ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

В.М. Васько

ДИСКРЕТНІ СТРУКТУРИ

Методичні рекомендації до лабораторних занять
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки «Програмна інженерія»

Затверджено
Вченою радою ЗНУ
Протокол № від р.

Запоріжжя
2014

Зміст

Вступ ... 3

Загальні вказівки ... 4

Лабораторне заняття №1. Основні поняття теорії множин ... 5

Завдання до лабораторного заняття ... 7

Лабораторне заняття №2. Геометрична інтерпретація множин. Алгебра множин ... 13

Завдання до лабораторного заняття ... 20

Лабораторне заняття №3. Відношення. Способи завдання відношень. Операції над відношеннями ... 27

Завдання до лабораторного заняття ... 31

Лабораторне заняття №4. Властивості відношень. Відношення порядку і еквівалентності ... 39

Завдання до лабораторного заняття ... 41

Лабораторне заняття №5. Обчислення предикатів. Математична індукція ... 47

Завдання до лабораторного заняття ... 49

Лабораторне заняття №6. Формули включення-виключення. Комбінаторика ... 54

Завдання до лабораторного заняття ... 56

Лабораторне заняття №7. Підстановки. Рекурентні співвідношення ... 62

Завдання до лабораторної роботи ... 67

Тест для самоконтролю ... 73

Термінологічний словник ... 74

Бібліографічний опис ... 76

Вступ

Дискретні структури – галузь математики, що вивчає властивості дискретних структур. До таких структур можуть бути віднесені скінченні групи, скінченні графи, деякі математичні моделі перетворювачів інформації, скінченні автомати, машини Тюринга і так далі. Це приклади структур скінченного характеру. Розділ дискретної математики, що вивчає їх, називається скінченною математикою. Іноді саме це поняття розширюють до дискретної математики. Крім вказаних скінченних структур, дискретна математика вивчає деякі системи алгебри, нескінченні графи, обчислювальні схеми певного вигляду, клітинні автомати і т. д.

Мета курсу: формування у студентів напряму підготовки «Програмна інженерія» теоретичних знань та практичних навичок у застосуванні математичного апарату у розв'язанні задач теорії множин, комбінаторного аналізу; рекурентних співвідношень, підстановок. Сформувати теоретичну та практичну базу знань в цій області. Дисципліна «Дискретні структури» є фаховою дисципліною, що викладається на математичному факультеті.

Методичні рекомендацій містять матеріал до 7 лабораторних занять з ознайомлення та використання MS Excel для проведення статистичного аналізу вибіркових даних.

Завдання навчальної дисципліни: набуття студентами таких знань, як основні принципи теорії множин; основні поняття теорії булевої алгебри; основні положення теорії графів; основи комбінаторики, а також оволодіння такими навичками та вміннями, як формальний опис процесу, доведення тверджень та тотожностей, побудова математичної моделі існуючого процесу, застосування методів дискретної математики для розв'язку прикладних задач.

Загальні вказівки

1. Лабораторні заняття проводяться в години, зазначені в розкладі і для кожного студента присутність на занятті є обов’язковою. Студент, що пропустив лабораторне заняття без поважних причин і не захистив роботу на наступному занятті, отримає меншу кількість балів у відповідності до терміну захисту роботи.
2. У комп’ютерний клас дозволяється входити тільки після дзвінка й у присутності викладача.
3. Вхід у комп’ютерний клас дозволяється тільки за наявності документа, що засвідчує особистість і завірений відповідальним органом ЗНУ.
4. Виконання завдання лабораторного заняття припиняють за дзвінком.
5. Забороняється виходити з аудиторії без дозволу викладача.

Вимоги до виконання завдань лабораторного заняття

При виконанні завдань необхідно:

1. Ознайомитися з загальними теоретичними відомостями.
2. За номером варіанта[1] вибрати завдання.
3. Уважно прочитати завдання.
4. Кожну роботу виконувати відповідно до завдання.
5. Оформити письмову роботу, яка повинна містити:
   - Номер та тему лабораторного заняття;
   - послідовність виконання роботи;
   - захистити результати, відповісти на додаткові питання та пред’явити виконану роботу.

[1] номер варіанта визначає викладач

Лабораторне заняття №1. Основні поняття теорії множин

Теоретичні відомості

Під **множиною**[2] будемо розуміти деяку, цілком визначену сукупність об'єктів або елементів однієї природи.

Серед способів завдання множин будемо виділяти:

а) перерахування елементів:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

б) записом характеристичної властивості :

$$\{x : x \ \textit{має властивість}\ P\};$$

в) рекурсивний спосіб.

Як приклад розглянемо множину значень рекурсивної функції:

$$F = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\},$$

де $\varphi_i \in N, i = 1,2,3 \dots$ Нехай $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 2$ і кожне наступне число залежить від двох попередніх: $\varphi_n = 3\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}, n = 3,4 \dots$.;

г) предикатний.

Множина задається у вигляді предиката , тобто у вигляді

$$\{x : P(x)\},$$

де $P(x)$ приймає значення «істина» для елементів множини. Так $\{0,1\} = \{x | x - \textit{цифра двійкової системи}\} = \{x | x^2 - x = 0\}$;

д) вербальний (словесний);

е) аналітичний.

Множина А є **підмножиною** множини В ($A \subseteq B$), якщо кожен елемент А є елементом В, тобто якщо $x \in A, \textit{то}\ x \in B$.[3]

Пуста множина - $\emptyset$ - це множина, яка не містить елементів.

Універсальна множина - U – це множина, яка має наступну властивість: розглянуті множини є її підмножинами.

Дві множини називаються **рівними**, якщо вони містять однаковий набір елементів (A = B).

Кількість елементів множини А називається **потужністю** множини і позначається │A│. Потужність множини А, що складається з n елементів обчислюється за формулою: │A│=2^n.

---

[2] не строге визначення

[3] Якщо $A \subseteq B$ та $A \neq B$, тоді записуємо як $A \subset B$ та говоримо, що А це ***власна підмножина*** В.

Множина всіх підмножин множини X називають **множиною-ступенем** або **булеаном** множини X і позначають $\boldsymbol{2^X}$.

Приклад 1

Нехай задані множини:

A= $\{1,2,3,4,5\}$;

B – множина натуральних чисел від 1 до 5;

C= $\{c|1 \leq c \leq 5, c \in N\}$;

D= $\{3,4,1,2,5\}$.

Ці множини містять однаковий набір елементів, тому A = B = C = D.

Приклад 2

Нехай множина юнаків деякої групи позначена через X, множина студентів групи позначена через Y. Природно, що X ⊆ Y.

Для множини додатних дійсних чисел R_+. використовується знак строгого включення, відносно всієї множини дійсних чисел, тобто $R_+ \subset$ R.

Приклад 3

Нехай $A = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}$[4] з даної умови можна стверджувати, що

$$2 \in \{2,3\},$$
$$3 \in \{2,3\},$$
$$\{2,3\} \in A,$$
$$2 \notin A,$$
$$3 \notin A.$$

Приклад 4

Нехай множина A складається з трьох елементів: $= \{a, b, c\}$. Кількість елементів множини-степеню дорівнює 2^3=8. Перерахуємо булеан даної множини:

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}^5.$$

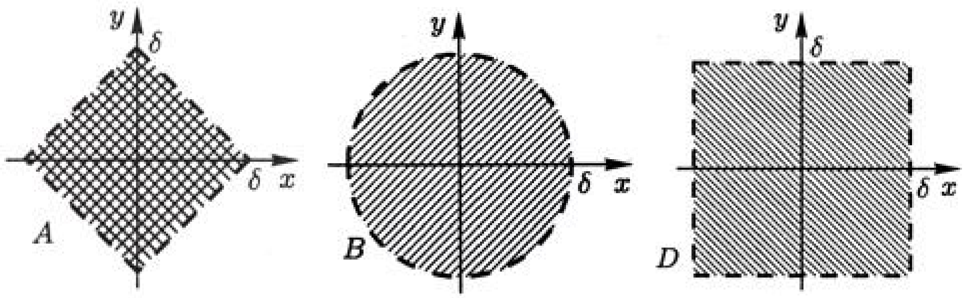
Приклад 5

Накресліть фігури, що зображують множини

$$A = \{(x, y): |x| + |y| < \delta\},$$
$$B = \left\{(x, y): \sqrt{x^2 + y^2} < \delta\right\},$$
$$D = \{(x, y): max(|x|, |y|) < \delta\}.$$

[4] множина A своїми елементами має множину {2,3}

[5] Пуста множина має тільки одну підмножину – саму себе, тому $2^{\emptyset}=\{\emptyset\}$, а його потужність дорівнює $|2^{\emptyset}| = 2^0 = 1$. Необхідно пам'ятати, що пуста множина є множиною, тому якщо деяка підмножина A не має елементів, то A=Ø; │A│=0. Запис A= {Ø}, вказує на те, що A містить один елемент – Ø, тому │A│=1.



Завдання до лабораторного заняття[6]

Варіант 1.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

B= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Додайте між множинами символ $\in, \subseteq, \subset$ так, щоб було істиним твердження:

$\{1\} \quad \{1,\{1,2\}\}$,

$\{1,2\} \quad \{1,2,\{1\},\{2\}\}$.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{1}{2\cdot 7}, \frac{1}{4\cdot 11}, \frac{1}{6\cdot 15}, \frac{1}{8\cdot 19}, \dots\right\}$,

$\left\{\frac{1}{3\cdot 2}, \frac{1}{3^2\cdot 5}, \frac{1}{3^3\cdot 10}, \frac{1}{3^4\cdot 17}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Перерахуйте усі підмножини множини A={1,2,3,4}.

Варіант 2.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

B= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Додайте між множинами символ $\in, \subseteq, \subset$ так, щоб було істиним твердження:

$\{1,2\} \quad \{1,2,\{1,2\}\}$,

$\emptyset \qquad \{1,2,\{1\},\emptyset\}$.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{11}, \frac{8}{14}, \dots\right\}$,

---

[6] ***n* – номер варіанту**

$\left\{1, \frac{7}{25}, \frac{9}{125}, \frac{11}{625}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Дана множина D={7,13,25,34,101,112}. Які з наведених множин є підмножинами множини D?

{1,7,13}; {0,1,12}; {7}.

Варіант 3.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le n^2\}$,

B= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \le n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Додайте між множинами символ $\in, \subseteq, \subset$ так, щоб було істиним твердження:

$\emptyset \quad \{\emptyset\}$,

$\emptyset \quad \{1, \{\emptyset\}\}$.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{-1}{2\cdot 2}, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{-1}{8\cdot 8}, \frac{1}{16\cdot 11}, \dots\right\}$,

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Визначте, які з приведених множин є рівними між собою:

C={1,2,3};

E={ $2x : x \epsilon Z$};

F={…-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8…};

G={3,2,1,2,3,1,2,3}.

Варіант 4.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le n^2\}$,

B= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \le n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Чи є рівними наступні множини:

$\{2,4,5\} \quad \{2,4,5,2\}$,

$\{1,2\} \quad \{\{1,2\}\}$?

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{1}{1\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 7}, \frac{1}{7\cdot 10}, \dots\right\}$,

$\left\{\frac{3}{2\cdot 1}, \frac{4}{3\cdot 2}, \frac{5}{4\cdot 3}, \frac{6}{5\cdot 4}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Дана множина D={7,13,25,34,101,112}. Які з наведених множин є підмножинами множини D?

{Ø, {Ø}};

U, де U – універсальна множина;

{25}.

Варіант 5.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

$A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

$B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Чи є рівними наступні множини:

$\{1,2,3\} \quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$,

$\{\{1,2\},3\} \quad \{\{1\},\{2,3\}\}$?

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{11}, \frac{8}{14}, \dots\right\}$,

$\left\{1, \frac{1+2}{1+2^2}, \frac{1+3}{1+3^2}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Визначте, які з приведених множин є рівними між собою:

D={0,2,-2,3,-3,4,-4,…};

E={ $2x : x \epsilon Z$ };

F={…-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8…};

P={2,4,6,8,…}.

Варіант 6.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

B= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Встановить істинність чи хибність кожного з наступних тверджень:

$\emptyset \subseteq \emptyset$,

$\emptyset \subset \emptyset$.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{1, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{8}\right)^3, \left(\frac{2}{11}\right)^4, \dots\right\}$,

$\left\{\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Дана множина D={7,13,25,34,101,112}. Які з наведених множин є підмножинами множини D?

{112,101,34,25,13,7};

{12};

{101,35,7}.

Варіант 7.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

B= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Встановіть істинність чи хибність кожного з наступних тверджень:

$\emptyset \in \emptyset$,

$\emptyset \subseteq A$, где A – довільна множина.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{21}{3}, \frac{41}{9}, \frac{61}{27}, \dots\right\}$,

$\left\{\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{9}{3 \cdot 2^3}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Перерахуйте усі підмножини множини Ω={Δ, O, Σ, Λ}.

Варіант 8.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

B= $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Встановить істинність чи хибність кожного з наступних тверджень:

$\emptyset \in A$, де A – довільна множина,

$\{2\} \in \{1,2,3,4,5\}$.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{6 \cdot 7}, \frac{1}{11 \cdot 11}, \dots\right\}$,

$\left\{1, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Дана множина D={7,13,25,34,101,112}. Які з наведених множин є підмножинами множини D?

{7,13,{25,34},101,112};

{7,13,25,7,13,25,7,13,25};

{101}.

Варіант 9.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

B= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Встановить істинність чи хибність кожного з наступних тверджень:

$\{2\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$,

$\emptyset = \{\emptyset\}$.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{1}{ln3}, \frac{1}{ln5}, \frac{1}{ln7}, \dots\right\}$,

$\left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{7}{27}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Визначте, які з приведених множин є рівними між собою:

$A = \{x\text{: існує такий, що } x = 2y, y \epsilon N\}$;

E={ $2x: x \epsilon Z$ };

P={2,4,6,8,…}.

Варіант10.

1. Накресліть фігури до відповідних множин

A= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$,

B= $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq n^2\}$, де R^2 – дійсна площина.

2. Встановить істинність чи хибність кожного з наступних тверджень:

$\{1,2,3\} \in \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$,

$\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$.

3. Наступні множини задані переліком своїх елементів, задайте ці множини за допомогою відповідної характеристичної властивості:

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \dots\right\}$,

$\left\{-\frac{6}{1}, \frac{7}{3}, -\frac{8}{5}, \dots\right\}$.

4. Задайте у вигляді X={x | P(x)} множину натуральних чисел не більших, за **n**.

5. Визначте кількість усіх підмножин множини A, що складається з **n** елементів.

6. Дана множина D={7,13,25,34,101,112}. Які з наведених множин є підмножинами множини D?

{а,с,р,к};

{25,112,34};

{0}.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення множини. Воно є строгим визначенням?
2. Назвіть способи завдання множин.
3. Що таке предикат?
4. Дайте визначення підмножини.
5. Дайте визначення універсальної множини.
6. Що таке потужність множини?
7. Дайте визначення пустої множини.
8. Які дві множини називаються рівними?
9. Дайте визначення множини-ступеню.

Лабораторне заняття №2. Геометрична інтерпретація множин. Алгебра множин

Теоретичні відомості

Для наочного зображення співвідношень між підмножинами універсальної множини використовуються ***діаграми Венна***[7] і ***кола Ейлера***[8]. Введемо наступні операції[9] над множинами та будемо ілюструвати їх за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

1. Об'єднанням множин А и В[10] ($A \cup B$) називається множина, що складається з елементів, які належать хоча б одній з множин А або В, тобто $A \cup B = \{x: x \in A \text{ або } x \in B\}$.

