4 КОМБІНАТОРИКА

У комбінаторному аналізі (комбінаториці) вивчають об'єкти зі скінченної множини $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ та їх властивості, а також визначають кількість об'єктів із певними властивостями. Розглядають також твердження (принципи), які використовують в різних задачах. На них ґрунтуються важливі методи математичного доведення, широко застосовувані в теорії скінченних автоматів та інших розділах.

4.1 Основні правила комбінаторного аналізу. Розміщення та сполучення

Почнемо з формулювання двох основних правил комбінаторики: правила суми та правила добутку.

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y – n_2 способами, то можна вибрати або x, або y $n_1 + n_2$ способами.

Приклад 4.1 Студент має вибрати тему курсової роботи зі списку, розміщеного на трьох аркушах. Аркуші містять відповідно 20, 15 і 17 тем. З якої кількості можливих тем студент робить свій вибір?

Розв'язання. За правилом суми кількість тем для вибору становить $20 + 15 + 17 = 52$.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об'єктів (x, y) у зазначеному порядку можна вибрати $n_1 n_2$ способами. Це правило можна пояснити інакше. Нехай якусь процедуру можна виконати розв'язавши два завдання. Якщо є n_1 способів розв'язати перше завдання та n_2 способів розв'язати після цього друге завдання, то всю процедуру можна виконати $n_1 n_2$ способами.

Приклад 4.2 В одній із версій мови БЕЙСІК ім'я змінної – це рядок з одного чи двох символів, якими можуть бути 26 букв латинського алфавіту та 10 цифр. Першим символом має бути буква. Крім того, не можна використовувати п'ять двосимвольних рядків, які зарезервовані для спеціального використання. Знайти, скільки різних імен змінних є в цій версії мови БЕЙСІК.

Розв'язання. Нехай V – величина, яку потрібно обчислити, V_1 – кількість односимвольних імен, V_2 – двосимвольних. За правилом суми всього імен $V = V_1 + V_2$. Очевидно, що $V_1 = 26$; за правилом добутку $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$. Отже, $V = 26 + 931 = 957$.

Розглянемо основні комбінаторні об'єкти – розміщення та сполучення, попередньо означивши важливе поняття вибірки.

Нехай задано скінченну непорожню множину $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ і виконано r таких кроків.

Крок 1. Із множини *A* вибирають якийсь елемент a_{i_1}.

Крок 2. Із множини *A* чи з $A\setminus\{a_{i_1}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_2}.

Крок r. Якщо $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{r-1}}$ – елементи, які вибрані на перших $r-1$ кроках ($r\geq 3$), то на цьому кроці вибирають якийсь елемент a_{i_r} із множини чи $A\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{r-1}\{a_{i_k}\}$. Тоді елементи $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_r}$ утворюють *вибірку обсягом* r, або r-*вибірку*, із множини *A*.

Вибірку називають *впорядкованою*, якщо задано порядок її елементів, а ні – то *невпорядкованою*. Зрозуміло, що впорядкована r-вибірка – це кортеж (вектор) з r компонентами, і тому її позначають $(b_1, b_2, ..., b_r)$, $b_i\in A, i=\overline{1, r}$. Невпорядковану r- вибірку позначатимемо як $[b_1, b_2, ..., b_r]$, $b_i\in A, i=\overline{1, r}$.

Упорядковані r- вибірки з n- елементної множини називають *розміщеннями* з n елементів по r, а невпорядковані – *сполученнями* з n елементів по r. Використовують також поняття r- розміщення й r-сполучення. Розглянемо два способи вибору елементів.

Згідно з першим способом вибору на кожному кроці вибирають елемент з усієї множини *A*. Отже, один і той самий елемент із множини *A* може зустрітись у вибірці декілька разів. Такі вибірки називаються *вибірками з повтореннями*.

У разі застосування другого способу вибраний елемент вилучають із множини *A*. Це означає, що на кожному j-му кроці $(1<j\leq k)$ вибирають елемент із множини $A\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{j-1}\{a_{i_k}\}$, і вибірка не містить однакових елементів. Такі вибірки називають *вибірками без повторень*.

