «p і q» й називають *кон'юнкцією* формул p та q.

3. Формула $\left(p \vee q\right)$ хибна, якщо p та q водночас хибні. У всіх інших випадках $\left(p \vee q\right)$ істинна. Формулу $\left(p \vee q\right)$ читають «p або q» й називають *диз'юнкцією* формул p та q.

4. Формула $\left(p \to q\right)$ хибна, якщо формула p істинна, а q – хибна. У всіх інших випадках вона істинна. Формулу $\left(p \to q\right)$ називають *імплікацією*, атом p – припущенням імплікації, а q – її висновком. Оскільки імплікацію використовують у багатьох математичних міркуваннях, то існує багато термінологічних варіантів для формули $\left(p \to q\right)$. Ось деякі з них: «якщо p, то q», «з p випливає q», «p лише тоді, коли q», «p достатнє для q», «q, якщо p», «q необхідне для p».

5. Формула $\left(p \sim q\right)$ істинна, якщо p та q мають однакові значення істинності. У всіх інших випадках формула $\left(p \sim q\right)$ хибна. Формулу $\left(p \sim q\right)$

читають «p тоді й лише тоді, коли q» чи «p еквівалентне q» та називають *еквівалентністю* формул p та q.

Семантику логічних операцій зручно задавати за допомогою таблиць, які містять значення істинності формул залежно від значень істинності їх атомів. Такі таблиці називають *таблицями істинності*. Семантику введених операцій у формі таблиць істинності наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Таблиця істинності основних формул

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \sim q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Приклад 3.5 Знайдемо заперечення висловлювання «Сьогодні п’ятниця». Воно має вигляд «Це не так, що сьогодні п’ятниця». Це речення також можна сформулювати як «Сьогодні не п’ятниця» чи «П’ятниця не сьогодні». Зазначимо, що речення, пов’язані з часовою змінною, – не висловлювання доти, доки не визначено момент часу. Це стосується й змінних у реченнях, які характеризують місце чи особу. Ці речення – не висловлювання, якщо не зазначено відповідного місця чи конкретної особи.

Приклад 3.6 Знайдемо кон’юнкцію висловлювань p та q, де p – висловлювання «Сьогодні п’ятниця», а q – «Сьогодні падає дощ». Кон’юнкція цих висловлювань – «Сьогодні п’ятниця, і сьогодні падає дощ». Воно істинне в дощову п’ятницю й хибне в інший день або в недощову п’ятницю.

Приклад 3.7 Що являє собою диз’юнкція висловлювань p та q з прикладу 3.6? Диз’юнкція висловлювань p та q – висловлювання «Сьогодні п’ятниця чи сьогодні падає дощ». Воно істинне в будь-яку п’ятницю чи в будь-який дощовий день (зокрема, у дощову п’ятницю) і хибне тільки в недощові «не п’ятниці».

Логічна операція «диз’юнкція» відповідає одному з двох способів уживання слова «чи (або)» в українській мові. Диз’юнкція істинна, якщо істинне принаймні одне з двох висловлювань. Розглянемо речення «Лекції з логіки можуть відвідувати студенти, які прослухали курси математичного аналізу чи дискретної математики». Його зміст полягає в тому, що лекції можуть відвідувати як студенти, які прослухали обидва курси, так і ті, хто прослухав тільки один із них. Але є й інше, альтернативне «чи (або)». Розглянемо речення «Лекції з логіки мають відвідувати студенти, які прослухали тільки один із двох курсів – математичного аналізу чи дискретної математики». Зміст цього речення полягає в тому, що студенти, які прослухали обидва ці курси, уже не повинні слухати лекції з логіки. Аналогічно, якщо в меню зазначено «Закуску чи салат подають із першою стравою», то це майже завжди означає, що з першою стравою буде подано чи закуску, чи салат, а не обидві страви. В останніх двох реченнях використано альтернативне «чи (або)»;