У вигляді діаграми Ейлера-Венна:

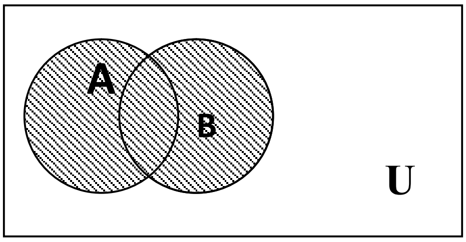


Рисунок 1 – Об'єднання двох множин

Також можливі такі випадки об'єднання множин (рис. 2-3).

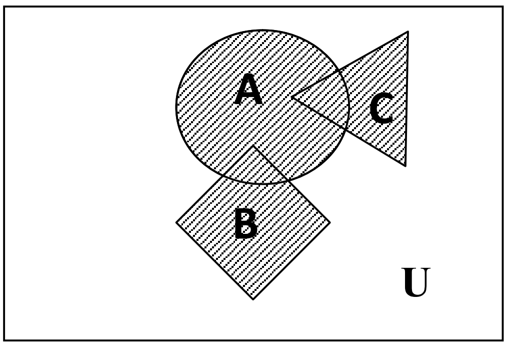


Рисунок 2 – Об'єднання трьох множин.

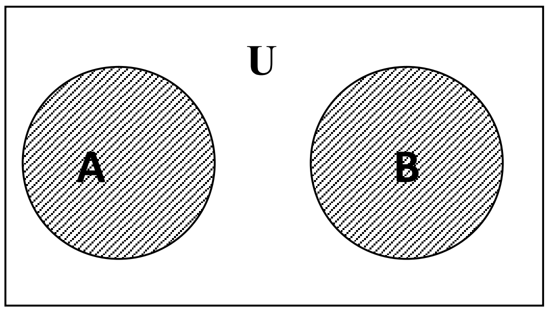


Рисунок 3 – AUB

Об'єднання системи n множин можна записати у вигляді $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$.

---

[7] Кожна наступна фігура діаграми Венна повинна мати одну і тільки одну спільну область перетину з кожною з раніше побудованих (тобто точки, які не належать ні одній з фігур, належать тільки універсальній множині).

[8] Дозволяють відображати індивідуальні відношення між розглянутими множинами (тобто множини, які не мають спільних елементів можуть зображуватися непересічними фігурами).

[9] Операції об'єднання, перетину та доповнення називаються *булевими*.

[1010] логічне **або**.

Приклад 1

Об'єднанням множин A = {a, b, d} і B = {b, d, e, h} буде множина C: C = AUB = {a, b, c, d, e, h}.

2. Перетином множин A і B[11] ($A \cap B$) називається множина, що складається з елементів, які належать одночасно множинам A і B, тобто $A \cap B = \{x: x \in A \text{ і } x \in B\}$.

У вигляді діаграми Ейлера-Венна:

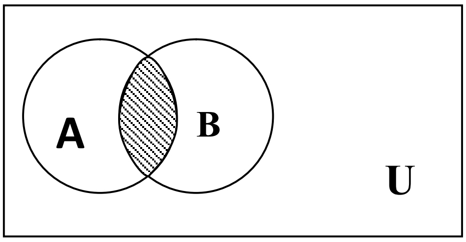


Рисунок 4 – Перетин двох множин

Перетин системи множин: $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$.

Приклад 2

Для перетину множин точок прямої і площини можливі наступні варіанти:

якщо прямі не паралельні площини, то множина перетину – єдина точка;

якщо прямі паралельні площини, то множина перетину – $\varnothing$;

якщо прямі збігаються, то множина перетину співпаде з множиною прямої.

3. Різницею[12] (відносним доповненням) множин A і B ($A \setminus B$) називається множина, що складається з усіх елементів множини A, що не входять в B, тобто $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

У вигляді діаграми Ейлера-Венна різниця зображена на рисунку 5.

[11] логічне **та**

[12] На відміну від попередніх операцій різниця: 1) суворо двомісна; 2) не комутативна, тобто $A \setminus B \neq B \setminus A$.

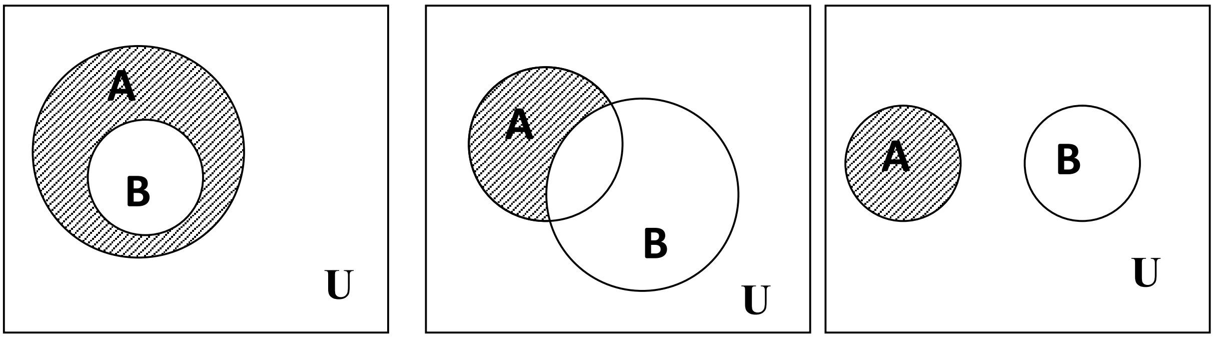


Рисунок 5 – Діаграми для різних випадків різниці множин A\B.

Приклад 3

Різницею множин A = {a, b, d} і B = {b, c, d, h} буде множина A\B = {a}.

4. Симетричною різницею (диз’юнктивна сума) множин A і B (A∆B) називається множина, що складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B, і всіх елементів множини B, не належать множині A, та не містить ніяких інших елементів, тобто A∆B={x: x∈A\B і x∈B\A}.

У вигляді діаграми Ейлера-Венна:

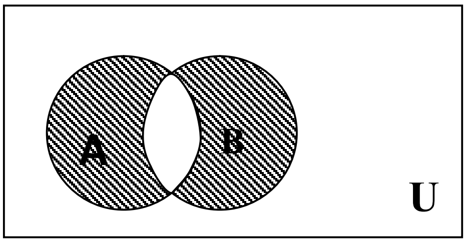


Рисунок 6 – Симетрична різниця множин A і B

Приклад 4

Симетричною різницею множин A = {a, b, d} і B = {b, c, d, h} буде множина A∆B = {a, c, h}.

5. Доповнення (абсолютне доповнення), тобто $\overline{A} = U \setminus A$, тобто $\overline{A}$={x: x∉A}.

У вигляді діаграми Ейлера-Венна:

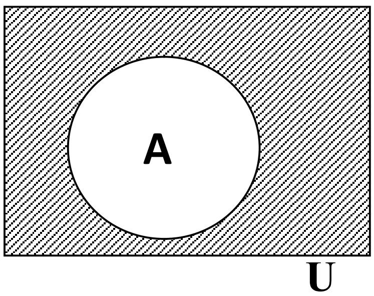


Рисунок 7 – Доповнення множини A.

Операції над множинами мають наступний пріоритет у порядку зменшення: операція доповнення, операція перетину, операція об'єднання.

Основні закони операцій над множинами

Деякі властивості $\cup$, $\cap$ схожі на алгебраїчні операції, проте багато властивостей операцій над множинами все ж відрізняються.

Основні властивості

1) Комутативний закон $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$;
2) Асоціативний закон $(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C)$; $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;
3) Властивості порожньої множини для перетину і об'єднання

$A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$,

3.а) $A \setminus \varnothing=A$, $A \setminus A=\varnothing$;

3.б) $\varnothing \setminus A = \varnothing$;

4) Закон подвійного доповнення $\overline{\overline{A}} = A$;
5) Властивості універсальної множини для перетину і об'єднання
$A \cap U = A$, $A \cup U = U$;
6) $A\cup\overline{A}=U, A\cap\overline{A}=\varnothing$; $U \setminus A = \overline{A}$; $A\setminus U =\varnothing$;
7) Закони ідемпотентності операцій перетину і об'єднання
8) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
9) Дистрибутивний закон $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=$
$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
10) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ – закони де Моргана;
11) $A\cup(A\cap B) = A$, $A\cap(A\cup B) = A$ – закони поглинання

Приклад 5

Довести, що наступні припущення про довільні множини A і B попарно еквівалентні:

1. $A\subseteq B$
2. $A\cap B=A$
3. $A\cup B=B$

Розв’язання

Доведемо, що з 1 умови випливає 2 ($1\Rightarrow 2$):

а) $A\cap B\subseteq A$ – справедливість цього випливає з визначення операції об'єднання і включення;

б) $A\subseteq A\cap B$; відомо, що виконується умова: $A\subseteq B \Rightarrow$ якщо $x\in A$, то $x\in B \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in A$ і $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow A\subseteq A\cap B$.

З а) і б) зробимо висновок, що вірним буде пункт 2.

Доведемо, що з 2 випливає 3 ($2\Rightarrow 3$):

$A\cap B=A \Rightarrow (A\cap B)\cup B=A\cup B$; $(A\cap B)\cup B=B$ – закон поглинання.

Доведемо, що з 3 випливає 1 ($3 \Rightarrow 1$): $A \cup B = B$; $\Rightarrow A \subseteq B$.

Приклад 6

Довести тотожність AUB=AU(B\A).

Розв'язання

Щоб довести цю тотожність, необхідно показати, що кожен елемент першої множини належить другій та навпаки, тобто ці множини співпадають.

Нехай $x \in AUB$, тобто $x \in A$ або $x \in B$. Якщо $x \in A$, то $x \in AU(B \setminus A)$. Якщо $x \notin A$, але $x \in B$, то $x \in B \setminus A$, отже, $x \in AU(B \setminus A)$.

Нехай $x \in AU(B \setminus A)$, тобто $x \in A$ або $x \in B \setminus A$. Якщо $x \in A$, то $x \in AUB$. Якщо $x \in B$, але $x \notin A$ ($x \in B \setminus A$), то $x \in AUB$. Таким чином, тотожність доведено.

Приклад 7

Доведемо дистрибутивність об'єднання множин відносно перетину, тобто, що для довільних множин A, B і C має місце рівність:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1. Нехай x – будь-який елемент такий, що

$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow$за означенням об'єднання множин

$x \in A$ або $x \in B \cap C$, що означає можливість трьох таких випадків:

$$1)\ x \in A,\ 2)\ x \in B \cap C,\ 3)\ x \in A \text{ і } x \in B \cap C.$$

Оскільки третій випадок є підвипадком перших двох, то достатньо розглянути лише їх.

Нехай

$x \in A$	$\Rightarrow$ за означенням об'єднання множин
$x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$	$\Rightarrow$за означенням перетину множин
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	

Нехай тепер

$x \in B \cap C$	$\Rightarrow$ за означенням перетину множин
$x \in B$ і $x \in C$	$\Rightarrow$ за означенням об'єднання множин
$x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$	$\Rightarrow$ за означенням перерізу множин
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	

Отже, в обох випадках довільний елемент множини $A \cup (B \cap C)$ є елементом множини $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, тоді за означенням підмножини множини має місце включення

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. Нехай тепер x – будь-який елемент, такий, що

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow$ за означенням перетину множин,

$x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C \Rightarrow$ за означенням об'єднання множин

($x \in A$ або $x \in B$) і ($x \in A$ або $x \in C$), що означає можливість таких чотирьох випадків:

$$1)\ x \in A,\ 2)\ x \in A \text{ і } x \in C,\ 3)\ x \in B \text{ і } x \in A,\ 4)\ x \in B \text{ і } x \in C.$$

Випадки 2) і 3) зводяться до випадку 1), а тому достатньо розглянути лише випадки 1) і 4).

Нехай

$x \in A \Rightarrow$ за означенням об'єднання множин $x \in A \cup (B \cap C)$.

Нехай тепер

$x \in B$ і $x \in C \Rightarrow$ за означенням перетину множин

$x \in B \cap C \Rightarrow$ за означенням об'єднання множин

$x \in A \cup (B \cap C)$.

Значить, у всіх випадках довільний елемент множини $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ є елементом множини $A \cup (B \cap C)$, тоді за означенням підмножини множини має місце включення

$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	(3)

На основі (2) і (3) за антисиметричною властивістю відношення включення має місце рівність (1), що і необхідно було довести.

6. Прямий добуток

Прямим (декартовим) добутком множин A і B називається множина C усіх впорядкованих пар (a;b), таких що $a \in A$, $b \in B$.

$$C = A x B, \text{ якщо } A = B \text{ то } C = A^2.$$

Прямим добутком n множин $A_1 x \ldots x A_n$ називається множина векторів $(a_1, \ldots a_n)$, таких що$_1 \in A_1, \ldots, A_n \in A_n$.

Приклад 8

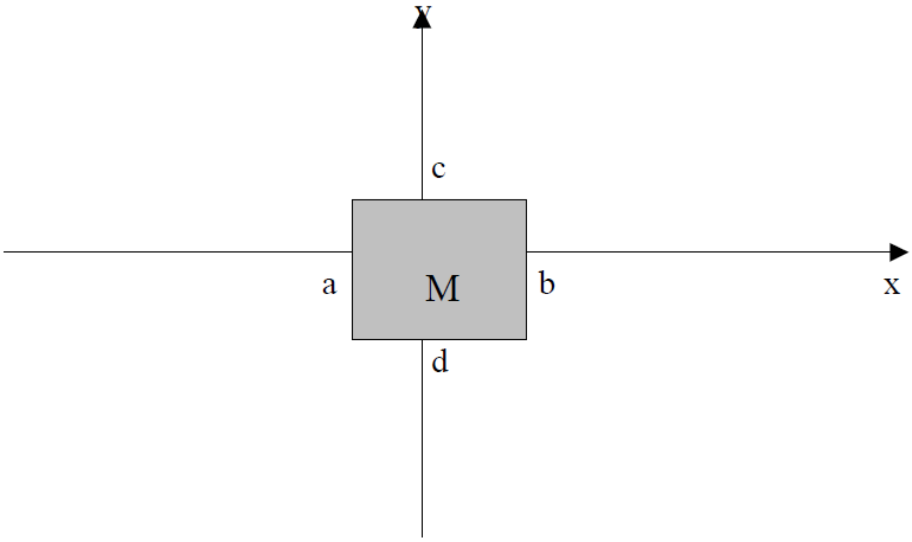
Нехай на площині задана декартова система координат. Проілюструйте на площині наступну множину:

$$M = [a, b] \times [c, d],$$

де a, b, c, d $\in$ R, a<b, c<d.

Розв'язання

При побудові прямого добутку $M = [a, b] \times [c, d]$ кожній точці x з відрізку $[a, b]$ ставляться пари (x,y), $y \in [c, d]$, тому в результаті отримаємо множину

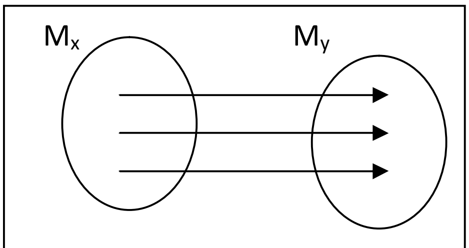


Поняття функції

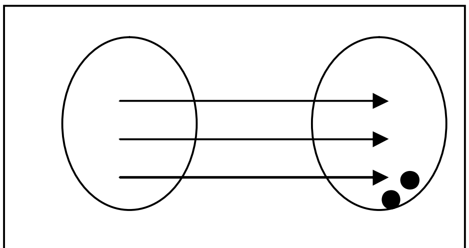
Підмножина $F \in M_x \times M_y$ називається функцією, якщо для кожного елементу $x \in M_x$ знайдеться $y \in M_y$ не більше одного.

$$(x;y) \in F, \quad y=F(x).$$

Відповідність між аргументом і функцією можна зобразити за допомогою діаграми Венна:



а) взаємно однозначна відповідність (відображення)



б) не взаємно однозначна відповідність

Між множинами M_X и M_Y встановлено ***взаємно однозначну відповідність***, якщо кожному $x \in M_X$ відповідає єдиний елемент $y \in M_Y$ і зворотне твердження є вірним.