Приклад 4.3 Задано множину $A=\{a, b, c\}$, тобто $n=3$.

Розв'язання. Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два, тобто $r=2$:

$$(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b);$$

розміщення з повтореннями з трьох елементів по два:

$$(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c);$$

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

$$[a, b], [a, c], [b, c];$$

сполучення з повтореннями із трьох елементів по два:

$$[a, b], [a, c], [b, c], [a, a], [b, b], [c, c].$$

Зазначимо, що сполучення без повторень з n елементів по r – це просто r- елементні підмножини множини з n елементів; отже, їх можна записати так: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Сполучення з повтореннями – це, узагалі кажучи, не множина у звичайному розумінні: її елементи можуть повторюватись, тобто зустрічатися більше одного разу.

4.2 Обчислення кількості розміщень і сполучень

Кількість усіх розміщень без повторень з n елементів по r позначають як A_n^r, де r і n – невід'ємні цілі числа, причому $r \le n$. Кількість різних розміщень із повтореннями з n елементів по r позначають як $\tilde{A}_n^r$. Тут r і n – будь-які невід'ємні цілі числа. Кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по r позначають як C_n^r, де r і n – невід'ємні цілі числа, причому $r \le n$. Кількість усіх сполучень із повтореннями з n елементів по r позначимо як $\tilde{C}_n^r$, де r і n – будь-які невід'ємні цілі числа. Числа C_n^r називають *біноміальними коефіцієнтами*. Доведемо, що

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{4.1}$$

$$\tilde{A}_n^r = n^r, \tag{4.2}$$

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \tag{4.3}$$

$$\tilde{C}_n^r = C_{n+r-1}^r. \tag{4.4}$$

Доведемо рівність (4.1). Розглянемо якесь розміщення $(b_1, b_2, ..., b_r)$ без повторень з n елементів по r. Ми можемо взяти b_1 як будь-який з n елементів, як b_2 – будь-який з $(n-1)$ елементів, що залишились, і продовжити цей процес. Отже, для b_r залишається $(n+r-1)$ можливостей вибору. Використавши правило добутку, переконуємось у тому, що рівність (4.1) правильна.

Рівність (4.2) також справджується, бо в розміщенні з повтореннями $(b_1, b_2, ..., b_r)$ для кожного елемента $b_i, i = \overline{1,r}$ є n незалежних можливостей вибору.

Доведемо рівність (4.3). Розглянемо якесь сполучення $[b_1, b_2, ..., b_r]$ без повторень з n елементів по r. Виявимо, скільки можна отримати різних розміщень без повторень з r елементів по r із цього сполучення як з r-елементної множини. За формулою (4.1) дістанемо $A_r^r = r(r-1)\cdot ...2\cdot 1 = r!$. Очевидно, що в разі $[b_1, b_2, ..., b_r] \ne [c_1, c_2, ..., c_r]$ із двох сполучень без повторень $[b_1, b_2, ..., b_r]$ і $[c_1, c_2, ..., c_r]$ не можна одержати однакових розміщень без повторень з r елементів по r. Отже, $A_n^r = r!\cdot C_n^r$, і рівність (4.3) доведено.

Нарешті, доведемо рівність (4.4). Замість n-елементної множини $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ розглянемо множину $A'=\{1,2,...,n\}$ також з n елементів. Кожну невпорядковану r-вибірку з множини A' можна записати у вигляді $[m_1, m_2, ..., m_r]$, де $m_1 \le m_2 \le ... \le m_r$, оскільки порядок елементів не суттєвий. Тоді $[m_1+0, m_2+1, ..., m_r+r-1]$ – сполучення без повторень з $(n+r-1)$ елементів по r. Розглянемо відображення Γ множини всіх сполучень із повтореннями з n елементів по r на множину всіх сполучень без повторень з $(n+r-1)$ елементів по r. $\Gamma([m_1, m_2, ..., m_r])=[m_1+0, m_2+1, ..., m_r+r-1]$. Два сполучення з повтореннями рівні, якщо вони складаються з однакових елементів і кратності цих елементів збігаються. Якщо $[m_1, m_2, ..., m_r]\ne[m_1', m_2', ..., m_r']$, то й $[m_1+0, m_2+1, ..., m_r+r-1]\ne[m_1'+0, m_2'+1, ..., m_r'+r-1]$. Більше того, якщо $[n_1, n_2, ..., n_r]$ – сполучення без повторень з $(n+r-1)$ елементів по r, де $n_1<n_2<...<n_r$, т $[n_1, n_2-1, ..., n_r+r-1]$ – елемент множини сполучень із повтореннями з n елементів по r. Отже, Γ – бієктивне відображення множини всіх сполучень із повтореннями з n елементів по r на множину всіх сполучень без повторень з $(n+r-1)$ елементів по r. Рівність (4.4) доведено.