його позначають знаком «$\oplus$». Значення істинності цієї операції наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Таблиця істинності формули $(p \oplus q)$

p	q	$(p \oplus q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Імплікацію як логічну операцію називають також *умовним реченням*. Щоб зрозуміти, чому імплікація набуває таких значень істинності, слід сприймати її як зв'язок обов'язкового й очікуваного. Наприклад, розглянемо звернення, адресоване студентам: «Якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку». Це означає, що в разі виконання студентами всіх завдань вони одержать відмінну оцінку. Якщо ж студенти не виконають усіх завдань, то вони можуть отримати оцінку «відмінно», а можуть і не отримати її залежно від інших обставин. Однак якщо студенти зробили всі завдання, а викладач не поставив оцінку «відмінно», то студенти відчуватимуть себе ображеними. Це відповідає ситуації, коли в імплікації $(p \rightarrow q)$ припущення p «Ви виконаєте всі завдання» істинне, а її висновок q «Ви отримаєте відмінну оцінку» хибний.

Розуміння імплікації в логіці дещо відрізняється від його розуміння в природній мові. Наприклад, «Якщо буде сонячно, то ми підемо на пляж» – умовне речення, уживане у звичайній мові. Воно залишається істинним до того моменту, коли настане сонячний день, а ми не підемо на пляж. За означенням імплікації умовне речення «Якщо сьогодні п'ятниця, то 2+3=5» істинне, бо висновок імплікації істинний. При цьому значення істинності припущення в імплікації тут не має відношення до висновку. Імплікація «Якщо сьогодні п'ятниця, то 2+3=6» істинна щодня, крім п'ятниці, хоча висловлювання 2+3=6 хибне. Останні дві імплікації ми не вживаємо в природній мові (хіба що як жарт), оскільки у кожному з відповідних умовних речень немає змістовного зв'язку між припущенням і висновком.

Конструкція «якщо p, то q», використовувана у вигляді «if p then q» в алгоритмічних мовах, відрізняється за змістом від імплікації в логіці. Тут p – висловлювання, а q – програмний сегмент, який складається з одного чи багатьох операторів. Програмний сегмент q виконується, якщо висловлювання p істинне, і не виконується, якщо воно хибне.

Для знаходження значення істинності складного висловлювання потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називають її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлювання, потрібно знаходити значення логічних операцій, визначених табл. 3.1. Послідовність обчислень задають парами дужок. Якщо формула має n атомів, то є 2^n способів надати значення істинності її атомам, тобто така формула має 2^n інтерпретацій, а всі її значення можна звести в таблицю істинності з 2^n рядками. Формулу, яка містить n атомів, називають n - *місною*.

Таким чином, якщо значення істинності простих висловлень є відомі, то значення істинності складних висловлень може бути визначено за допомогою цих таблиць.

Приклад 3.8 Покажемо істинність формули $p \to q \sim \overline{p} \vee q$ за будь-яких $2^2 = 4$ інтерпретацій (табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Таблиця істинності формули $p \to q \sim \overline{p} \vee q$

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$p \to q \sim \overline{p} \vee q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває істинного значення, вона називається *здійсненною*, а якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває хибного значення, вона називається *спростовною*.

Формула p називається *тавтологією* (чи *тотожно-істинною*, чи *загальнозначущою*), якщо за будь-яких інтерпретацій її складових (змінних) вона набуває істинного значення. Позначення тавтології: $\models p$.

Формула називається *протиріччям* (*тотожно-хибною*), якщо за будь-яких інтерпретацій вона набуває хибного значення.

Приклад 3.9 Розглянемо формулу $((p \to q) \wedge p) \to q$, що має $2^2 = 4$ інтерпретацій (табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Таблиця істинності формули $((p \to q) \wedge p) \to q$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Ця формула істинна в усіх інтерпретаціях, тобто являє собою тавтологію.

Приклад 3.10 Розглянемо формулу $((p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q}))$, що має $2^2 = 4$ інтерпретацій (табл. 3.4).

Таблиця 3.4 – Таблиця істинності формули $((p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q}))$

p	q	$p \to q$	$\overline{q}$	$(p \wedge \overline{q})$	$((p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q}))$
0	0	1	1	0	0

0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

Ця формула хибна в усіх інтерпретаціях, тобто являє собою *протиріччя*.