Нехай дано дві функції f: $A \rightarrow B$ і g: $B \rightarrow C$, функція y:$A \rightarrow C$ називається композицією функцій f і g.

Приклад 9

Встановити взаємно однозначну відповідність між усіма прямими на площині і всіма точками координатної осі Ox.

Розв'язання

Задамо пряму двома числами - точкою перетину з віссю Ox:

$$x = \ldots y_3y_2y_1,x_1x_2x_3\ldots$$[13]

і кутом нахилу

$$a = 180*b$$[14],

де b – додатнє дійсне число із інтервалу [0,1), $b = 0, z_1z_2z_3\ldots$

Відповідно надамо цим двом числам x і b точку q на осі Ox за наступним правилом:

$$q = \ldots y_3y_2y_1,x_1z_1x_2z_2x_3z_3\ldots$$[15].

Видно, що за точкою q можна однозначно відновити числа x і b. Таким чином, ми встановили однозначну відповідність між усіма прямими на площині і всіма точками координатної осі Ox.

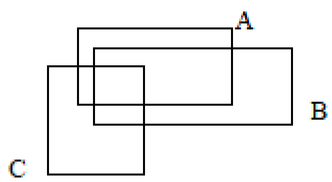
Завдання до лабораторного заняття

Варіант 1.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини $A\cup B$, $A\cap B$, $R^2\setminus A$.

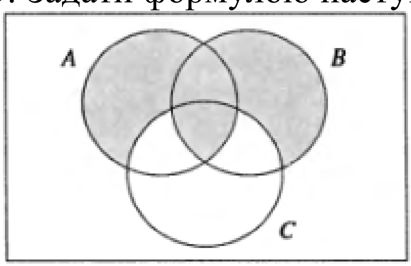
2. Нехай $A = \{x\colon\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y\colon n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині *xOy* множину точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область $B\cap C$.



4. Нехай $A=\{1,2,3\}$, а $B=\{a,b\}$. Визначте: $A\times B$.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин намалюйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) A';

[13] будь-яке дійсне число, в тому числі може бути від’ємне, тоді спочатку мінус;
[14] кут між прямою і додатнім напрямом осі Ox, змінюється від 0 до 180 градусів;
[15] тут знак числа q збігається зі знаком числа x.

б) (A∪B)-A∩B.

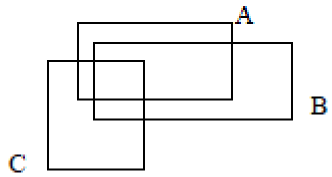
7. Спростіть вираз: $\overline{\bar{A} \cup C} \cup (B \cup B \cap C) \cap (\bar{B} \cup \overline{B \cup C})$.

Варіант 2.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини A∪B, A∩B, R^2\A.

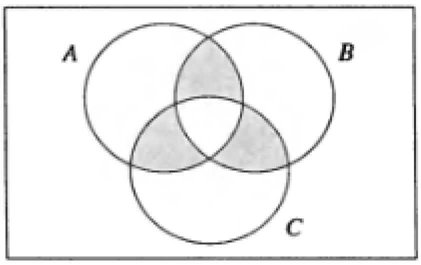
2. Нехай A = {x: n+1 ≤ x ≤ n+2}, B = {y: n ≤ y ≤ n+3}. Зобразіть на площині *xOy* множину точок *A* × *B*.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область A∩B.



4. Нехай A={1,2,3}, а B={a,b}. Визначте: A×A.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) (A∪B)′;

б) A-B′.

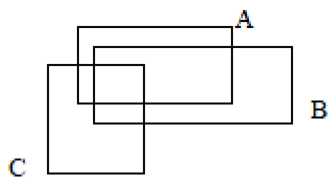
7. Спростіть вираз: $(A \cap \bar{B} \cup C) \cap (A \cup B) \cap \bar{C}$.

Варіант 3.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини A∪B, A∩B, R^2\A.

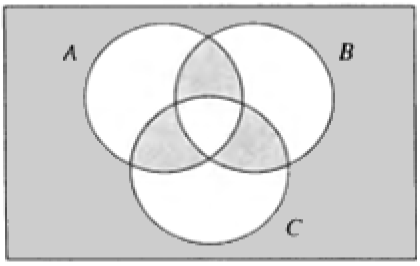
2. Нехай *A* = {*x*: n+1 ≤ *x* ≤ n+2}, *B* = {*y*: n ≤ *y* ≤ n+3}. Зобразіть на площині *xOy* множина точок *A* × *B*.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область A∩C.



4. Нехай A={1,2,3}, а B={a,b}. Визначте: B×A.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) A-B;

б) (A∪B)- A∩B.

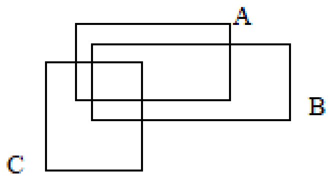
7. Спростіть вираз: $A \cap (((B \cap \bar{C} \cup \overline{C \cup B}) \cap C) \cap \bar{A})$.

Варіант 4.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини A∪B, A∩B, R^2\A.

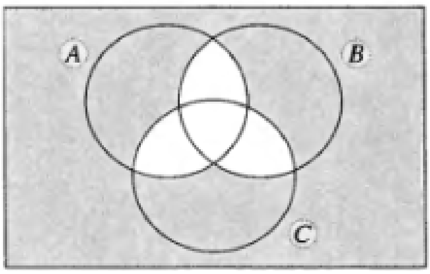
2. Нехай $A = \{x\colon\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y\colon n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині xOy множина точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область A∩B∩C.



4. Нехай A={1,2,3}, а B={a,b}. Визначте: B×B.

5. Задати формулою наступне зображення:



Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) (B∩C)-A;

б) (A∩B∩C)′.

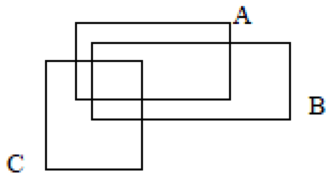
7. Спростіть вираз: $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$.

Варіант 5.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини A∪B, A∩B, R^2\A.

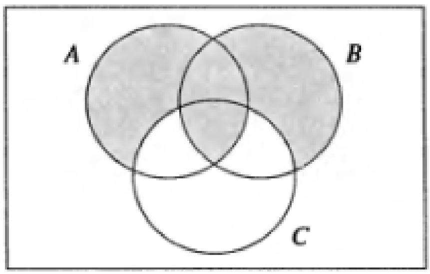
2. Нехай $A = \{x\colon\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y\colon n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині xOy множина точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область (A∩B)∩(B∩C).



4. Нехай A={1,2,3}, а B={a,b}. Визначте: A×Ø.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) (A∩B)′;

б) A∪(B∩C).

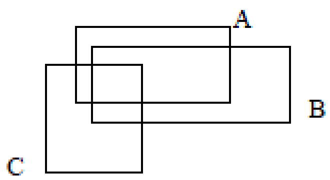
7. Доведіть, що $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Варіант 6.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини A∪B, A∩B, R^2\A.

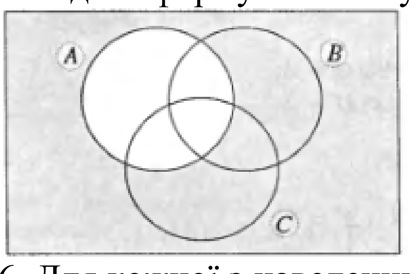
2. Нехай $A = \{x\colon\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y\colon n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині xOy множина точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область (B∩C)∩(A∩B).



4. Нехай A={1,2,3}, а B={a,b}. Визначте: B×Ø.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) B-(A∪C);

б) $A \cup (B \cap C) - C$.

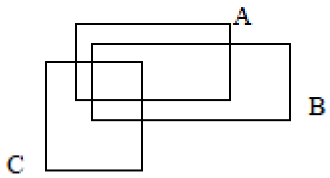
7. Доведіть, що $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Варіант 7.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини $A \cup B$, $A \cap B$, $R^2 \backslash A$.

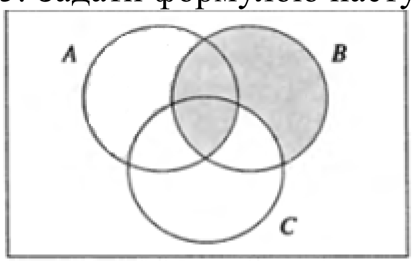
2. Нехай $A = \{x:\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y:\ n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині xOy множина точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область $(A \cap B) \cap (A \cap C)$.



4. Нехай $A=\{1,2,3\}$, а $B=\{a,b\}$. Визначте: $\varnothing \times A$.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини[2]:

а) $A' \cup (A \cup B)$;

б) $(A \Delta B)'$.

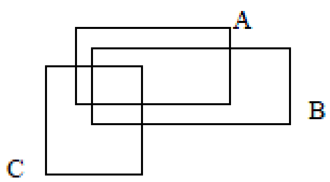
7. Доведіть будь-який закон елімінації.

Варіант 8.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини $A \cup B$, $A \cap B$, $R^2 \backslash A$.

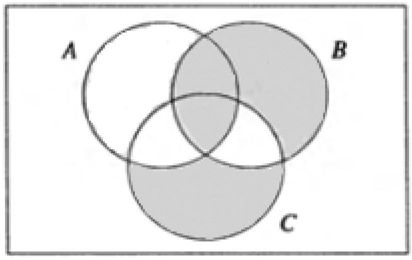
2. Нехай $A = \{x:\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y:\ n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині xOy множина точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область $(B \cap C) \cap (A \cap C)$.



4. Нехай $A=\{1,2,3\}$, а $B=\{a,b\}$. Визначте: $\varnothing \times \varnothing$.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) U-A-B;

б) (A∆B)∪(A∩B).

7. Доведіть перший закон де Моргана.

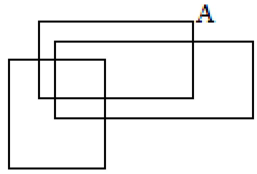
Варіант 9.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини A∪B, A∩B, R^2\A.

2. Нехай $A = \{x\colon\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y\colon n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині xOy множина точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область (B\C)∪(A\B).

A

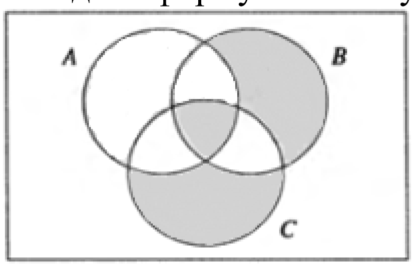


B

C

4. Нехай A={◊,○,◄,■}, а B={×,∞}. Визначте: A×B.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) A′;

б) (A∆B)-(A∩B)′.

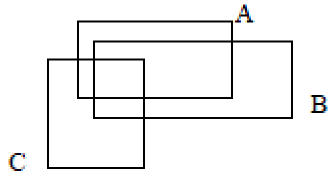
7. Доведіть другий закон де Моргана.

Варіант 10.

1. Використовуючи завдання № 1 попереднього лабораторного заняття зобразіть множини A∪B, A∩B, R^2\A.

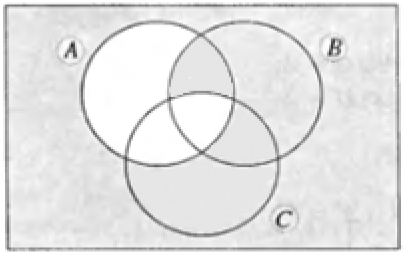
2. Нехай $A = \{x\colon\ n+1 \le x \le n+2\}$, $B = \{y\colon n \le y \le n+3\}$. Зобразіть на площині xOy множина точок $A \times B$.

3. Три множини A, B и C зображені трьома прямокутниками, які мають спільні частини. Замалюйте область (B\C)∩(A\B).



4. Нехай A={◊,○,◄,■}, а B={×,∞}. Визначте: B×A.

5. Задати формулою наступне зображення:



6. Для кожної з наведених множин використовуйте діаграми Ейлера-Венна для двох множин и заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

а) (A∩B∩C)-A;

б) (A∪B)′∪(A∩B).

7. Доведіть будь-який асоціативний закон.

Питання для самоперевірки.

1. Дайте визначення декартового добутку множин. Чи є він множиною?
2. Дайте визначення підмножини.
3. Дайте визначення універсальної множини.
4. Дайте визначення перетину двох множин. Це бінарна операція?
5. Дайте визначення об'єднання двох множин. Це бінарна операція?
6. Дайте визначення симетричної різниці двох множин. Це бінарна операція?
7. Дайте визначення операції доповнення. Це бінарна операція?
8. У чому відмінність діаграм Венна від кіл Ейлера.
9. Що таке функція?
10. Дайте визначення взаємно-однозначної відповідності.

Лабораторне заняття №3. Відношення. Способи завдання відношень. Операції над відношеннями

Теоретичні відомості

Відношенням R множин X и Y називається довільна підмножина декартового добутку XxY:

$$R \subseteq X \times Y = \{(x,y): x \in X, y \in Y\}.$$

Якщо $(x,y) \in R$, то записується xRy.

У кожного відношення є область визначення та множина значень.

Множина перших координат упорядкованої пари відношень R називається ***областю визначення***.

Множину значень створюють другі координати упорядкованої пари.

$$D(R) = \{x: xRy\}; \; E(R) = \{y: xRy\}.$$

Бінарне відношення – окремий випадок відношення на множині, яке встановлюється <u>між двома елементами множини.</u>

Приклад 1

Бінарні відношення на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$:

- R_1 – відношення $\leqslant$(«менше або дорівнює»), тоді 4 R_1 9 та 5 R_1 5.
- R_2 – відношення «ділиться на», тоді 4 R_2 2, 49 R_2 7, m R_2 1 для будь-якого натурального m.
- R_3 – відношення «є взаємно простими», тоді 15 R_3 8, 366 R_3 121, 1001 R_3 612.
- R_4 – відношення «складаються з однакових цифр», тоді 127 R_4 721, 230 R_4 302, 3231 R_4 3213311.

Якщо область визначення і множина значень співпадають із вихідною множиною А, то таке відношення має назву відношення на А. Розглянемо окремі випадки таких відношень

1. **Повне (універсальне)** відношення $U = A\text{x}A$, яке справджується для будь-якої пари (a1, a2) елементів з A. Наприклад, U – відношення «вчитися в одній групі» у множині A, де A – множина студентів групи 5134-1.

2. **Тотожне (діагональне)** відношення I, що виконується тільки між елементом і ним самим. Наприклад, рівність на множині дійсних чисел.

3. **Порожнє** відношення, яке не задовольняє жодна пара елементів з A. Наприклад, R – відношення «бути братом» у множині A, де A – множина жінок.

Приклад 2

Для наступного бінарного відношення, певної на множині R, знайдіть область визначення, область значень і намалюйте декартову діаграму $\rho = \{(x, y): x^2 = y\}$.

Розв'язання

У відповідності з визначенням

$$D_\rho = \{x \in R: \exists y \quad (x, y) \in \rho\} = R.$$

$$R_\rho = \{y \in Y: \exists x \quad (x, y) \in \rho\} = R_+ \cup 0.$$

Декартова діаграма для даного бінарного відношення має вигляд:

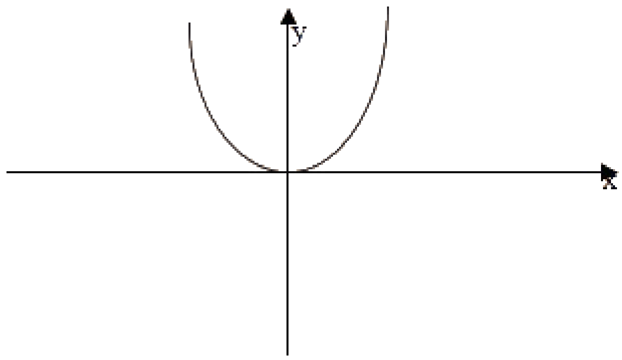


Рисунок 1 – Декартова діаграма бінарного відношення ρ.