4.3 Перестановки

Перестановка з n елементів – це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Перестановки з n елементів називають також n-*перестановками*. Окремі n-перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як P_n. Формулу для P_n одержують із формули (4.1) для кількості розміщень без повторень:

$$P_n = A_n^n = n!. \tag{4.5}$$

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями). Точніше, нехай є n елементів k різних типів, а число n_j ($j=\overline{1,k}$) – кількість елементів j-го типу. Очевидно, що $n_1+n_2+...+n_k=n$. Перестановки з n елементів за такої умови називають *перестановками з повтореннями*. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$. Щоб знайти явний вираз для $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$, візьмемо окрему перестановку та замінимо в ній усі однакові елементи різними. Тоді кількість різних перестановок, котрі можна отримати з узятої однієї перестановки, дорівнює $n_1!n_2!...n_k!$. Якщо зробити це для кожної перестановки, то одержимо $n!$ перестановок. Отже, $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)n_1!n_2!...n_k!=n!$, звідки

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}. \qquad (4.6)$$

Приклад 4.4 Знайдемо кількість слів (рядків), які можна утворити, переставляючи букви слова PRODUCT. Оскільки жодна буква тут не повторюється, то можна утворити $P_7 = 7! = 5040$ слів.

Приклад 4.5 Знайдемо, скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова SUCCESS. У цьому слові є повторні входження букв, тому скористаємося формулою для перестановок із повтореннями:

$$P_7(3, 2, 1, 1) = \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} = 420 \text{ слів.}$$

4.4 Біном Ньютона

Біноміальними коефіцієнтами називають числа $C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ – кількість сполучень з n елементів по r. Розглянемо деякі властивості біноміальних коефіцієнтів.

1. Нехай n і r – невід'ємні цілі числа, $r \le n$. Тоді $C_n^r = C_n^{n-r}$. Справді,

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = C_n^r.$$

2. *Рівність Паскаля*: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Позначимо як $S_{n,k}$ к множину всіх сполучень з елементів $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n\}$ по k елементів; як $S_{n-1,k}$ – відповідно з елементів $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ по k; $S_{n-1,k-1}$ – з елементів $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ по $k-1$. Кожному сполученню з $S_{n,k}$, яке містить елемент a_n, відповідає сполучення з $S_{n-1,k-1}$. Якщо ж сполучення з $S_{n,k}$ не містить a_n, то йому відповідає сполучення з $S_{n-1,k}$. Отже, існує бієкція між множинами $S_{n,k}$ й $S_{n-1,k} \cup S_{n-1,k-1}$. Оскільки очевидно, що $S_{n-1,k} \cap S_{n-1,k-1} = \varnothing$, то $|S_{n,k}| = |S_{n-1,k}| + |S_{n-1,k-1}|$, тобто $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Отримане рекурентне співвідношення дає змогу побудувати таблицю для чисел C_n^k, яку називають *трикутником Паскаля* (табл. 4.1).

У рядку n, $n = 0, 1, ...$ трикутника Паскаля стоять коефіцієнти C_n^k, до того ж кожен коефіцієнт, крім двох крайніх, які дорівнюють 1, дорівнює сумі двох коефіцієнтів з попереднього рядка, які стоять над ним (див. табл. 4.1).

Сума біноміальних коефіцієнтів одного рядка дорівнює 2^n і, крім того, сума біноміальних коефіцієнтів, які стоять на непарних місцях, дорівнює їх сумі на парних. У свою чергу, кожна з цих сум дорівнює 2^{n-1}.