Областю істинності (*областю хибності*) формули називається множина наборів значень змінних, за яких формула набуває істинного (хибного) значення.

Результати цих означень:

– формула p є тавтологією тоді й лише тоді, коли p не є спростовною;

– формула p є тотожно-хибна тоді й лише тоді, коли p не є здійсненною;

– формула p є тавтологією тоді й лише тоді, коли p є тотожно-хибною;

– формула p є тотожно-хибна тоді й лише тоді, коли p тавтологія;

– формула $(p \sim q)$ – тавтологія тоді й лише тоді, коли p та q набувають однакових значень за всіма наборами значень змінних.

3.2 Основні закони алгебри висловлень

Дві формули є *рівносильні* тоді й лише тоді, коли за будь-яких інтерпретацій їхніх змінних вони набувають однакових значень. Позначення: $p = q$.

Теорема 3.1 Дві формули p та q є рівносильні тоді й лише тоді, коли $\models p \sim q$.

Наслідок. Нехай F_1 – формула, в якій є певні входження формули p, і нехай F_2 – результат заміни цього входження формули p на формулу q. Тоді:

якщо $\models p \sim q$, то $\models F_1 \sim F_2$;

якщо $\models p \sim q$ і $\models F_1$ то $\models F_2$.

Теорема 3.2 Якщо $\models p$ і $\models p \to q$, то $\models q$.

Подані теореми дозволяють здійснювати еквівалентні перетворювання формул і здобувати нові загальнозначущі формули.

Наприклад, тавтології можна здобути з рівносильності заміною знака = на знак ~. Скажімо, з рівносильності $p \vee pq = p$ здобуваємо тавтологію $\models p \vee pq \sim p$. Доведення тавтології, наприклад,

$$\models (p \to q)(p \to r) \sim (p \to qr),$$

можна виконати за допомогою перетворень:

$$(p \to q)(p \to r) = (\overline{p} \vee q)(\overline{p} \vee r) = \overline{p} \vee \overline{p}q \vee \overline{p}r \vee qr = \overline{p} \vee qr = p \to qr.$$

Тотожно-істинні формули та формули рівносильності називаються *законами алгебри висловлень* (*властивостями*, *правилами*, *теоремами*). Існує нескінчена множина тавтологій та рівносильностей, а отже, і законів алгебри висловлень. Нижче наведено закони (з використанням пропозиційних змінних), які найчастіше зустрічаються на практиці:

$x \wedge 0 = 0$, $x \wedge 1 = x$, $x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$ – закони сталих (констант);

$x = x$ – закон тотожності;

$\overline{\overline{x}} = x$ – закон подвійного заперечення;

$x \wedge \overline{x} = 0$ – закон протиріччя;

$x \vee \overline{x} = 1$ – закон вилученого третього;

$x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ – комутативність $\vee$ та $\wedge$;

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, – асоціативність $\vee$;

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ – – асоціативність $\wedge$;

$x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$ – перший дистрибутивний закон;

$x \vee y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ – другий дистрибутивний закон;

$x \wedge (x \vee y) = x$ – перший закон поглинання;

$x \vee x \wedge y = x$ – другий закон поглинання;

$x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ – ідемпотентність;

$x \wedge y \vee x \wedge \overline{y} = x$ – перший закон склеювання;

$(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x$ – другий закон склеювання;

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ – закони де Моргана;

$\models (x \to y) \wedge x \to y$ – правило твердження, modus ponens;

$\models (x \to y) \wedge \overline{y} \to \overline{x}$ – правило спростування, modus tollens.

Закони асоціативності дають змогу записувати багатомісні диз'юнкції та кон'юнкції без дужок. За допомогою правил $p \to q = \overline{p} \vee q$ та $p \sim q = (p \to q) \wedge (q \to p)$ можна усувати логічні операції імплікації й еквівалентності з формул. Ці правила можна використовувати також для введення імплікації й еквівалентності.