Відношення називається ***зворотнім*** до відношення R, якщо воно складається з таких пар (y;x), для яких: $R^{-1} = \{(y;x): x\ R\ y\}$; $(R^{-1})^{-1} = R$.

Приклад 3

Знайти зворотне відношення.

Нехай R={(r,1),(s,1),(s,3)}, тоді R^{-1}={(1,r),(1,s),(1,s)}.

Нехай R – відношення{(x,y): y є чоловіком x}, тоді R^{-1} відношення{(y,x): x є дружиною y}.

Нехай $R \subseteq X \times Y$. Якщо $x \in X$, тоді ***перетином відношення*** R за елементом x називається множина R(x), яка складається з таких елементів $y \in Y$, для яких виконується $(x,y) \in R$.

Множина, яка складається з перетинів відношення $R \subseteq X \times Y$ за кожним з елементів множини X, називається ***фактор-множини*** множини Y за відношенням R та позначається Y/R.

$$Y/R = \{R(x), \text{ для будь-якого } x \in X\}$$

Приклад 4

Нехай на множинах X= {a,b,c,d,e,f} и Y={1,2,3,4}задано відношення $R \subseteq X \times Y$ наступним чином R={(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)}.

Перетин R(a)={1,2}, R(e)=Ø.

Фактор-множина складається з:

Y/R={{1,2},{4},{1}}

або у вигляді таблиці:

a	b	d	f
{1,2}	{4}	{1}	{4}

Нехай R ⊆ X x Y – відношення на XxY, а S ⊆ VxW – відношення на VxW. ***Композицією*** відношення R та S називається відношення T⊆XxW, визначене таким чином:

T={(a,c): існує такий елемент b ∈B, що (a,b)∈R і (b,c)∈S}.

Це відношення визначається, як T=S∘R.

Приклад 5

Нехай A={1,2,3}, B={x,y}, C={*,#,!,&} та нехай відношення R ⊆ X x Y і S ⊆ V x W задані у вигляді: R={(1,x),(1,y),(3,x)}, S={(x,*),(x,#),(y,!),(y,&)}.

Тоді S∘R={(1,*),(1,#),(1,!),(1,&),(3,*),(3,#)}.

Окрім можливості задавати відношення у вигляді фактор-множини, існує ще два способи. Розглянемо їх.

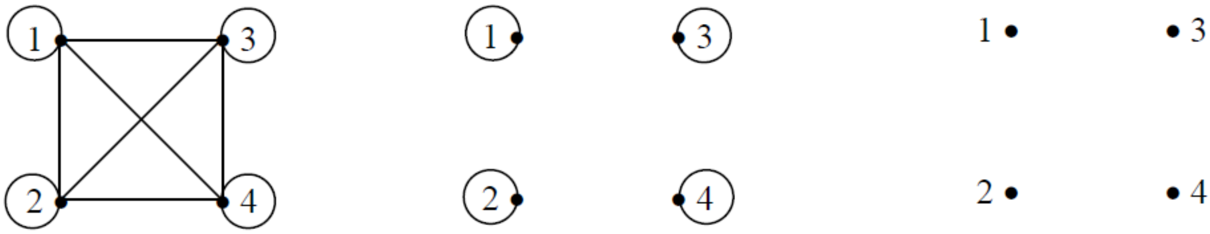
Матричний спосіб ґрунтується на поданні відношення $R\subseteq A\times B$ відповідною йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць, де рядки – перші координати, а стовпці – другі, причому на перетині *i*-го рядка і *j*-го стовпця буде 1, якщо виконується співвідношення a_iRb_j, або 0 – якщо воно не виконується.

Матриця повного (універсального) відношення – це квадратна матриця, що складається лише з одиниць. Матриця тотожного (діагонального) відношення – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі. Матриця порожнього відношення – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

Відношення $R\subseteq$AxB можна також зображати за допомогою **орієнтованого графа**.

Елементи множин *A* та *B* зображуються точками на площині (вершини), а впорядковані пари – лінією зі стрілкою (дуги), яка направлена від *a* до *b*, якщо *aRb*.

Граф бінарного відношення – це дводольний граф. Відношення в *A* зображується графом із вершинами, що відповідають елементам цієї множини. Якщо a_iRa_j і a_jRa_i, то вершини зв'язуються двома протилежно спрямованими дугами, які умовно можна замінювати однією не спрямованою дугою (ребром). Співвідношенню a_iAa_i відповідає петля.



а б в

Рисунок 2 – Графи універсального (а), тотожного (б) та порожнього (в) відношення

Приклад 6

Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Відношення $R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)\}$. Очевидно, $R(1) = \{2, 4\}$, $R(2) = \{3\}$, $R(3) = \{3, 6\}$. Множина $\{R(1), R(2), R(3)\}$ є фактор-множиною B/R.

Матриця відношення буде мати такий вигляд:

	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	1

Для наведеного вище відношення граф буде мати наступний вигляд:

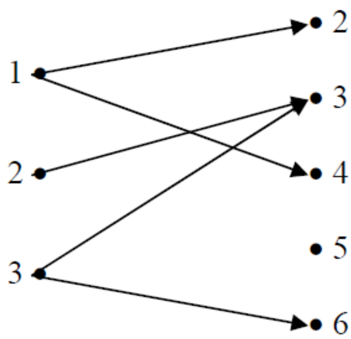


Рисунок 3. - Приклад представлення відношення за допомогою графа.

Матриця оберненого відношення R^{-1} для відношення R – це транспонована матриця відношення R. Граф оберненого відношення R^{-1} утворюється із графа відношення R заміною всіх дуг на протилежні.

Матриця композиції відношень $T = R{\circ}S$ утворюється як добуток матриць відношень R та S з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

Справді, елемент t_{ik} матриці композиції знайдемо як суму добутків відповідних елементів матриць R та S (відповідно до правила множення матриць):

$$r_{ij}s_{jk} = 1 \Leftrightarrow r_{ij} = 1 \text{ та } s_{jk} = 1 \Leftrightarrow a_iRb_j \text{ та } b_jSc_k \Leftrightarrow a_iR{\circ}Sc_k.$$

Якщо у виразі t_{ik} не один, а кілька одиничних доданків, то кожен з них відповідає одному й тому самому співвідношенню $a_i R \circ S c_k$, через що їх сума має бути замінена одиницею.

Для композиції відношень R = {(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)} та S = {(1,1), (1,2), (2,3),(2,5), (3,2), (3,4), (4,2) (4,3)} матриця утворюється так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$. Щоб побудувати граф $T = R \circ S$, потрібно до графа відношення R добудувати граф відношення S. Граф композиції відношень дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини B. При вилученні вершини b_j кожний шлях, що проходить через неї від вершин множини A до вершин множини C, замінюється однією дугою з тим самим напрямком.

Для останнього прикладу маємо наступний граф:

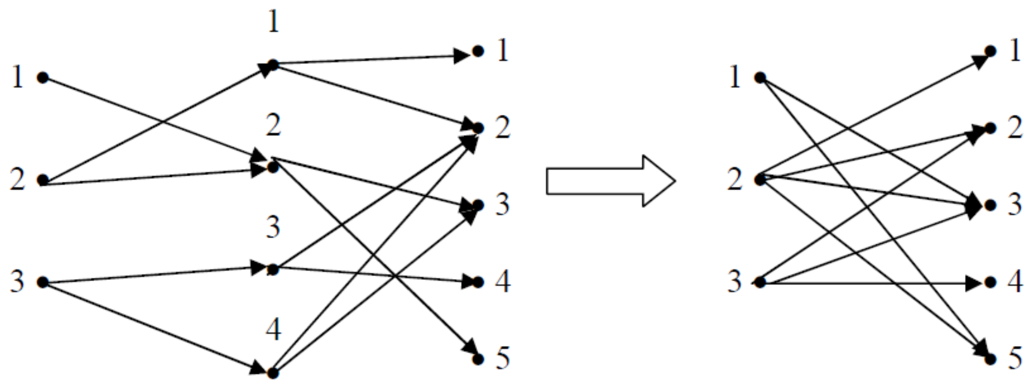


Рисунок 4 – Граф композиції відношень

Завдання до лабораторного заняття

Варіант 1

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати задані відношення на множині $A \cup B \cup C$.

A = {1,4,5,6,9}, B = {8,3,6}, C = {2,7,3}

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow (a - b) ⋮ 3$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow (a + b) ⋮ c$.

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть.

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2 \ , \ a^2 + b^2 = 9\}$.

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} и B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення за допомогою графів:

а) A^{-1};

б) $A^{-1} \circ B$.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,a), (a,c), (d,e), (e,d)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={1,2,3}:

а) {(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)};

б) {(1,3), (3,1)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,b,c} матрицею:

	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	1

Варіант 2

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати задані відношення на множині $A \cup B \cup C$.

A = {2,9,12,14}, B = {3,7,9}, C = {2,3,4}

а) $(a,b) \in w_1 \ \Leftrightarrow \ (a+b) \vdots 4$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \ \Leftrightarrow \ a > bc$.

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть.

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2 \ , | \ 1 + 3a \ | = b \ , \ a^2 + b^2 = 4\}$.

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} и B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) B^{-1};

б) $B^{-1} \circ A$.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d, e}:

R={(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,e), (e,d), (b,e), (e,b), (b,d), (d,b)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={1,2,3}:

а) {(1,1), (1,2), (1,3)};

б) {(1,1), (2,1), (2,2), (2,3)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,b,c} матрицею:

	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	0
c	0	1	0

Варіант 3

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати задані відношення на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{1,2,5,9,13\}, B = \{6,7,3,4\}, C = \{1,2,3\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow a \vdots b$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow \left(a^2 + b - 1\right) \vdots c$.

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть.

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2, | a - 4b | < 6\}$.

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} и B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) A^{-1};

б) $A^{-1} \circ B^{-1}$.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (a,a), (b,c), (e,b), (e,a), (a,c), (e,e), (e,d)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={1,2,3}:

а) {(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,2)};

б) {(1,1), (2,1), (3,1)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,b,c} матрицею:

	a	b	c
a	1	1	1
b	0	1	0
c	1	0	1

Варіант 4

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відносин. Задати Задані відносини на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{1,3,4,5,6\}, B = \{7,18\}, C = \{4,2,14\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow (a - b) \vdots 5$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow abc \vdots 3$.

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть.

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2 \ , | \ 1 + 3a \ | = b\}$.

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} і B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) B^{-1};

б) $B^{-1} \circ A^{-1}$.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (e,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (b,e), (e,b), (b,d), (d,a)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={1,2,3}:

а) {(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3)};

б) {(1,1), (2,2), (3,3)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,b,c} матрицею:

	a	b	c
a	1	1	1
b	0	0	0
c	1	0	1

Варіант 5

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати Задані відносини на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{2,5,7,8\}, B = \{1,3,4,8\}, C = \{1,2,3\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow (a - b) \vdots 4$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow (a - b) \vdots c$. Змінити

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть.

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2 \ , | \ 2 - 3b \ | = a\}$;

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} і B={(a, v), (w,e), (i, x), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) B^{-1};

б) $(A \circ B)^{-1}$.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (b,b), (b,c), (c,b), (c,a), (d,e), (e,b)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={1,2,3}:

а) {(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,2)};

б) {(2,1), (1,3), (3,1)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,b,c} матрицею:

	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	0	1	1

Варіант 6

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати Задані відносини на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{3,5,7,9,11\}$, $B = \{4,3,6\}$, $C = \{1,3,2\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow (a+b) \vdots 4$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow (ac > b)$. Змінити

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть.

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2, |1 + 3a| = b,\ a^2 + b^2 = 4\}$;

3. Нехай A={(a,e), (e,b), (o,f), (i,g), (o,d), (u,g)} і B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) B^{-1};

б) $(B \circ A)^{-1}$.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,e), (e,d), (b,e), (e,b), (b,d), (d,b)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={1,2,3}:

а) {(3,2), (1,2), (2,2), (1,3)};

б) {(1,3), (2,1), (2,3)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,b,c} матрицею:

	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	0
c	0	1	0

Варіант 7

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати Задані відносини на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{3,5,7,9,11\}$, $B = \{3,2,5\}$, $C = \{1,2,9\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow (a-b) \vdots 4$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow (ac \geq b)$. Змінити

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2,\ a^2 + b^2 = 9\}$.

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,e), (d,i), (f,o), (f,u)} и B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) B^{-1};

б) B○A.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (b,d), (c,b), (c,e), (e,d), (d,b),(e,e)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={a,b,c}:

а) {(a,a), (a,b), (a,c), (c,c)};

б) {(a,b), (b,a), (b,b),(c,a)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,e,m} матрицею:

	a	e	m
a	1	1	0
e	0	1	0
m	0	1	1

Варіант 8

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати Задані відносини на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{3,5,7,9,11\}$, $B = \{4,3,6\}$, $C = \{1,3,2\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow (a+b) \vdots 4$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow (bc > a)$. изменить

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2, |1 + 3a| = b,\ a^2 + b^2 = 4\}$.

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} и B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) A^{-1};

б) A○A.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (b,b), (b,d), (c,b), (c,c), (e,d), (d,b),(e,e)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={a,b,c}:

а) {(a,a), (a,b), (a,c), (c,c)};

б) {(a,b), (b,a), (b,b),(c,a)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,e,m} матрицею:

	a	e	m
a	1	1	1
e	0	1	0
m	0	1	1

Варіант 9

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати Задані відносини на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{1,2,5,9,13\}$, $B = \{6,7,3,4\}$, $C = \{1,2,3\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow a \nmid b$; змінити

б) $(a,b) \in w_2 \Leftrightarrow (a - b+c)>2$.

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть

$\alpha = \{(a,b) :(a,b) \in R^2, | a - 4b | < 6\}$.

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} і B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) B^{-1};

б) B○A.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (e,a), (c,b), (c,d), (d,c), (b,e), (e,b), (b,d), (d,a)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={a,b,c}:

а) {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,b)};

б) {(a,a), (b,b), (c,a)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,e,m} матрицею:

	a	e	m
a	1	1	1
e	1	0	0
m	1	0	1

Варіант 10

1. Задані множини A, B, C. Задати відношення w_i в явній формі. Знайти область визначення і область значень заданих відношень. Задати Задані відносини на множині $A \cup B \cup C$.

$A = \{3,6,9,12\}$, $B = \{1,2,13\}$, $C = \{2,4,6\}$

а) $(a,b) \in w_1 \Leftrightarrow (a - b) \vdots 5$;

б) $(a,b,c) \in w_2 \Leftrightarrow (ac \le b)$. Змінити

2. Нехай R – множина дійсних чисел, а Z – множина цілих чисел. Яким геометричним фігурам відповідає відношення α? Зобразіть

$\alpha = \{(a,b) : (a,b) \in R^2, | 1 + 3a | = b\}$;

3. Нехай A={(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)} и B={(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)}. Визначте наступні відношення:

а) A^{-1};

б) A○B.

4. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A={a,b,c,d,e}:

R={(a,b), (e,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (b,e), (d,b), (b,d), (d,a)}.

5. Побудуйте матрицю та граф для наступних відношень, визначених на множині A={a,b,c}:

а) {(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,b)};

б) {(b,a), (b,b), (c,a)}.

6. Побудуйте граф та список елементів для відношення, визначеного на множені A={a,e,m} матрицею:

	a	e	m
a	0	1	1
e	1	0	0
m	1	0	0

Питання для самоперевірки.