Числовий трикутник відповідно до властивості симетрії біноміальних коефіцієнтів строго симетричний відносно його середньої лінії. Тому при використанні його для обчислення біноміальних коефіцієнтів достатньо побудувати будь-яку одну його половину.

Таблиця 4.1 – Трикутник Паскаля

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
0	1										…
1	1	1									…
2	1	2	1								…
3	1	3	3	1							…
4	1	4	6	4	1						…
5	1	5	10	10	5	1					…
6	1	6	15	20	15	6	1				…
7	1	7	21	35	35	21	7	1			…
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		…
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

3. Послідовність (p_n) дійсних чисел називають *унімодальною*, якщо існує такий натуральний номер m, що $p_0 < p_1 < ... < p_m$; $p_m \ge p_{m+1} > p_{m+2} > ... > p_n$, тобто:

– послідовність строго зростає на відрізку $[0, m]$, $m > 0$;

– послідовність строго спадає на відрізку $[m+1, n]$, $m+1 < n$;

– максимальне значення досягається не більше ніж у двох точках: m і, можливо, $m+1$.

Нагадаємо, що як $[x]$ позначають найбільше ціле число, яке менше чи дорівнює x (*цілу частину* числа x); наприклад, $[3,14] = 3$, $[-3,14] = -4$.

Теорема 4.1 За фіксованого n послідовність біноміальних коефіцієнтів (C_n^k), $k = \overline{0,n}$, унімодальна, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. У разі парного n максимум досягається в точці $m = \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$, а в разі непарного – у двох точках: $m = \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$ і

$m+1=\dfrac{n+1}{2}$. Вказівка для доведення: оцінити відношення двох сусідніх членів послідовності $\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}}=\dfrac{n-k+1}{k}$.

4. $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+...+C_{k-1}^{k-1}=\sum\limits_{i=0}^{n-k}C_{k+i-1}^{k-1}$.

Доведення. На основі рівності Паскаля запишемо рівності:

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}, \qquad C_{n-1}^k=C_{n-2}^k+C_{n-2}^{k-1}, \qquad \ldots, \qquad C_{k+2}^k=C_{k+1}^k+C_{k+1}^{k-1},$$
$$C_{k+1}^k=C_k^k+C_k^{k-1}.$$

Оскільки $C_k^k=C_{k-1}^{k-1}=1$, то, після підстановки виразу для C_{k+1}^k у вираз для C_{k+2}^k, отримаємо:

$$C_{k+2}^k=C_k^k+C_k^{k-1}+C_{k+1}^{k-1}=C_{k+1}^{k-1}+C_k^{k-1}+C_k^k=C_{k+1}^{k-1}+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}.$$

Після того, як підставимо коефіцієнти для C_{k+2}^k у попередню йому рівність $C_{k+3}^k=C_{k+2}^k+C_{k+2}^{k-1}$ одержимо, що

$$C_{k+3}^k=C_{k+2}^{k-1}+C_{k+1}^{k-1}+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}.$$

Потім таку ж саму операцію виконаємо для решти коефіцієнтів безпосередньо до C_{n-1}^k і в результаті отримаємо необхідну рівність, яка доводить дану теорему.

5. $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-2}^{k-1}+...+C_{n-k+1}^2+C_{n-k}^1+C_{n-k-1}^0=\sum\limits_{i=0}^{k}C_{n-k+i-1}^i$.

Доведення. На основі рівностей

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1} \text{ и } C_{n-k-1}^0=C_{n-k}^0=1$$

маємо:

$$C_{n-k}^1+C_{n-k}^0=C_{n-k+1}^1,$$

потім

$$C_{n-k+1}^2+C_{n-k+1}^1=C_{n-k+2}^2$$

і гак до одержання в кінцевому підсумку необхідного результату.

6. При $k\neq 0$, $n\neq 0$

$$C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}.$$

Доведення.