Приклад 3.11 Застосувавши закони логіки висловлювань, доведемо еквівалентність формул $p \to (q \wedge r)$ і $(p \to q) \wedge (p \to r)$. Запишемо послідовність перетворень і назви використаних законів і правил:

$$\underbrace{p \to (q \wedge r) = \overline{p} \vee (q \wedge r)}_{\text{за правилом усунення імплікації}} = \underbrace{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)}_{\text{за 2 законом дистрибутивності}} =$$

$$= \underbrace{(p \to q) \wedge (p \to r)}_{\text{за правилом введення імплікації}} .$$

3.3 Логічний наслідок

Формула алгебри висловлень q є *логічним наслідком* з формули p (позначається $p \models q$), якщо q є істинне на всіх наборах значень змінних, для яких p є істинна. Наприклад, формула $q = x \vee x$ є логічним наслідком формули $p = x \wedge \left(y \vee \overline{y}\right)$, тобто $x \wedge \left(y \vee \overline{y}\right) \models x \vee x$.

Теорема 3.3 Формула алгебри висловлень q є логічним наслідком з формули p тоді й лише тоді, коли формула $p \to q$ є загальнозначущою, тобто

$$p \models q \sim \models p \to q .$$

Логічний наслідок можна узагальнити на сукупності формул: формула алгебри висловлень q є *логічним наслідком формул* $p_1, p_2, ..., p_n$ та позначається як $p_1, p_2, ..., p_n \models q$, якщо для довільного набору значень з істинності всіх $p_i, i = \overline{1, n}$, на цьому наборі випливає істинність q. Наприклад, розглядаючи таблицю істинності, здобудемо три ілюстрації до наведеного означення:

$x, z, x \wedge y \to \overline{z} \models \overline{y}$ – 6-й рядок;

$x, x \to z, z \models x \vee y \to z$ – 6-й та 8-й рядки;

$x \wedge y \to \overline{z}$, $x \to z \models \overline{x \wedge y}\ x \wedge y \to \overline{z}$ – 1, 4 та 6-й рядки.

Таблиця 3.5 – Таблиця істинності для ілюстрації логічного наслідку формул сукупності

x	y	z	$x \wedge y \to \overline{z}$	$\overline{y}$	$x \to z$	$x \vee y \to z$	$\overline{x \wedge y}$
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Теорема 3.4 Формула алгебри висловлень q є логічним наслідком формул $p_1, p_2, ..., p_n$ тоді й лише тоді, коли формула $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q$ є загальнозначущою, тобто $p_1, p_2, ..., p_n \models q \sim \models p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q$.

Формули алгебри висловлень можна застосовувати для перевірки правильності логічних суджень, незважаючи на конкретний зміст висловлень.

Що ж стосується «здорового глузду», то він має виявлятися при використовуванні законів логіки висловлень у її конкретних додатках. Наприклад, висловлення «$A = 100 < 10$» – хибне. Однак воно стає істинним, якщо вважати, що число 100 записане у двійковій системі числення, а 10 – у десятковій.

Приклад 3.12 Перевірити правильність наступного судження. Якщо замінити мікросхему (A), телевізор працюватиме (B) за умови, що напругу увімкнено (C). Мікросхему замінили, а напругу не увімкнули. Отже, телевізор не працюватиме.

Розв'язання. Це судження можна записати у вигляді

$$A \to B \wedge C, \qquad A, \overline{C} \models \overline{B}.$$

Оскільки формули *A*, *B*, *C* не містять підформул, то можна перейти до відповідних пропозиційних змінних *x*, *y*, *z*.

Тоді даний логічний висновок набуде більш зручного вигляду:

$$x \to y \wedge z, \qquad x, \overline{z} \models \overline{y}.$$

Судження буде слушним, якщо формула

$$(x \to y \wedge z) \wedge x \wedge \overline{z} \to \overline{y}$$

є загальнозначуща. При викладках скористаємося основними законами алгебри висловлень:

$$(x \to y \wedge z) \wedge x \wedge \overline{z} \to \overline{y} = \overline{(\overline{x} \vee y \wedge z) \wedge x \wedge \overline{z}} \vee \overline{y} = \overline{0} \vee \overline{y} = 1 \vee \overline{y} = 1.$$

Формула є загальнозначущою, отже, судження є правильне.