1. Дайте визначення декартового добутку множин. Він є множиною?
2. Дайте визначення підмножини.
3. Дайте визначення відношення.
4. Дайте визначення перерізу відношення: за елементом, за множиною.
5. Дайте визначення фактор-множини.
6. Дайте визначення композиції двох відношень.
7. Назвіть способи завдання відношень.
8. Дайте визначення зворотного відношення.
9. Якими графом зображується повне відношення, тотожне відношення?
10. Яка матриця відповідає пустому відношенню?

Лабораторне заняття №4. Властивості відношень. Відношення порядку і еквівалентності

Теоретичні відомості

Нехай R – бінарне відношення у множині A ($R \subseteq$ AxA). Тоді відношення R є:

- **рефлексивним**, якщо $I \subseteq R$, тобто, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall a \in A$, aRa). Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці. Граф рефлексивного відношення – тим, що петлі є у всіх вершинах.

Приклад 1

Рефлексивним буде відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

- **антирефлексивним (іррефлексивним)**, якщо $R \cap I = \varnothing$, тобто якщо співвідношення a_iRa_j виконується, то $a_i \neq a_j$. Матриця антирефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі. Граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

Приклад 2

Антирефлексивне відношення – строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел, відношення «бути старшим» у множині людей.

- **симетричним**, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення a_iRa_j виконується співвідношення a_jRa_i. Симетричність відношення спричиняє також симетричність матриці. Також для такого відношення вершини графа можуть бути пов'язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (***тобто ребрами***).

Приклад 3

Симетричним відношенням буде відстань між двома точками на площині або відношення «бути рідним» на множині людей.

- **асиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень a_iRa_j та a_jRa_i щонайменше одне не виконується. Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі. У графа такого відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов'язані тільки однією спрямованою дугою.

Приклад 4

Відношення «бути батьком» у множині людей або відношення строгого включення в множині всіх підмножин деякого універсаму буде являти собою асиметричне відношення. Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне.

- **антисиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a_j = a_i$. Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі. У графі такого відношення можуть бути петлі, але зв'язок між вершинами, якщо він є, також відбувається тільки однією спрямованою дугою.

Приклад 5

Відношення нестрогої нерівності задає на множині чисел антисиметричне відношення.

- **транзитивним**, якщо $R \circ R \subseteq R$, тобто з виконання співвідношень $a_i R a_j$ та $a_j R a_k$ випливає виконання співвідношення $a_i R a_k$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли $R_{ij}=1$ й $R_{jk}=1$, то $R_{ik}=1$, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивність матриці. Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з'єднують будь-яку пару вершин з цієї сукупності в напрямку шляху[16].

Приклад 6

Відношення «бути дільником» на множині цілих чисел або «бути старшим» на множині людей буде транзитивним відношенням.

Приклад 7

З'ясувати, для кожного з наступних бінарних відношень, якими властивостями (рефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність) воно володіє та якими не володіє.

1) $\rho=\{(1,2), (2,1), (1,1), (1,3), (3,2), (3,3)\}$ на множині $X=\{1,2,3\}$;

2) $\rho=\{(x,y): x-y \in Z\}$ на множині $X=R$;

3) $\rho=\{(x,y): 2x=3y\}$ на множині $X=Z$;

4) $\rho=\{(x,y): x \subseteq y\}$ на множині $X=P(Z)$.

Розв'язок

1) Дане відношення не є рефлексивним, оскільки для точки $2 \in X$ пара $(2,2) \notin \rho$; не є симетричним, оскільки, наприклад. пара $(1,3) \in \rho$, а пара $(3,1) \notin \rho$;

[16] Як правило, на графі транзитивного відношення зображують тільки цей шлях, а зумовлені транзитивністю дуги опускають. Такий граф називають **графом редукції** або **кістяковим графом**

не є антисиметричним, оскільки, наприклад, пари (1,2) та (2,1) належать ρ, але $1\neq2$; не є транзитивним, оскільки, наприклад $(3,2)\in\rho$, $(2,1)\in\rho$, а $(3,1)\notin\rho$;

2) Дане відношення є рефлексивним, оскільки для будь-якої точки $x\in R$ різниця $x-x\in Z$, тобто $(x,x)\in R$; також є симетричним, оскільки належність будь-якої пари (x,y) відношенню ρ означає $x-y=k\in Z$, але тоді $y-x=-k\in Z$, тобто пара $(y,x)\in\rho$; не є антисиметричним, оскільки, наприклад, пари $(1.2;3.2)\in\rho$ та $(3.2;1.2)\in\rho$, але $3.2\neq1.2$; є транзитивним, оскільки для будь-яких $x,y,z\in R$ належність пар (x,y) и (y,z) відношенню ρ означає $x-y=k\in Z$ та $y-z=n\in Z$, але тоді $x-z=k+n\in Z$, тобто $(x,z)\in\rho$;

3) Дане відношення не є рефлексивним, оскільки з усіх пар (x,x), $x\in Z$ тільки пара $(0,0)\in\rho$, адже для всіх інших $x\in Z$ не виконано рівняння $2x=3x$; не є симетричним, оскільки, наприклад, пара $(3,2)\in\rho$[17], а пара $(2,3)\notin\rho$[18]; є антисиметричним, оскільки для будь-яких пар $(x,y)\in\rho$, $(y,x)\in\rho$ одночасно виконуються рівняння $2x=3y$ и $2y=3x$, тобто $9x=4x$ и $4y=9y$, але це може бути тільки в тому випадку, якщо $x=y=0$; не є транзитивним, оскільки наприклад, пара $(9,6)\in\rho$[19], пара $(6,4)\in\rho$[20], але пара $(9,4)\notin\rho$[21];

4) Дане відношення не є рефлексивним, оскільки для $\varnothing\in P(Z)$ перетинання $\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$, тобто $(\varnothing,\varnothing)\notin\rho$; є симетричним, оскільки приналежність будь-якої пари (x,y) відношенню ρ означає $x\cap y\neq\varnothing$, але тоді $y\cap x\neq\varnothing$, тобто пари $(y,x)\in\rho$; не є транзитивним, оскільки, наприклад, пара $(\{1,2\},\{2,3\})\in\rho$[22] і пара $(\{2,3\},\{3,6,7\})\in\rho$[23], але пара $(\{1,2\},\{3,6,7\})\notin\rho$[24].

Завдання до лабораторного заняття

Варіант 1.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.

{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}.

2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай $(a, b)\in R$, якщо:

a вище зростом, ніж *b*;

3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин $(A,\leq)$, де A={a, b, c, d}:

$\leq$={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (b, c), (c, d), (a, d), (b, d)};

4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

---

[17] $2*3=3*2$
[18] $2*2\neq3*3$
[19] $2*9=3*6$
[20] $2*6=3*4$
[21] $2*9\neq3*4$
[22] $\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}\neq\varnothing$
[23] $\{2,3\}\cap\{3,6,7\}=\{3\}\neq\varnothing$
[24] $\{1,2\}\cap\{3,6,7\}=\varnothing$

R={(1, 1), (2, 2)};

5. Чи задає наведена матриця відношення порядку? Зобразіть граф відношення.

	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	1
d	1	1	0	1

Варіант 2.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.
   {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}.
2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:
   a і *b* народились в один день;
3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≤), де A={a, b, c, d}:
   ≤={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (b, c)};
4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:
   R={(1, 1), (2, 2), (3, 3)};
5. Чи задає наведена матриця відношення порядку? Зобразіть граф відношення.

	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	0
c	0	0	1

Варіант 3.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.
   {(1,3),(2, 4),(3,1),(4, 2)}.
2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:
   a є родичем *b*;
3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≤), де A={a, b, c, d}:
   ≤={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)};
4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:
   R={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3)};
5. Чи задає наведена матриця відношення порядку? Зобразіть граф відношення.

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	1	0	1

Варіант 4.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.
   {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}.

2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:

   a знайомий з *b*.
3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≤), де A={a, b, c, d}:

   ≤={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c), (c, d), (a, d), (b, d)};.
4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

   R={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 1)}.
5. Чи задає наведена матриця відношення порядку? Зобразіть граф відношення.

	a	*b*	*c*	*d*
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	1	0	1	0
d	0	1	0	1

Варіант 5.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.

   {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}.
2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:

   a сильніший, ніж *b*.
3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A, K), де A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} та xKy, якщо x ділить націло y:
4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

   R={(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)};
5. Чи задає наведена матриця відношення порядку? Зобразіть граф відношення.

	a	*b*	*c*
a	1	1	1
b	0	1	1
c	1	1	1

Варіант 6.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.

   {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)}.
2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:

   a є братом *b*;
3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≥), де A={множина позитивних цілих чисел, які діляться на 27}, а x≥y, якщо x ділить націло y.
4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

   R={(2, 1), (1, 2), (3, 3)};

5. Чи задає наведена матриця відношення порядку? Зобразіть граф відношення.

	a	*b*	*c*	*d*
a	1	1	1	0
b	1	1	1	0
c	1	1	1	0
d	0	0	0	1

Варіант 7.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.

2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:

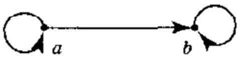
a розумніший *b*.

3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≥), де A={множина позитивних цілих чисел, які діляться на 54}, а x≥y, якщо x ділить націло y.

4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

R={(1, 3), (2, 3), (3, 3)};

5. Відношення задано графом. Чи є дане відношення порядку або еквівалентності. Складіть матрицю відношення.



Варіант 8.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.

2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:

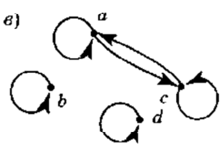
a і *b* вчаться в одній групі.

3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≥), де A={множина позитивних цілих чисел, які діляться на 36}, а x≥y, якщо x ділить націло y..

4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

R={(1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3)};

5. Відношення задано графом. Чи є дане відношення порядку або еквівалентності. Складіть матрицю відношення.



Варіант 9.

1. Визначте, які властивості має приведене нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.

{(1, 3), (1,4), (2, 3), (1,2), (3, 1), (3, 4)}.

2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:

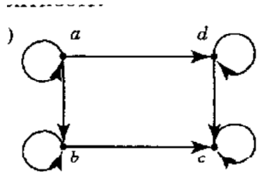
a нижче *b*;

3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≥), де A={множина позитивних цілих чисел, які діляться на 48}, а x≥y, якщо x ділить націло y.

4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

R={(1, 2), (3, 2), (2, 1)}.

5. Відношення задано графом. Чи є дане відношення порядку або еквівалентності. Складіть матрицю відношення.



Варіант 10.

1. Визначте, які властивості має надане нижче співвідношення. Співвідношення задано на множині A={1,2,3,4}.

2. Визначте, яку властивість має наведене нижче співвідношення, задане на деякій множині людей. Нехай (*a, b*) ∈ R, якщо:

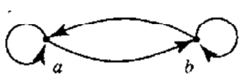
a є батьком *b*;

3. Побудуйте діаграми Гессе для наступних ЧУ-множин (A,≥), де A={множина позитивних цілих чисел, які діляться на 56}, а x≥y, якщо x ділить націло y.

4. Нехай A={1, 2, 3}. Встановіть, чи є наведене нижче співвідношення на A відношенням еквівалентності:

R={(1, 1), (1, 2), (1, 3)};

5. Відношення задано графом. Чи є дане відношення порядку або еквівалентності. Складіть матрицю відношення.



Питання для самоперевірки.

1. Дайте визначення відношення.
2. Яке відношення називається рефлексивним?
3. Яке відношення називається антирефлексивним?
4. Яке відношення називається симетричним?
5. Яке відношення називається асиметричним?
6. Яке відношення називається антисиметричним?

7. Яке відношення називається транзитивним?
8. Якими властивостями має відношення нестрогого порядку?
9. Якими властивостями має відношення строгого порядку?
10. Якими властивостями має відношення еквівалентності?
11. Що називається класом еквівалентності?

Лабораторне заняття №5. Обчислення предикатів. Математична індукція

Теоретичні відомості

Предикатом називається твердження, яке містить змінні, конкретні значення яких не вказані. При одних значеннях змінних твердження може бути істинним висловлюванням, при інших – хибним.

Приклад 1

$$\begin{aligned} P(x):&\quad 3+x=5; \\ Q(x,y,z):&\quad x^2+y^2\geq z^2; \\ R(x,y):&\quad x^2+y^2\geq 0; \\ S(x):&\quad -1\leq \sin(x)\leq 1, \end{aligned}$$

Додатково в логіці предикатів використовують дві спеціальні операції, які називають **кванторами**. За допомогою цих операцій, по-перше, пропозиційні форми можна перетворювати у висловлення, і по-друге, теорія предикатів стає значно гнучкішою, глибшою і багатшою, ніж теорія висловлень[25].

Найпопулярнішими і найбільш часто вживаними виразами у математиці є фрази або формулювання типу «для всіх» та «існує». Вони входять до більшості тверджень, висновків, лем або теорем при проведенні математичних доведень.

Поняття, що відповідає словам «для всіх», лежить в основі квантора загальності, який означається таким чином.

Нехай $P(x)$ – предикат на множині M. Тоді ***квантор загальності*** - це операція, що ставить у відповідність $P(x)$ висловлення «для всіх x з M $P(x)$ істинно». Для позначення цієї операції використовують знак $\forall$, який і називають квантором загальності. Останнє висловлення у математичній логіці записують так: $\forall x P(x)$ (читається: «для всіх x P від x»).

Існує й інший квантор, що є у певному розумінні є двоїстим до квантора загальності і називається ***квантором існування***. Позначається він знаком $\exists$. Якщо $Q(x)$ - деякий предикат на множині M, то висловлення «існує в множині M елемент x такий, що $Q(x)$ істинне» записується у вигляді $\exists x Q(x)$ і читається скорочено «існує такий x, що Q від x» або «є такий x, що Q від x».

Якщо D(x) – предикат, то висловлювання $\forall$xD(x) істинно тоді і тільки тоді, коли вислів D(x) істинний для будь-якого x. Заперечення $\forall$xD(x) може бути записано як:

$$\sim\forall x D(x)$$

[25] Саме тому логіку предикатів іноді називають теорією квантифікації.

Щоб довести хибність висловлювання $\forall x D(x)$, достатньо знайти тільки одне значення x, для якого $\forall x D(x)$ – хибне[26]. Таким чином, $\forall x D(x)$ хибне тоді і тільки тоді, коли $\exists x(\sim D(x))$.

Для утворення заперечення з навішеним квантором загальності потрібно замінити $\forall x$ на $\exists x$ і взяти заперечення предиката, що слідує за квантором[27].

Універсальна конкретизація

Із істинності $\forall x D(x)$ слідує істинність $D(a)$ для довільного a з універса.

Універсальне узагальнення

Якщо довільне a з універса забезпечує істинність $D(a)$, робимо висновок, що $\forall x D(x)$ істинно.

Екзистенціональна конкретизація.

Із істинності $\exists x D(x)$ випливає, що існує конкретне b таке, що $D(b)$ істинно.

Екзистенціональне узагальнення

З існування конкретного c з універса, для якого $D(c)$ істинно, можна зробити висновок, що $\exists x D(x)$.

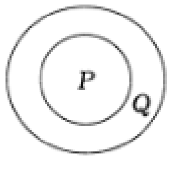
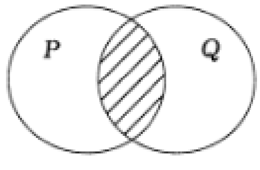
Приклад 2

а) Якщо p(x) – твердження «x – студент», а твердження c(x) – «x вчиться старанно», то твердження $\forall x\big(p(x) \rightarrow c(x)\big)$ може бути інтерпретовано як «*всі студенти вчаться старанно*».