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Оскільки відношення

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=C_{n-1}^{k-1},$$

то

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

Наслідок 1 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Наслідок 2 $\frac{1}{n} C_n^k = \frac{1}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

7. При $k \neq 0$, $n \neq 0$

$$C_n^k = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^k.$$

Доведення. Відповідно до властивості 6

$$C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{n-k-1}.$$

Унаслідок властивості 1, згідно з якою

$$C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^k,$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^k.$$

8. *Рівність Вандермонда.* Нехай m, n, r – невід'ємні цілі числа, причому $r \leq \min\{m, n\}$. Тоді $C_{n+m}^r = \sum_{k=0}^{r} C_m^{r-k} C_n^k$. Вказівка для доведення: скористатися правилом добутку.

Теорема 4.2 (біноміальна) Нехай x та y – змінні, n – додатне ціле число. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j.$$

Доведення. Дамо комбінаторне доведення цієї теореми [1]. Оскільки $x^j y^{n-j}$ отримано внаслідок j-кратного вибору x і $(n-j)$-кратного вибору y з n співмножників у виразі $(x+y)^n$, то коефіцієнт при $x^j y^{n-j}$ дорівнює кількості способів j-кратного вибору x з n співмножників, тобто C_n^j. Друга рівність випливає з того, що $C_n^j = C_n^{n-j}$.

Легко переконатись, що $(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^{n-j} y^j$.

Приклад 4.6 Знайдемо розклад виразу $(x+y)^4$. Скориставшись біноміальною теоремою, можемо записати:

$$(x+y)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4 =$$
$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Біноміальні коефіцієнти можна брати з трикутника Паскаля чи обчислювати за формулою (4.3).

Приклад 4.7 Визначимо коефіцієнт при $x^{12}y^{13}$ в розкладі $(x+y)^{25}$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює

$$C_{25}^{13} = \frac{25!}{13!\,12!} = 5200300.$$

Властивості бінома Ньютона:

1. Кількість членів розкладу на 1 більше за показник n.
2. Показники степеня числа x зменшуються, а числа y збільшуються від члена до члена на 1.
3. Сума показників x і y в кожному члені дорівнює n.
4. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Доведення. Виходячи з того, що, при $x = y = 1$, з одного боку

$$(x+y)^n = (1+1)^n = 2^n,$$

а з іншого

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

5. Сума біноміальних коефіцієнтів бінома Ньютона, які займають парні місця, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, які займають непарні місця, і кожна з них дорівнює 2^{n-1}.

Доведення. Припустимо, що для бінома Ньютона $x = 1$ і $y = -1$. Тоді

$$(x+y)^n = (1-1)^n = 0^n = 0,$$

і оскільки

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k},$$

то і

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = 0.$$

Доданки $C_n^k x^k y^{n-k}$ у наведеному вище виразі приймають у випадку, якщо k парне, додатні значення, які дорівнюють $C_n^{k'}$, а у випадку, якщо k непарне, від'ємне: $-C_n^{k''}$, де $k' = 0, 2, 4, \ldots$; $k'' = 1, 3, 5, \ldots$; k' – значення верхнього параметра коефіцієнтів, які стоять на парних місцях, а k'' – значення верхнього параметра коефіцієнтів, які стоять на непарних місцях. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} - \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 0,$$

де n' – максимальне значення k'; n'' – максимальне значення k''.

З одержаної рівності випливає, що

$$\sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} = \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''}.$$

Оскільки з виразу, який наведений вище, виходить, що вказані в ньому суми дорівнюють одна одній, а з властивості 4 при $x = y = 1$, що

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} + \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 2^n,$$

то кожна з наведених сум повинна дорівнювати

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

Тобто

$$\sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} = 2^{n-1}, \qquad \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 2^{n-1}.$$

4.5 Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об’єднанні множин.

Для двох множин має місце формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Приклад 4.8 Знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та діляться на 7 або на 11. Позначимо як *A* множину чисел, що діляться на 7, *B* – множину чисел, що діляться на 11. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{1000}{11}\right] - \left[\frac{1000}{7 \cdot 11}\right] = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об’єднанні ускладнюється:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад 4.9 Одну з мов (англійську, німецьку, іспанську) вивчає 231 студент, причому $|E| = 180$, $|D| = 110$, $|S| = 70$, $|E \cap D| = 82$, $|E \cap S| = 40$, $|D \cap S| = 15$, де як *E*, *D*, *S* позначено множини студентів, які відповідно вивчають англійську, німецьку й іспанську мови. Скільки студентів вивчають усі три мови?