Приклад 3.13 Я піду на лекцію (x) або залишуся в барі й вип'ю кави (y). Я не піду на лекцію. Отже, я залишуся й вип'ю кави.

Запишемо логічне слідування:

$$x \vee y, \overline{x} \models y.$$

Перевіримо загальнозначимість:

$$(x \vee y) \wedge \overline{x} \to y = \overline{(x \vee y) \wedge \overline{x}} \vee y = \overline{x}\,\overline{y} \vee x \vee y = 1 \vee x = 1.$$

Судження є правильне.

3.4 Нормальні форми логіки висловлювань

Літералом називають атом або його заперечення. Приклади літералів – p, $\overline{q}$, r.

Літерал називають *позитивним*, якщо він не має знака заперечення, і *негативним*, якщо має. Пару літералів $\{p, \overline{p}\}$ називають *контрарною*.

Говорять, що формулу p записано в *кон'юнктивній нормальній формі* (КНФ), якщо вона має вигляд

$$p = p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \quad (n \geq 1),$$

де кожна з формул $p_1, p_2, ..., p_n$ літерал або диз'юнкція літералів і всі формули p_i, $i = \overline{1,n}$ різні.

Приклад 3.14 Нехай p, q і r – атоми. Тоді $f=\left(p\vee\overline{q}\vee\overline{r}\right)\wedge\left(\overline{p}\vee q\right)$ – формула, записана в КНФ. У ній $f_1=\left(p\vee\overline{q}\vee\overline{r}\right)$ і $f_2=\left(\overline{p}\vee q\right)$, тобто f_1 – диз'юнкція літералів p, $\overline{q}$ і $\overline{r}$, а f_2 – диз'юнкція літералів $\overline{p}$ і q.

Говорять, що формулу p записано в *диз'юнктивній нормальній формі* (ДНФ), якщо вона має вигляд

$$p=p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n\ \ (n\geq 1),$$

де кожна з формул $p_1, p_2, \ldots, p_n$ літерал або кон'юнкція літералів і всі формули $p_i, i=\overline{1,n}$ різні.

Приклад 3.15 Нехай p, q і r – атоми. Тоді $f=\left(\overline{p}\wedge q\right)\vee\left(p\wedge\overline{q}\wedge\overline{r}\right)$ – формула, записана в ДНФ. У ній $f_1=\left(\overline{p}\wedge q\right)$ і $f_2=\left(p\wedge\overline{q}\wedge\overline{r}\right)$, тобто f_1 – кон'юнкція літералів $\overline{p}$ і q, а f_2 – кон'юнкція літералів p, $\overline{q}$ і $\overline{r}$.

Довільну формулу можна перетворити в одну з нормальних форм, застосувавши закони логіки висловлювань. Для побудови нормальних форм потрібно виконати таку послідовність еквівалентних перетворень.

Крок 1. Застосувати правила $p\rightarrow q=\overline{p}\vee q$ та $p\sim q=(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ для усунення логічних операцій «$\rightarrow$» та «~».

Крок 2. Застосувати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3. Застосувати відповідні закони дистрибутивності для побудови нормальної форми. Щоб побудувати КНФ, потрібно використати дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції. Для побудови ДНФ слід застосувати дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції.

Приклад 3.16 Побудувати ДНФ формули $\left(\left(p\vee\overline{q}\right)\rightarrow r\right)\wedge\left(\overline{r}\rightarrow s\right)$.