б) Якщо p(x) – твердження «x – слон», а твердження c(x) – «x віддає перевагу арахісу в шоколаді», то твердження $\exists x\big(p(x) \wedge c(x)\big)$ може бути інтерпретовано як «*деякі слони віддають перевагу арахісу в шоколаді*».

в) Твердження «*всі люди смертні*» може бути записане як:
$\forall x\big(p(x) \rightarrow c(x)\big)$, де p(x) – «x – людина», а твердження c(x) – «x – смертна».

Для неформальної перевірки правильності висловлювання, що включають твердження типу «для всіх» чи «для декого», використовуються діаграми Ейлера, які складаються з кіл, що зображують множини:

Твердження «всі p є q»	Твердження «деякі p є q»
	

[26] що рівносильне $\sim D(x) -$ істинне

[27] заперечення вислову, що містить більше одного квантора, здійснюється шляхом послідовного розгляду кожного квантора, починаючи з першого.

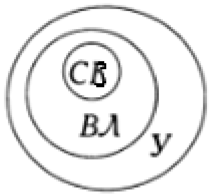
Для перевірки висловлювання потрібно спробувати побудувати діаграму Ейлера, <u>в якій задані твердження вважаються істинними, а висновок хибний</u>. Якщо така побудова неможлива, то висловлювання може бути вірним.

Приклад 3

Розглянемо висловлювання:

1 твердження	Всі студенти ВНЗ видатні
2 твердження	Всі видатні люди – вчені
висновок	Всі студенти ВНЗ – вчені.

Побудуємо відповідну діаграму:



Принцип математичної індукції. Нехай P(n) є таке твердження, що

а) P(1) істинне, та

б) для кожного k, якщо P(k) істинно, то P(k+1) істинно.

Тоді P(n) істинне для будь-якого цілого додатного числа n.

$$(P(1) \wedge ((\forall k)P(k) \rightarrow P(k+1)) \rightarrow (\forall n)P(n))$$

Завдання до лабораторного заняття

Варіант 1.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

   Всі адвокати заможні

   Всі заможні їдять омарів

   Всі адвокати їдять омарів.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$$1+4+7+10+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

3. Нехай N(x) – «x – натуральне число», C(x) – «x – ціле число», P(x) – «x – просте число», E(x) – «x – парне число», O (x) – «x – непарне число», D(x,y) «y ділиться на x». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

   P(z); б) E(2) Λ P(2).

4. Заданий предикат: P(x,y,z): $x^2 + y^2 \geq z^2$. Запишіть наступне висловлювання: P(3,4,5). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Варіант 2.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Деякі марсіани зелені

Всі ялинки зелені

Деякі марсіани – ялинки.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

3. Нехай N(x) – «x – натуральне число», C(x) – «x – ціле число», P(x) – «x – просте число»,E(x) – «x – парне число», O (x) – «x – непарне число», D(x,y) «y ділиться на x». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

$\forall x(D(2,x)\to E(x))$, б) $\exists x(E(x)\to D(\mathrm{x},6))$.

4. Заданий предикат: Q(x,y): $y=(x-4)/(x+4)$. Запишіть наступне висловлювання: Q(8,2). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Варіант 3.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Всі лікарі люблять музику

Всі поети люблять музику

Всі лікарі – поети.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

3. Нехай N(x) – «x – натуральне число», C(x) – «x – ціле число», P(x) – «x – просте число»,E(x) – «x – парне число», O (x) – «x – непарне число», D(x,y) «y ділиться на x». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

а) $\forall x[P(x)\to\exists y\left(E(y)\to D(x,y)\right)]$, б) $\forall x(N(x)\to C(\mathrm{x}))$.

4. Заданий предикат: R(x,r): $|x-1|\le r$. Запишіть наступне висловлювання: R(3,7). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Варіант 4.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Всі машини дорогі

Велосипед недорогий

Велосипед – не машина.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$1+r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$.

3. Нехай N(x) – «x – натуральне число», C(x) – «x – ціле число», P(x) – «x – просте число»,E(x) – «x – парне число», O (x) – «x – непарне число», D(x,y)

«у ділиться на х». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

а) $\exists x(N(x) \to C(\mathrm{x}))$, б) $\forall x(C(x) \to N(\mathrm{x}))$.

4. Заданий предикат: P(x,y,z): $x^2 + y^2 = z^2$. Запишіть наступне висловлювання: P(3,4,5). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Варіант 5.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Всі люди смертні
Гусаки – не люди
Гусаки – безсмертні.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що: $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$.

3. Нехай N(x) – «х – натуральне число», C(x) – «х – ціле число», P(x) – «х – просте число»,E(x) – «х – парне число», O (x) – «х – непарне число», D(x,y) «у ділиться на х». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

а) $\forall x \forall y[O(x) \to (P(y) \to D(x,y))]$, б) $\forall x[C(x) \to (E(x) \lor \overline{E(x)})]$.

4. Заданий предикат: Q(x,y): якщо$x^2 = y^2$, то $y = x.$ Запишіть наступне висловлювання: Q(-2,2). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Варіант 6.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Всі генії нелогічні
Деякі політики нелогічні
Деякі політики – генії.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

3. Нехай N(x) – «х – натуральне число», C(x) – «х – ціле число», P(x) – «х – просте число»,E(x) – «х – парне число», O (x) – «х – непарне число», D(x,y) «у ділиться на х». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

а) $\exists x \forall y[(C(x) \land C(y)) \to D(x,y)]$, б) $\forall x \forall y[(E(x) \land O(x)) \to \overline{D(x,y)}]$.

4. Заданий предикат: S(n,y): $y = n!$ Запишіть наступне висловлювання: S(4,24). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Варіант 7.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Деякі поети – невдахи

Деякі атлети – не є невдахи

Деякі поети є атлетами.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$.

3. Нехай x і y – деякі люди, Q(x,y) – значить «x батько y». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

а) $\forall x\ \exists y\ \ Q(x,y)$, б) $\exists x\ \ \forall y\ \ Q(x,y)$.

4. Заданий предикат: T(a,b,c): «a подобається b більше, ніж c». Запишіть наступне висловлювання: T(Петро, Ганна, Марина).

Варіант 8.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Деякі адвокати заможні

Деякі лікарі заможні

Деякі лікарі – адвокати.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, де α>-1, $\alpha \neq 0$, n – натуральне число, більше 1.

3. Нехай x і y – деякі люди, Q(x,y) – значить «x батько y». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

$\forall x\ \forall y\ \ Q(x,y)$, б) $\forall y\ \exists x\ \ Q(x,y)$.

4. Заданий предикат: S(a,b,x): $a \leq x^2 \leq b$ Запишіть наступне висловлювання: S(0,4,-3). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Варіант 9.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Всі чоловіки люблять м'ясо

Деякі вчителі – чоловіки

Деякі вчителі – люблять м'ясо

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$1^3+2^3+...+n^3 = (1+2+...+n)^2$.

3. Нехай x і y – деякі люди, Q(x,y) – значить «x батько y». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, встановивши їх значення істинності:

$\exists y\ \ \forall x\ Q(x,y)$, б) $\exists x\ \exists y\ Q(x,y)$.

4. Заданий предикат: T(a,b): «a грає в теніс краще, ніж b». Запишіть наступне висловлювання: T(Петро, Костянтин).

Варіант 10.

1. Перевірте правильність висловлювання за допомогою діаграм Ейлера.

Деякі лікарі – розумні
Всі розумні люди – поети
Деякі лікарі – поети.

2. Використовуючи математичну індукцію, доведіть, що:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Запишіть такі висловлювання використовуючи знаки кванторів:

а) існує число x таке, що x+1=5; б) яким би не було число y, y+0=y.

4. Заданий предикат: R(x): $[x] \leq x$. Запишіть наступне висловлювання: R(3,756). Встановіть, чи істинне задане висловлювання.

Питання для самоперевірки.

1. Дайте визначення предиката.
2. Які види предикатів бувають?
3. Що таке область значень і область визначення предиката?
4. Для чого використовуються діаграми Ейлера?
5. Сформулюйте принцип математичної індукції.

Лабораторне заняття №6. Формули включення-виключення. Комбінаторика

Теоретичні відомості

В основі розв’язання багатьох комбінаторних задач лежить **формула включень і виключень.**

Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – підмножини деякої множини X, тоді число елементів в об’єднанні множин

$$|X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - \cdots$$
$$\dots - |X_{n-1} \cap X_n| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| + \cdots$$
$$\dots + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n+1}}|X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|,$$

число елементів, які не належать об’єднанню множин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$|X \backslash X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = |X| - |X_1| - |X_2| - \dots - |X_n| + |X_1 \cap X_2| + \cdots$$
$$\dots + |X_{n-1} \cap X_n| - |X_1 \cap X_2 \cap X_3| - \dots - |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| + \cdots$$
$$\dots + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n+1}}|X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|.$$

Приклад 1

На вступному екзамені по математиці були запропоновані три задачі: по алгебрі, планіметрії і стереометрії. Із 1000 абітурієнтів задачу по алгебрі розв’язали 800, по планіметрії – 700, а по стереометрії – 600 абітурієнтів. При цьому задачі по алгебрі і планіметрії розв’язали 600 абітурієнтів, по алгебрі и стереометрії – 500, по планіметрії и стереометрії – 400. Всі три задачі розв’язали 300 абітурієнтів. Чи існують абітурієнти, які не розв’язали жодної задачі, і якщо так, то скільки їх?

Розв’язання

Нехай *U* – множина всіх абітурієнтів, *A* – множина абітурієнтів, які розв’язали задачу по алгебрі, *B* – множина абітурієнтів, які розв’язали задачу по планіметрії, С – множина абітурієнтів, які розв’язали задачу по стереометрії. За умовою $n|U| = 1000$, $n|A| = 800$, $n|B| = 700$, $n|C| = 600$, $n|A \cap B| = 600$, $n|A \cap C| = 500$, $n|B \cap C| = 400$, $n|A \cap B \cap C| = 300$.

До множини *A* U *B* U C включені всі абітурієнти, що розв’язали хоча б одну задачу. За формулою (2) маємо:

$n|A \cup B \cup C| = 800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900$.

Звідси випливає, що не всі вступники розв’язали хоча б одну задачу. Жодної задачі не розв’язали:

$n|U| - n|A \cup B \cup C| = 1000 - 900 = 100$ (абітурієнтів).

Основні формули комбінаторики

Вид вибірки	Без повторень	З повтореннями
Перестановки	$P_n = n!$	$\overline{P}_{k_1 \ldots k_s} = \dfrac{n!}{k_1! \ldots k_s!}$, $\sum_i k_i = n$
Розміщення	$A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$\overline{A}_n^r = n^r$
Сполучення	$C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$	$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$

Приклад 2

Чемпіонат, в якому приймають участь 16 команд, проводиться в два тури (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною із інших команд). Визначити, яка кількість зустрічей повинно бути проведено.

Розв'язання

В кожній зустрічі одну з команд назвемо «господарем2, а іншу – «гостем». Тоді кількість зустрічей дорівнює кількості пар «господар-гість», які обираються з цих 16 команд. Отже, повинно бути проведено $A_{16}^2 = \dfrac{16!}{(16-2)!} = 16*15 = 240$ зустрічей.

Приклад 3

Скільки різних чотирьохзначних чисел можна скласти із цифр 0,1,2,3,4,5,6,7 так, щоб в кожному числі була цифра 1? (Цифри в числі не повинні повторюватись).

Розв'язання

Чисел, з одиницями на першому місці, буде A_7^3. Чисел, с одиницями на другому (третьому, четвертому) місці, також було б по A_7^3, якщо б в данний набір цифр не входив нуль. Тому слідує виключити ті числа, де нуль стоїть на першому місці, а їх по A_6^2. Таким чином: $A_7^3 + 3\left(A_7^3 - A_6^2\right) = 7*6*5* + 3(7*6*5 - 6*5) = 750$ чисел.

Приклад 4

З колоди, в якій міститься 52 карти (з них 4 тузи), взяли 10 карт. В скількох випадках серед них буде хоча б один туз ?

Розв'язання

Всього 10 карт з 52 можна вибрати C_{52}^{10} способами. Варіантів, коли серед цих 10 карт немає жодного туза, буде C_{48}^{10}. Тоді шукана кількість дорівнює

$$C_{52}^{10} - C_{48}^{10} = \frac{52!}{10!*42!} - \frac{48!}{10!*38!}$$

Приклад 5

Розв'язати рівняння $C_{x+2}^4 = x^2 - 1$.

Розв’язання

1) $x \geq 2, \quad x \in N$.

2) $\frac{(x+2)!}{4!*(x-2)!} = x^2 - 1$. Звідси після перетворень і скорочення на $(x-1)(x+1) \neq 0$ маємо $\frac{x(x+2)}{24} = 1$

3) $x^2 + 2x - 24 = 0$, звідки x = 4 чи x = - 6 (даний варіант не задовільняє умові). Таким чином, x = 4.

Завдання до лабораторного заняття

Варіант 1.

1. З команди, в якій 10 плавців, обирається четвірка, яка приймає участь в естафеті комплексним плаванням (тобто кожний пливе своїм стилем). Скількома способами можна вибрати цю естафетну четвірку ?
2. Три стрільця повинні влучити у 15 мішеней (кожен по п'ять). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?
3. З 8 тенісистів і 6 тенісисток утворюють 3 змішані пари (в пару входять по одному тенісисту і одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити ?
4. У вищій лізі чемпіонату України з футболу грають 16 команд. Скільки є способів розподілення I, II та III місця і двох команд, які перейдуть в першу лігу (дві останні команди) ?
5. В класі 30 учнів, 16 з них займаються музикою, 17 захоплюються тенісом, а 10 займаються і музикою і тенісом. Чи є в класі учні, байдужі і до музики, і до тенісу, якщо так, то скільки їх?
6. Знайдіть *n*, якщо $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 15(n+2)$.

Варіант 2.

1. У відділі інституту працюють декілька викладачів. Кожен із них знає хоча б одну іноземну мову, причому: 6 знають німецьку, 6 – англійську, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, 1- все три мови. Скільки всього людей працює у відділі?
2. Розв’язати рівняння $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + ... + C_x^{x-10} = 1023$.
3. У фортепіанному гуртку навчаються 10 чоловік, у гуртку художнього слова - 15, у вокальному гуртку - 12 і у фотогуртку - 20 чоловік. Скількома способами можна створити групу з чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа ?
4. У турнірі беруть участь 12 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони

відрізняються учасниками хоча б однієї партії; колір фігур та номер столу не враховується).

5. Для поздоровлення дівчат, яких у класі 10, зі святом, хлопці вирішили купити 10 різних книг з 15, які запропонувало видавництво "Факт". Скільки є різних способів отримання подарунків дівчатами ?

6. Скількома способами можна переставити букви в слові “вантажноспроможний”, аби дві букви “о” не йшли поряд?

Варіант 3.

1. В класі навчається 35 учнів. Всі вони в вільний час або плавають в басейні, або грають на скрипці, або працюють у ботанічному саду. 25 з них займаються плаванням та ботанікою, а 5 з них ще й музиканти. Чемпіон класу з плавання не грає на скрипці й не любить ботаніку, а два його товариша-ботаніки не вміють плавати, але добрі скрипалі. Серед скрипалів є 7 чоловік, що не плавають та не працюють в ботанічному саду. Скільки чоловік відвідують басейн?

2. Знайти n, якщо $\dfrac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240\, A_{n+3}^{k+3}, \quad k \le n.$

3. В чемпіонаті України з футболу грає 18 команд. Скількома способами можуть розподілитись місця, зайняті командами, якщо відомо, що команди "Динамо", "Дніпро", "Шахтар", "Чорноморець"і "Таврія" займуть перші п'ять місць ?

4. На біржу фірма повинна відрядити двох брокерів, трьох дилерів і одного менеджера. Скількома способами це можна зробити, якщо до складу фірми входять 15 брокерів, 10 дилерів і 5 менеджерів?