Розв’язання. Маємо

$$231 = 180 + 110 + 70 - 82 - 40 - 15 + |E \cap D \cap S|,$$

звідки випливає, що $\left| E \cap D \cap S \right| = 8$ студентів.

Теорема 4.3 (принцип включення-виключення) Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \right| = \sum_{1 \le i \le n} \left| A_i \right| - \sum_{1 \le i \le j \le n} \left| A_i \cap A_j \right| +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} \left| A_i \cap A_j \cap A_k \right| - ... + \left(-1\right)^{n+1} \left| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \right|.$$

Доведення. Достатньо довести, що кожний елемент в об’єднанні множин ураховано в правій частині рівності точно один раз. Припустимо, що елемент a належить рівно r множинам з $A_1, A_2, ..., A_n$, де $1 \le r \le n$. Тоді цей елемент ураховано C_r^1 разів у $\sum\limits_{1 \le i \le n} \left| A_i \right|$, C_r^2 разів у $\sum\limits_{1 \le i \le j \le n} \left| A_i \cap A_j \right|$; загалом його враховано C_r^m разів під час сумування членів, які містять перетин m множин A_i. Отже, елемент a враховано точно $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + \left(-1\right)^r C_r^r$ разів у виразі в правій частині рівності. За властивістю біноміальних коефіцієнтів $C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - ... + \left(-1\right)^r C_r^r = 0$. Отже, $C_r^0 = C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + \left(-1\right)^{r+1} C_r^r$, але $C_r^0 = 1$, і тому $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + \left(-1\right)^{r+1} C_r^r = 1$. Це й означає, що кожний елемент об’єднання множин ураховано в правій частині рівності точно один раз.

Зазначимо, що формула включення-виключення містить $2^n - 1$ доданків, по одному для кожної непорожньої підмножини з $\left\{A_1, A_2, ..., A_n\right\}$.

Наступна форма принципу включення-виключення може бути корисною для розв’язування задач, у яких потрібно знайти кількість елементів заданої множини *A*, які не мають жодної з n властивостей $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Уведемо такі позначення:

$A_i \subset A$ – підмножина елементів, що мають властивість α_i;

$N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}\right)$ – кількість елементів множини *A*, які водночас мають властивості $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$;

$N\left(\overline{\alpha_{i_1}}, \overline{\alpha_{i_2}}, ..., \overline{\alpha_{i_k}}\right)$ – кількість елементів множини *A*, які не мають жодної з властивостей $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$;

N – кількість елементів у заданій множині *A*.

Тоді, очевидно,

$$N\left(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_n}\right) = N - \left| A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \right|.$$

За принципом включення-виключення можна записати

$$N\left(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_n}\right) = N - \sum_{1 \le i \le n} N\left(\alpha_i\right) + \sum_{1 \le i < j \le n} N\left(\alpha_i, \alpha_j\right) -$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le n} N\left(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k\right)+\ldots+(-1)^n N\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right).$$

Остання формула подає принцип включення-виключення *в альтернативній формі*.

Приклад 4.10 Нехай колода складається з n карт, пронумерованих числами 1, ..., n. Скількома способами можна розташувати карти в колоді так, що для жодного i $(1\le i\le n)$ карта с номером i не займає i-е місце?

Розв'язання. Маємо n властивостей α_i виду «i-а карта займає в колоді i-е місце». Число всіляких розташувань карт в колоді дорівнює $n!$. Число $N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}\right)$ розташувань, при яких карта з номером i_ν займає місце i_ν ($\nu=\overline{1,k}$), дорівнює $(n-k)!$. Тоді

$$N=n!, \qquad \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}\right)=C_n^k\,(n-k)!=\frac{n!}{k!}.$$

Використовуючи принцип включення-виключення в альтернативній формі, отримаємо, що число розташувань, при яких жодна з властивостей α_i не виконується, дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}\right)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$