Розв'язання. Наведемо послідовність кроків та зазначимо застосовані закони логіки висловлювань.

$$\underset{\text{за правилом усунення імплікації}}{\left(\left(p\vee\overline{q}\right)\rightarrow r\right)\wedge\left(\overline{r}\rightarrow s\right)}=\underset{\text{за законом де Моргана}}{\left(\overline{\left(p\vee\overline{q}\right)}\vee r\right)\wedge\left(\overline{\overline{r}}\vee s\right)}=$$

$$=\underset{\text{за законом подвійного заперечення}}{\left(\left(\overline{p}\wedge\overline{\overline{q}}\right)\vee r\right)\wedge\left(r\vee s\right)}=\underset{\text{за 1 законом дистрибутивності}}{\left(\left(\overline{p}\wedge q\right)\vee r\right)\wedge\left(r\vee s\right)}=$$

$$=\left(\left(\overline{p}\wedge q\right)\wedge\left(r\vee s\right)\right)\vee\left(r\wedge\left(r\vee s\right)\right)=$$

за 1 законом дистрибутивності

$$=\left(\left(\overline{p}\wedge q\wedge r\right)\vee\left(\overline{p}\wedge q\wedge s\right)\right)\vee\left(\left(r\wedge r\right)\vee\left(r\wedge s\right)\right)=$$

за законом асоціативності

$$=\left(\overline{p}\wedge q\wedge r\right)\vee\left(\overline{p}\wedge q\wedge s\right)\vee\left(r\wedge r\right)\vee\left(r\wedge s\right)=$$

за законом асоціативності

$$=\underset{\text{за законом ідемпотентності}}{\left(\overline{p}\wedge q\wedge r\right)\vee\left(\overline{p}\wedge q\wedge s\right)\vee r\vee\left(r\wedge s\right)}.$$

Ми одержали ДНФ. Її можна спростити, якщо двічі використати закон поглинання: диз'юнктивний член r поглинає члени $\left(\overline{p}\wedge q\wedge r\right)$ і $\left(r\wedge s\right)$. Отже, $\left(\overline{p}\wedge q\wedge s\right)\vee r$ – інша ДНФ заданої формули. Останні міркування свідчать, що ДНФ, загалом кажучи, не єдина.

Приклад 3.17 Побудувати КНФ формули $\left(p\wedge\left(q\to r\right)\right)\to s$.

Розв'язання. Наведемо послідовність кроків та зазначимо застосовані закони логіки висловлювань.

$$\underset{\text{за правилом усунення імплікації}}{\left(p\wedge\left(q\to r\right)\right)\to s} = \underset{\text{за законом де Моргана}}{\overline{\left(p\wedge\left(\overline{q}\vee r\right)\right)}\vee s} =$$

$$= \underset{\text{за законом асоціативності}}{\left(\overline{p}\vee\overline{\left(\overline{q}\vee r\right)}\right)\vee s} = \underset{\text{за законом де Моргана}}{\overline{p}\vee\overline{\left(\overline{q}\vee r\right)}\vee s} = \underset{\text{за законом подвійного заперечення}}{\overline{p}\vee\left(\overline{\overline{q}}\wedge\overline{r}\right)\vee s} =$$

$$= \underset{\text{за законом комутативності}}{\overline{p}\vee\left(q\wedge\overline{r}\right)\vee s} = \underset{\text{за законом асоціативності}}{\overline{p}\vee s\vee\left(q\wedge\overline{r}\right)} = \underset{\text{за законом дистрибутивності}}{\left(\overline{p}\vee q\vee s\right)\wedge\left(\overline{p}\vee\overline{r}\vee s\right)}.$$

Ми одержали шукану КНФ.

3.5 Математична індукція

У різних сферах своєї діяльності (науці, побуті чи виробництві) людина у своїх логічних висновках застосовує дедуктивний або індуктивний підходи, які ґрунтуються на поняттях дедукції й індукції. *Дедукція* (лат. deduction – висновок) являє собою перехід від загального до окремого, а індукція (лат. induction – наведення) – перехід від окремого до загального. Загальним для цих підходів є те, що вони доводять істинність чи хибність деяких тверджень, які до цього сприймались як гіпотези, тобто як *передбачувані припущення*.