5. На футбольний турнір треба послати збірну команду у складі: тренер, його помічник, 2 асистента, 20 футболістів, лікар і 2 масажиста. Тренерський склад може бути відібраний з 10 спеціалістів, футболісти - з 25 спортсменів, лікаря треба вибрати з трьох кандидату, а масажистів - двох з п'яти. Скількома способами може бути укомплектована така команда ?

6. Скільки п’ятицифрових чисел можна скласти з дев’яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Варіант4.

1. Під час дослідження читацьких уподобань студентів виявилось, що 60% студентів читають журнал А, 50% - журнал В, 50% - журнал С, 30% - журнал А і В, 20% - журнал В і С, 40% - журнал А і С, 10% - журнал А, В і С. Скільки відсотків студентів не читає жодного журналу?

2. Знайти показник бінома $\left(\dfrac{a}{4} - \dfrac{3}{5}b\right)^n$, якщо в розкладанні його сума всіх показників степенів числа b дорівнює 36.

3. З букв розрізної абетки складено слово "конус". Скільки "слів" можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.

4. З 15 робітників фірми директорові треба виділити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і чотирьох кур'єрів. Скількома способами це можна зробити ?

5. Десять тенісистів мають бути розподілені в групи по 2, 3 і 5 спортсменів для поїздки на три турніри, які обираються з 6 можливих. Скількома способами це можна зробити ?

6. Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми?

Варіант5.

1. Якщо відомо, що кожний учень в школі вивчає хоча б одну із вказаних 3-х мов, знайдіть загальну кількість учнів в школі. Відомо, що вивчають англійську 28 учнів, французьку - 23 учні, німецьку -23 учні, англійську та французьку - 12 учнів, англійську та німецьку - 11 учнів, французьку та німецьку - 8 учнів, всі 3 мови -5 учнів.

2. Знайти показник бінома $(a+b)^n$, якщо сума всіх його біноміальних коефіцієнтів розкладання в 32 рази більше, ніж показник бінома.

3. З 8 тенісистів і 6 тенісисток утворюють 3 змішані пари (в пару входять по одному тенісисту і одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити ?

4. У вищій лізі чемпіонату України з футболу грають 16 команд. Скільки є способів розподілення I, II та III місця і двох команд, які перейдуть в першу лігу (дві останні команди) ?

5. Скількома способами можна розташувати 12 різних деталей у трьох ящиках?

6. В мами було 2 яблука, 3 груші та 2 апельсини. Кожен день вона давала дитині по одному фрукту. Скількома способами вона могла це зробити?

Варіант6.

1. В класі 40 чоловік. З них з англійської мови трійки мають 19 чоловік, з математики – 17, з фізики – 22. Лише з одного предмета мають трійки: з фізики – 11, з англійської – 4, з математики – 4. 7 чоловік мають трійки з математики та з фізики, з них 5 чоловік мають трійки й з англійської. Скільки чоловік навчаються без трійок?

2. При якому значенні x коефіцієнт четвертого члена розкладання бінома $(a+b)^{\lg x-2}$ дорівнює показнику бінома?

3. Чемпіонат, в якому беруть участь 16 команд, проводиться в два круги (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яка кількість зустрічей має бути проведена.

4. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо кожну з них використовувати лише один раз?

5. У турнірі беруть участь 12 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони

відрізняються часниками хоча б однієї партії; колір фігур та номер столу не враховується).

6. Для поздоровлення дівчат, яких у класі 10, зі святом, хлопці вирішили купити 10 різних книг з 15, які запропонувало видавництво "Факт". Скільки є різних способів отримання подарунків дівчатами?

Варіант 7.

1. В класі навчається 35 чоловік. Всі вони в вільний час або плавають в басейні, або грають на скрипці, або працюють в ботанічному саду. 25 з них займаються плаванням та ботанікою, а 5 з них ще й музиканти. Чемпіон класу з плавання не грає на скрипці й не любить ботаніку, а два його товариша-ботаніки не вміють плавати, але добрі скрипалі. Серед скрипалів є 7 чоловік, що не плавають та не працюють в ботанічному саду. Скільки в класі скрипалів?

2. Знайти х, якщо п'ятий член розкладання бінома $\left(\sqrt{x}+x^{-1}\right)^{6}$ дорівнює $\frac{5}{9}$

3. В лотереї розігрується 8 предметів. Всього в "урні" 50 квитків. Виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна обрати так, щоб тільки два з них були виграшні?

4. З 8 тенісистів і 6 тенісисток утворюють 3 змішані пари (в пару входять по одному тенісисту і одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити ?

5. У вищій лізі чемпіонату України з футболу грають 16 команд. Скільки є способів розподілення І, ІІ та ІІІ місця і двох команд, які перейдуть в першу лігу (дві останні команди) ?

6. Скількома способами можна розташувати 12 різних деталей у трьох ящиках?

Варіант 8.

1. На одній з кафедр університету працює 13 викладачів, кожен з них знає хоча б одну іноземну мову. 10 чоловік знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку, 5 – англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік: знають всі три мови?

2. Розв'яжіть нерівність $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$.

3. Розклад на день містить 5 уроків. Визначити кількість можливих розкладів при виборі з 13 дисциплін, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі на день.

4. На футбольний турнір треба відправити збірну команду у складі: тренер, його помічник, 2 асистента, 20 футболістів, лікар і 2 масажиста. Тренерський склад може бути відібраний з 10 спеціалістів, футболісти - з 25 спортсменів, лікаря треба вибрати одного з трьох кандидатів, а масажистів - двох з п'яти. Скількома способами може бути укомплектована така команда?

5. З цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 утворюють всілякі п'ятицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, в яких є цифри 7,8,9 одночасно.

6. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з дев’яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Варіант 9.

1. В класі навчається 35 чоловік. Всі вони в вільний час або плавають в басейні, або грають на скрипці, або працюють в ботанічному саду. 25 з них займаються плаванням та ботанікою, а 5 з них ще й музиканти. Чемпіон класу з плавання не грає на скрипці й не любить ботаніку, а два його товариша-ботаніки не вміють плавати, але добрі скрипалі. Серед скрипалів є 7 чоловік, що не плавають та не працюють в ботанічному саду. Скільки ботаніків не цікавляться а ні плаванням, а ні музикою?

2. Знайдіть n, якщо $\frac{1}{C_4^n} = \frac{1}{C_5^n} + \frac{1}{C_6^n}$;

3. Команда з п'яти чоловік виступає в змаганнях, в яких бере участь ще 13 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, при умові, що жодне місце на цих змаганнях не може бути поділено?

4. Садівник повинен протягом трьох днів посадити 10 дерев десяти різних порід. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу, якщо буде висаджувати не менше одного дерева в день?

5. Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми?

6. Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів по чотирьох ящиках, так, щоб в кожному ящику опинилося по 7 предметів?

Варіант10.

1. На базі відпочинку 70 чоловік. З них 27 займаються в драмкружку, 32 співають в хорі, 22 захоплюються спортом. В драмкружку 10 чоловік з хору, в хорі 6 спортсменів, в драмкружку 8 спортсменів; 3 спортсмени відвідують й драмкружок, й хор. Скільки чоловік зайняті лише спортом?

2. Знайдіть n, якщо $5C_n^3 = C_{n+2}^4$;

3. Скільки можна скласти різних неправильних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3,5,7,13,17?

4. З лабораторії, в якій працює 25 чоловік, 5 співробітників повинні поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії, його замісник і головний інженер одночасно їхати не можуть ?

5. У турнірі беруть участь 12 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками хоча б однієї партії; колір фігур та номер столу не враховується).

6. Для поздоровлення дівчат, яких у класі 10, зі святом, хлопці вирішили купити 10 різних книг з 15, які запропонувало видавництво "Факт". Скільки є різних способів отримання подарунків дівчатами

Питання для самоперевірки.

1. Правило суми у комбінаториці.
2. Правило добутку у комбінаториці.
3. Що таке число переміщень?
4. Що таке число розміщень?
5. Що таке число сполучень?
6. Різниця поняття вибірки від поняття підмножини.
7. Що таке комбінаторика?
8. Що таке Біном Ньютона?
9. Якою властивістю володіє Біном Ньютона?
10. Назвіть властивості біноміальних коефіцієнтів.
11. Намалюйте трикутник Паскаля.

Лабораторне заняття №7. Підстановки. Рекурентні співвідношення

Теоретичні відомості

Розташування чисел 1, 2,…,n в деякому визначеному порядку називається **перестановкою** із ***n*** чисел (чи ***n*** символів).

Якщо в деякій перестановці поміняти місцями два символи (необов'язково сусідні), а всі інші символи залишити на місці, то отримаємо нову перестановку. Таке перетворення перестановки називається **транспозицією.**

Вважається, що числа i та j утворюють в даній перестановці **інверсію**, якщо $i>j$, але i знаходиться в цій перестановці раніше за j. Перестановка називається **парною**, якщо її символи утворюють парну кількість інверсій, і **непарною** – у протилежному випадку.

Приклад

Перестановка (2,3,1,4,5) є парною (дві інверсії),

(2,3,1,5,4) – непарною (три інверсії).

Властивості:

1. Кількість різних перестановок із n символів дорівнює добутку

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n = n!$$

2. Від довільної перестановки із n символів можна перейти до будь-якої іншої перестановки із тих же елементів з допомогою декількох транспозицій.

3. Кожна транспозиція змінює парність перестановки.

Дві перестановки із n символів, записані одна під одною, визначають деяке взаємно однозначне відображення множини перших n натуральних чисел на себе.

Довільне взаємно однозначне відображення А множини перших n натуральних чисел на себе називається **підстановкою *n*-го** степеню:

$$\alpha = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Тут α_i – число, в яке при відображенні А переходить число i[28], i=1,2,…,n. Читають так: при відображенні(підстановці) А число i_1 переходить в α_1, i_2 – в α_2,…, i_n – в α_n.

Від одного запису підстановки А до іншого можна перейти з допомогою декількох транспозицій стовпчиків.

[28] числа в першому рядку підстановки впорядковані за зростанням

Зрозуміло, що кількість підстановок n-го степеня дорівнює кількості перестановок із n символів, тобто дорівнює n!

Підстановка називається **тотожною** або **одиничною, якщо вона має вигляд:**

$$e = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Приклад

Тотожна підстановка 4-го порядку

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Підстановка називається **парною,** якщо парною буде кількість інверсій у нижній перестановці. В іншому випадку підстановка **непарна**.

Добутком[29] двох підстановок *n*-го степеня називається підстановка *n*-го степеня, отримана в результаті послідовного виконання даних підстановок.

Приклад

Знайти добуток підстановок $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ та $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множення підстановок *n*-го степеню при $n \geq 3$ *некомутативне.*

Множення підстановок *асоціативне*, тобто (αβ)γ=α(βγ).

Дійсно, якщо символіi_1 у підстановці α переходить в i_2, символ i_2 у підстановці β переходить в i_3, а i_3 у підстановці γ переходить в i_4, то у підстановці αβ символ i_1 переходить в i_3, у підстановці βγ символ i_2 переходить в i_4, тому у обох підстановках (αβ)γ та α(βγ) символ i_1 переходить в символ i_4.

Легко перевірити, що для будь-якої підстановки α: αe=eα=α.

Оберненою для підстановки α називається така підстановка α^{-1} того ж степеня, що $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Для підстановок більших порядків, зображення їх у вигляді таблиці є громіздким, тому краще записувати підстановки у вигляді циклів.

Приклад

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)(4),$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4).$$

Довжиною циклу називається кількість елементів з яких він складається.

[29] композицією

Непорожня множина із визначеною в ній бінарною операцією, називається **групоїдом.**

Групоїд, в якому визначена асоціативна операція, називається **півгрупою**. Півгрупа, в якій існує одиничний (нейтральний) елемент, називається **моноїдом**.

Одиничний елемент позначають ***e***: для будь-якого $g \in G$ [$ge = eg = g$]. Моноїд, кожен елемент якого оборотний, називається **групою.**

Оборотним називається такий елемент множини, для якого в цій множині існує обернений. **Оберненим** до елемента $g \in G$ називається такий елемент g^{-1} цієї ж множини, для якого $gg^{-1}=g^{-1}g = e$.

Повне означення групи.

Непорожня множина G, на якій визначено бінарну операцію , називається **групою,** якщо виконуються наступні умови:

1) операція асоціативна;

2) в множині G існує одиничний елемент ;

3) кожний елемент $g \in G$ множини G оборотний.

Якщо операція, визначена в групі, є комутативною, то група G називається **комутативною** або **абелевою.**

Група G називається **скінченною**, якщо кількість її елементів (порядок групи) скінченна.

Приклад

1. Множини цілих, раціональних, дійсних чисел відносно додавання: (Z,+), (Q,+), (R,+).

2. Множини всіх додатніх раціональних, дійсних чисел відносно множення : (Q_+,•), (R_+,•).

3. Сукупність чисел 1 та –1 утворюють групу за множенням: ({1;-1},•).

4. Множина всіх підстановок *n*-го степеня відносно операції множення (**симетрична** група, позначають $\mathbf{S_n}$).

5. Множина всіх парних підстановок *n*-го степеня відносно множення (**знакозмінна** група, позначають $\mathbf{A_n}$).

Рекурентним співвідношенням називається формула виду

$$a_{n+1}=F(a_n,a_{n-1},\dots,a_{n-k+1}),$$

де F деяка функція від k аргументів, яка дозволяє обчислити наступні члени числової послідовності через значення попередніх членів. Рекурентне співвідношення однозначно визначає послідовність a_n, якщо вказано k перших членів послідовності. Рекурентне співвідношення є прикладом рекурсивного визначення послідовності.

Якщо задане лінійне однорідне рекурентне співвідношення 2-го порядку з постійними коефіцієнтами

$$a_n = C_1 a_{n-1} - C_2 a_{n-2} \tag{1}$$

або

$$f(n+2) = \text{C}_1 f(n+1) - \text{C}_2 f(n), \tag{1a}$$

можна скласти **характеристичний многочлен**:

$$r^2 = \text{C}_1 r - \text{C}_2. \tag{2}$$

Розглянемо три випадки:

1) корені характеристичного многочлена (2) r_1 и r_2 різні та дійсні, тоді розв'язком для співвідношення (1) буде

$$a_n = \text{C} \cdot (r_1)^n + D \cdot (r_2)^n,$$

де C и D – довільні константи.

2) корені характеристичного многочлена (2) $r_1 = r_2 = r$ співпадають та дійсні, тоді розв'язком для співвідношення (1) буде

$$a_n = r^n (C + nD),$$

де С и D – довільні константи.

3) корені характеристичного многочлена (2) r_1 и r_2 комплексні виду $r_{1,2} = a \pm ib$, тоді розв'язком для співвідношенням (1) буде

$$a_n = \rho^n (C cos(n\varphi) + D sin(n\varphi)),$$

де С и D – довільні константи, $\rho^n = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos(\varphi) = \frac{a}{\rho}$, $sin(\varphi) = \frac{b}{\rho}$.

Приклад

Розв'яжемо рекурентне рівняння

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

яке задає послідовності Лукаса.

Складаємо відповідне характеристичне рівняння. Воно має вигляд

$$r^2 = r + 1.$$

Знаходимо його корені:

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \; r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$a_n = C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

де C_1, C_2 - довільні константи.