Ці твердження поділяються на *загальні* й *окремі*. Твердження, що всі натуральні парні числа діляться на 2, є загальним, а твердження, що ціле число $x=6$ ділиться на 2, є окремим. Важливість дедукції полягає в тому, що вона дозволяє на основі загальних тверджень доводити окремі твердження. Дійсно, якщо парні числа діляться на 2, а число 6 парне, то звідси випливає, що число 6 повинне ділитися на 2.

Індукція на відміну від дедукції виходить з окремих тверджень і тому не завжди може переходити від них до загальних тверджень. Але все ж таки в багатьох випадках на її основі робляться близькі до достовірних вірогідні припущення. Наприклад, коли за деякими зразками визначаються властивості золота, то ці властивості людина поширює на все інше золото, яке є в світі. Такий підхід застосовується не лише щодо золота, але й щодо інших хімічних елементів, і поки що він себе виправдовував. Хоча повної гарантії такий підхід усе ж таки не дає, і тому він є неповним. Це ж саме стосується й багатьох законів природи. Їх людина не доводить, а виявляє. Але, крім такої неповної індукції, у математиці окремо використовується ще повна індукція.

Звичайна індукція являє собою індуктивний підхід до науки взагалі, а не тільки до математики і є неповною індукцією, оскільки не дає можливості одержувати завжди достовірну інформацію про властивості, які досліджуються.

Ця індукція хоча й широко використовується в математиці, але не завжди дає вірний і кінцевий висновок про істинність або хибність того чи іншого математичного твердження, оскільки вона створює його на основі певних окремих результатів, одержаних при дослідженні тієї чи іншої математичної властивості. Це твердження можна вважати дійсним лише в разі дослідження всіх без винятку можливих окремих результатів, що буває тільки тоді, коли їх кількість є скінченною. У випадку, коли кількість можливих результатів нескінченна, отримати висновок про істинність або хибність твердження щодо тієї чи іншої властивості за допомогою звичайної індукції неможливо в принципі.

Нехай маємо тричлен $x^2 + x + 41$. Якщо підставити в нього замість x нуль, то одержимо просте число 41; якщо одиницю, то – 43; якщо 2,3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, то – числа 47, 53,61,71,83,87, 113, 131, 151 відповідно. Усі вони прості числа. Здасться, можна припустити, що в разі підстановки в цей тричлен будь-якого цілого додатного числа завжди в результаті будемо одержувати просте число. Однак це не так. Уже в разі $x = 40$ зазначений тричлен ділиться на 41, а за умови $x = 41$ будемо мати $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$, тобто тричлен ділиться на 41. У цьому небезпека звичайної індукції, оскільки вона не гарантує позитивного результату в будь-якому випадку.

Повна, або *цілковита*, *індукція* – це математична індукція, яка дозволяє робити достовірні узагальнення на основі неповної індукції. Тобто для доведення теореми з допомогою математичної індукції потрібно, щоб результат цієї теореми з деякою вірогідністю вже був встановлений раніше у вигляді гіпотези. Потрібно лише далі для неї довести, що цей результат є достовірно загальним для задач даного типу. Тобто доведенню тієї чи іншої теореми, яка відображає розв'язок відповідної математичної задачі, повинна передувати гіпотеза, яку й потрібно довести або відкинути. Це означає, що математична індукція ґрунтується на звичайній індукції.

Математична індукція на протилежність звичайній гарантує стовідсоткову вірогідність, тобто достовірність одержаних з її допомогою результатів. Цей метод стосується тільки теорем, що відображають загальні властивості натуральних чисел 1, 2,..., та інших розділів математики, які спираються на натуральні числа. Наприклад, до таких розділів належить арифметика цілих чисел та теорія раціональних чисел, що ґрунтується на ній. Існують також розділи математики, які можуть бути інтерпретовані в термінах арифметики, наприклад, евклідова геометрія. Відповідно, у цих розділах також може бути використаний метод математичної індукції. Математична індукція, яка ще має назву *індукція за побудовою*, використовується також для доведення логічних формул.

Основою метода математичної індукції є її принцип, що поширюється на будь-які твердження $P(n)$, які стосуються чисел $n = 1, 2, \dots$. Сформулюємо цей принцип у вигляді теореми.

Теорема 3.5 Будь-яке твердження $P(n)$ дійсне для будь-якого n у випадку, якщо воно дійсне для $n = 1$, та із істинності цього твердження для будь-якого довільного $n = k$ випливає його істинність для $n = k + 1$.

Ця теорема розпадається на дві леми, перша з яких (**лема 1**) вимагає, щоб твердження $P(n)$ було справедливим для $n = 1$, а друга (**лема 2**) – для $n = k + 1$, за умов, що твердження $P(n)$ справедливе для $n = k$. Лише в цьому випадку твердження $P(n)$ буде справедливе для будь-якого n.

Доведення. Припустимо, що умови лем 1 і 2 виконуються. Тоді твердження $P(n)$відповідно до леми 1 дійсне для $n = k = 1$. Відповідно до другої леми $P(n)$ дійсне для $n = k + 1 = 1 + 1 = 2$. Але якщо $P(n)$ дійсне для $n = k = 2$, то відповідно до тієї самої другої леми воно буде дійсне і для $n = k + 1 = 2 + 1 = 3$ і далі для $n = 4$ тощо необмежено для всіх можливих n. *Теорему доведено*.

Із теореми випливає *метод математичної індукції*, що складається із виконання нижченаведених пунктів, які стосуються одержання твердження $P(n)$:

1. Висувається нова гіпотеза у вигляді твердження $P(n)$ про деяку математичну властивість, що може бути як істинною, так і хибною.

2. Здійснюється перевірка гіпотези $P(n)$ для $n = 1$. Якщо $P(n = 1)$ підтверджується, то відбувається перехід до наступного пункту 3. А якщо ні, то гіпотеза, що перевіряється, вважається неправильною й виконується перехід до пункту 1.

3. Здійснюється доведення гіпотези $P(n)$ для $n = k + 1$ за умови припущення, що $P(n = k)$ істинне.

4. Якщо $P(n = k + 1)$ істинне, то доведення гіпотези $P(n)$ для будь-якого натурального n одержане. Якщо $P(n = k + 1)$ хибне, то здійснюється перехід до пункту 1.

Перший крок наведеного алгоритму являє собою звичайну (неповну) індукцію, яка реалізує індукційний підхід до науки в цілому.

Другий і третій кроки алгоритму є наслідком дії принципу математичної індукції та реалізують його практично. Принцип математичної індукції гарантує за умови, якщо другий і третій кроки методу виконані, що твердження $P(n)$ дійсне. При цьому другий крок ґрунтується на лемі 1 і є основою (базою) метода математичної індукції, а третій – на лемі 2, яка визначає індукційний крок (перехід) методу.

Слід ще раз звернути увагу на те, що основою метода математичної індукції є принцип математичної індукції, який твердить, що якщо доведені леми 1 і 2 для твердження $P(n)$, то це твердження істинне для будь-якого $n = 1, 2, \dots$. Тому завданням метода є доведення лем 1 і 2 для $P(n)$.

Приклад 3.18 Доведіть, що при кожному натуральному n стверджується рівність

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 .$$

Розв'язання.

Якщо $n = 1$, то $1 = 1^2$.

Припустимо, що при $n = k$, рівність $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ правильна.

Якщо $n = k + 1$, то

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2 ,$$

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 ,$$

$$(k + 1)^2 = (k + 1)^2 .$$

Індуктивний перехід правильний, а тому рівність доведено.

Слід особливо підкреслити, що для правильного використання метода математичної індукції обов'язково потрібно доводити обидві леми 1 і 2, оскільки лема 1 є основою для проведення індукційних кроків у методі, що розглядається, а лема 2 дозволяє виконувати правильний перехід від випадку з $n = k$ до випадку з $n = k + 1$, який іде за ним. Якщо лема 1 не доведена, то тоді відсутня основа для проведення індукційних кроків. У результаті за допомогою леми 2 можна довести помилкову гіпотезу $P(n)$.