Якщо $u_1 = u_2 = 1$, то з відповідної системи рівнянь знаходимо, що

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},\ C_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}},$$

і загальний член послідовності, яка носить назву послідовності Фібоначчі, має вигляд:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Приклад

Знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного рекурентного рівняння

$$u_n = 4u_{n-1} - 8u_{n-2} + 8u_{n-3} - 4u_{n-4}.$$

Характеристичне рівняння

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = 0$$

має корені

$$r_1 = r_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$r_3 = r_4 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

тому загальний розв'язок заданого рекурентного рівняння має вигляд:

$$u_n = (C_1 + C_2 n)2^{\frac{n-1}{2}}\left(\cos\frac{3\pi(n-1)}{4} + i\sin\frac{3\pi(n-1)}{4}\right) +$$
$$+(C_3 + C_4 n)2^{\frac{n-1}{2}}\left(\cos\frac{\pi(n-1)}{4} + i\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\right).$$

Завдання до лабораторної роботи

Варіант 1.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\alpha\beta, \alpha^{-1}\alpha$$

2. Напишіть перші 5 членів рекурентного співвідношення

$$f(n+2)=2f(n+1)-3f(n),$$

яке задовольняє заданій початковій умові:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

3. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення

а) $f(n+2)-7f(n+1)+12f(n)=0,$

б) $a_0 = 1;\ a_1 = 0;\ a_n = -2\sqrt{2}a_{n-1} - 4a_{n-2}$ *при* $n > 2.$

4. Знайдіть загальний розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n - 3a_{n-1} = 0.$$

Варіант 2.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\beta\alpha, \alpha\alpha^{-1}.$$

2. Напишіть перші 5 членів рекурентного співвідношення

$$f(n+2)=2f(n+1)-3f(n),$$

яке задовольняє заданій початковій умові:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}.$$

3. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення

а) $f(n+2)+3f(n+1)-10f(n)=0,$

б) $a_0 = 1;\ a_1 = 0;\ a_n = -2\sqrt{2}a_{n-1} - 4a_{n-2}$ *при* $n > 2.$

4. Знайдіть загальний розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n + 3a_{n-1} = 0.$$

Варіант 3.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\gamma\alpha, \gamma^{-1}\gamma$$

2. Напишіть перші 5 членів рекурентного співвідношення

$$f(n+2)=-4f(n+1)-4f(n),$$

яке задовольняє заданій початковій умові:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

3. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення

а) $f(n+2)-4f(n+1)+13f(n)=0,$

б) $a_0 = 1$; $a_n = -4a_{n-1}$ при $n > 1$;

4. Знайдіть спільне розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}.$$

Варіант 4.

1. Нехай задані підстановки:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\beta\gamma^{-1}, \gamma\,\gamma^{-1}$$

2. Перевірити, чи є дані функції розв'язком даного рекурентного співвідношення:

$$f(n+2)=4f(n+1)-3f(n),$$

$$\varphi_1(n) = 2n, \varphi_2(n) = 5 \cdot 3^n - 1, \varphi_3(n) = 7.$$

3. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення

а) $f(n+2)+9f(n)=0,$

б) $a_0 = 2$; $a_1 = 5$; $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ при $n > 2$;

4. Знайдіть загальний розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}.$$

Варіант 5.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\gamma^{-1}\beta, \alpha\gamma.$$

2. Перевірити, чи є дані функції розв’язком даного рекурентного співвідношення:

$$f(n+2)=2f(n+1)-f(n),$$
$$\varphi_1(n) = 2n+1, \varphi_2(n) = 5 \cdot 2^n, \varphi_3(n) = 3.$$

3. Знайти розв’язок рекурентного співвідношення

а) $f(n+2)+9f(n)=0,$

б) $a_0 = 2$; $a_1 = 4$; $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$ при $n > 2$.

4. Знайдіть загальний розв’язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = 6a_{n-1}.$$

Варіант 6.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\gamma\beta, \gamma^{-1}\alpha$$

2. Напишіть перші 5 членів рекурентного співвідношення

$$f(n+2)=2f(n+1)-3f(n),$$

яке задовольняє заданій початковій умові:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases}.$$

3. Знайти розв’язок рекурентного співвідношення

а) $f(n+2)+4f(n+1)+4f(n)=0,$

б) $a_0 = 1$; $a_1 = -8$; $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ при $n > 2$.

4. Знайдіть загальний розв’язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = a_{n-1}.+3\, a_{n-2}$$

Варіант 7.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\alpha\beta, \alpha^{-1}\alpha.$$

2. Напишіть перші 5 членів рекурентного співвідношення

$$f(n+2)=2f(n+1)-3f(n),$$

яке задовольняє заданій початковій умові:

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 1 \end{cases}.$$

3. Знайти рішення рекурентного співвідношення

а) $f(n+2)+4f(n+1)+4f(n)=0,$

б) $a_0 = -3$; $a_1 = 1$; $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ при $n > 2$.

4. Знайдіть загальний розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = -2a_{n-1}.-a_{n-2}, \text{ при } n > 2.$$

Варіант 8.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:

а) циклів; через формальні змінні;

б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\beta\alpha, \alpha\alpha^{-1}$$

2. Обрати серед наведених нижче лінійні рекурентні рівняння:

$$a_n = 2a_{n-1}^2 - a_{n-2}; \quad a_n = a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

3. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення

а) $f(n+3)-9f(n+2)+26f(n+1)-24 f(n)=0,$

б) $a_0 = 5$; $a_n = 12a_{n-1}$ при $n > 2$.

4. Знайдіть загальний розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = 2a_{n-1}.-a_{n-2}, \text{ при } n > 2.$$

Варіант 9.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:
а) циклів; через формальні змінні;
б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\gamma\alpha, \gamma^{-1}\gamma$$

2. Напишіть перші 5 членів рекурентного співвідношення

$$f(n+2)=-4f(n+1)-4f(n),$$

яке задовольняє заданій початковій умові:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases}.$$

3. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення
а) $f(n+3)+9f(n+2)+9f(n+1)+f(n)=0,$
б) $a_0 = 3$; $a_1 = 4$; $a_n = -2a_{n-1}.+a_{n-2}$ при $n > 2$.
4. Знайдіть загальний розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = -4a_{n-2},\ \text{при } n > 2.$$

Варіант 10.

1. Нехай задані підстановки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Знайти композицію підстановок та записати її у вигляді:
а) циклів; через формальні змінні;
б) визначити, чи є дана підстановка парною (вказати чому)?

$$\gamma^{-1}\beta, \alpha\gamma.$$

2. Напишіть перші 5 членів рекурентного співвідношення

$$f(n+2)=2f(n+1)-3f(n),$$

яке задовольняє заданій початковій умові:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases}.$$

3. Знайти розв'язок рекурентного співвідношення
а) $f(n+3)-f(n+2)+f(n+1)-f(n)=0,$
б) $a_0 = 3$; $a_1 = 21$; $a_n = 6a_{n-1}.-9a_{n-2}$ при $n > 2$.
4. Знайдіть загальний розв'язок для наведеного нижче рекурентного співвідношення:

$$a_n = -a_{n-1}.+6a_{n-2},.$$

Питання для самоперевірки.

1. Дайте визначення підстановки.
2. Як знайти обернену підстановку?
3. Як знайти композицію підстановок?

4. Яка підстановка називається парною?
5. Які групи підстановок відомі?
6. Дайте визначення рекурентного співвідношення.
7. Які випадки при розв’язку рекурентних лінійних співвідношень другого порядку можуть виникнути?

🗐Тест для самоконтролю

1	Дві множини А і В називаються рівними, якщо а) вони містять однаковий набор елементів; б) їх елементи розрізняються не більше ніж на два елементи; в) елементи множини А, містяться у множині В; г) для будь-якого х маємо: $x \in A$ тоді і тільки тоді, коли $x \in B$
2	Відношення називається симетричним, якщо: а) $\forall (x_1, x_2) \in X^2 : x_1Rx_2 \rightarrow x_2Rx_1$; б) $\forall x \in X \rightarrow xRx$; б) $\forall (x_1, x_2) \in X^2 : x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_1 \rightarrow x_1 = x_2$; г) $\forall (x_1, x_2) \in X^2 : x_1Rx_2 \rightarrow x_1 \neq x_2$; в) $\forall x_i \in X\ x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \longrightarrow x_1Rx_3$; е) $\forall (x_1, x_2) \in X^2 : x_1Rx_2 \nrightarrow x_2Rx_1$; г) $\forall x_i \in X\ x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \nrightarrow x_1Rx_3$
3	Чи рівні множини {1, 5, 4, 5} и {2, 4, 1,5}? а) так; б) ні.
4	Засновником теорії множин є: а) Г. Кантор; б) Б. Рассел; в) Буралі-Форті; г) фон Нейман.
5	Предикат, який залежний від n змінних називається: а) простим; б) односкладовим висловлюванням; в) одномісним; г) n-місним.
6	Намалюйте граф зворотного відношення до відношення $A=\{(x_1,y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_2), (x_3, y_4)\}$.
7	Множина усіх упорядкованих пар елементів (a, b) в яких перший елемент належить множині А, а другій належить множині В називається: а) повним добутком; б) прямим добутком; в) скалярним добутком; г) декартовим добутком.
8	Бінарне відношення повністю можна представить а) тільки за допомогою фактор-множини; б) за допомогою фактор множини, графа та матриці; в) тільки за допомогою графа та матриці.
9	Якщо корені характеристичного рівняння, що складений за рекурентним співвідношенням комплексні, то спільний розв'язок відношення записуються у вигляді: а) $a_n = \rho^n (C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta))$; б) $a_n = (C_1 + C_2 n) r^n$; в) $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$
10	Наступного виду матриць, асоційованих з графом не буває: а) матриць інцидентності; б) матриць суміжності; в) обернених матриць; г) матриць відстаней; д) матриць ступенів; е) додаткових матриць.

Термінологічний словник

Антирефлексивним (або ***іррефлексивним***) називається відношення R на множині A, якщо $a\in A \Rightarrow (a, a)\notin R$;

Антисиметричним називається відношення R на множині A, якщо $(a, b)\in R \wedge (b, a)\in R \Rightarrow a=b$.

Булеаном множини A називають множину всіх підмножин множини A та позначають $P(A)$, або 2^A, або $B(A)$. Отже, $P(A) = \{x \mid x\subseteq A\}$.

Відношенням еквівалентності, або ***еквівалентністю*** , (на A) називається відношення на множині A, яке одночасно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Відношенням між множинами A і B називають довільну підмножину C декартового добутку множин A і B, $C\subseteq A\times B$.

Відношенням часткового порядку, або ***частковим порядком*** (на A) називається відношення на множині A, яке одночасно є рефлексивним, антисиметричним та транзитивним. Інколи вживають терміни ***відношення порядку*** та ***порядок***.

Декартовим (***прямим***) ***добутком множин*** A і B називається множина $\{(a, b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$ усіх пар (a, b), в яких $a\in A$ і $b\in B$. Прямий добуток множин A і B позначається $A\times B$.

Доповненням множини **А** називається множина елементів які А не належать.

Екзистенціональна конкретизація. Із істинності $\exists x D(x)$ випливає, що існує конкретне b таке, що $D(b)$ істинно.

Екзистенціональне узагальнення. З існування конкретного c з універса, для якого $D(c)$ істинно, можна зробити висновок, що $\exists x D(x)$.

Інверсію утворюють в перестановці числа i та j, такі що $i>j$, але i знаходиться в цій перестановці раніше за j.

Класом еквівалентності елемента $a\in A$ за еквівалентністю R називається множина $\{b \mid aRb\}$, яку позначають $[a]R$ або a/R.

Композицією, або ***суперпозицією***, відповідностей $C\subseteq A\times B$ і $D\subseteq B\times F$ називається відповідність $C\circ D = \{(a, c) \mid \exists b\ ((a, b)\in C \wedge (b, c)\in F)\}$.

Об'єднанням множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з множин A і B; об'єднання A і B позначають $A\cup B$.

Оберненою для підстановки α називається така підстановка α^{-1} того ж степеня, що $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Парною називається перестановка, якщо її символи утворюють парну кількість інверсій, і ***непарною*** – у протилежному випадку.

Перестановкою із ***n*** чисел (чи ***n*** символів) називається розташування чисел $1, 2,\ldots,n$ в деякому визначеному порядку.

Перетином множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать кожній з множин A і B, перетин A і B позначають $A\cap B$.

Підмножиною називають множину А, якщо кожен елемент множини A є й елементом множини B, а B – ***надмножиною*** A.

Підстановкою *n*-го степеню називається довільне взаємно однозначне відображення А множини перших n натуральних чисел на себе.

Порівнюваними називаються елементи a, $b \in A$ за відношенням R, якщо aRb або bRa.

Предикатом називається твердження, яке містить змінні, конкретні значення яких не вказані. При одних значеннях змінних твердження може бути істинним висловлюванням, при інших – хибним.

Принцип математичної індукції. Нехай P(n) є таке твердження, що P(1) істинне, та для кожного k, якщо P(k) істинно, то P(k+1) істинно. Тоді P(n) істинне для будь-якого цілого додатного числа n. $(P(1) \wedge ((\forall k)P(k) \to P(k+ +1)) \to (\forall n)P(n))$

Рефлексивним називається відношення R на множині A, якщо $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$;

Рівними називають дві множини A і B, якщо вони складаються з одних й тих самих елементів; цей факт позначають $A = B$.

Різницею множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B; різницю A і B позначають $A \backslash B$.

Симетричним називається відношення R на множині A, якщо $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

Симетричною різницею множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать рівно одній з множин A і B; симетричну різницю множин A і B позначають $A \div B$ або $A \Delta B$.

Строгий порядок – це антирефлексивне, антисиметричне й транзитивне відношення на множині А.

Теорія множин – це розділ математики, який вивчає загальні властивості множин і є основою практично всіх математичних теорій, як "дискретних" дисциплін комп'ютерного циклу, так і класичних "континуальних" розділів математики. Саме у термінах теорії множин проводиться розподіл математичних об'єктів і теорій на континуальні та дискретні.

Транзитивним називається відношення R на множині A, якщо $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Транспозицією називається таке перетворення перестановки, якщо в ній поміняти місцями два символи (необов'язково сусідні), а всі інші символи залишити на місці.

Універсальна конкретизація. Із істинності $\forall x D(x)$ слідує істинність $D(a)$ для довільного а з універса.

Універсальне узагальнення. Якщо довільне а з універса забезпечує істинність $D(a)$, робимо висновок, що $\forall x D(x)$ істинно.

Універсумом або ***універсальною множиною*** у тій чи іншій математичній теорії називають множину, елементами якої є всі об'єкти, що розглядаються в цій теорії. Як правило, універсум позначають U або E.

Бібліографічний опис

Основна:

1. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
2. Битюцкий В.П., Соколов С.С. Основы дискретной математики. Часть 1.: Учебное пособие по дисциплине «Дискретная математика». – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. – 96 с.
3. Булгаков И.Н., Федотенко Г.Ф. Дискретная математика. Элементы теории, задачи и упражнения. – Воронеж: Из-во ВГУ, 2004. – 62с.
4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: Физматлит, 2006. – 416 с.
5. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. – М.: Мир, 1997. – 208 с.
6. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Бином. Лаборатория знаний, Мир, 2009. – 703 с.
7. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 211 с.
8. Ерош И.Л. Дискретная математика: Математические основы криптографии. СПбГУАП. СПб., 2001. – 56 с.:
9. Ерош И.Л., Сергеев М.Б., Соловьев Н.В. Дискретная математика: Учеб. пособие. СПбГУАП. СПб., 2005. – 144 с.:
10. Никищенков С.А., Смышляев В.А., Припутников А.П. Булева алгебра и логические элементы: Методические указания по дисциплине «Дискретная математика» для студентов заочной формы обучения. – Самара: СамГАПС, 2004. – 20 с.
11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПБ.: Питер, 2005. – 304 с.
12. Райгородский А.М. Вероятность и алгебра в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2008. –312 с.
13. Сергиевская И.М Методические указания и контрольные задания по дисктреной математике. – Самара: ПГАТИ, 2002. – 17с.
14. Фомичев В.М. Дискретная математика и криптология. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 400с.
15. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высшая школа, 2001. – 384 с.