5 ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ. БУЛЕВА АЛГЕБРА

5.1 Способи задання булевих функцій

Булевою функцією n незалежних змінних називається функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geq 1$, в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини $\{0, 1\}$, тобто $x_k \in \{0, 1\}$, $k = \overline{1, n}$; $y = \{0, 1\}$.

Кортеж $(x_1, x_2, ..., x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається *набором*, або *булевим вектором*. Якщо незалежні змінні розміщено у прямому порядку, тобто у вигляді $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то набір називається *прямим*, а якщо їх розміщено у зворотному порядку, тобто у вигляді $x = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$, то набір називається *зворотним*.

Областю визначення булевої функції n аргументів є сукупність 2^n булевих кортежів. Число різних булевих функцій є скінченне і дорівнює 2^{2^n}. За $n = 1$ число булевих функцій дорівнює 4, а за $n = 2$ – 16.

Існують такі *способи задання* булевих функцій.

1. ***Табличний***. Функція задається у вигляді таблиці істинності. Наприклад, така таблиця

x_1	x_2	y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

визначає функцію y.

2. ***Графічний***. Функція задається у вигляді n-вимірного одиничного куба, у вершинах якого записано значення функції (у кружечках) та набори значень аргументів. Наприклад, функції, задані на рис. 5.1 та 5.2.

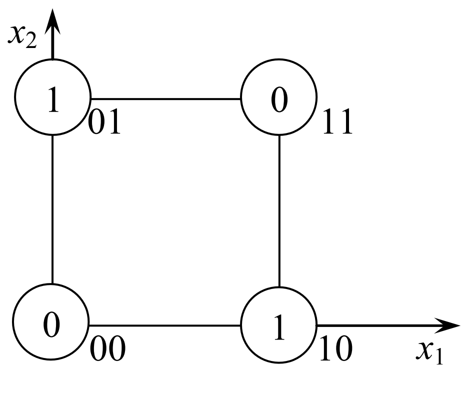


Рисунок 5.1 – Двовимірний одиничний квадрат

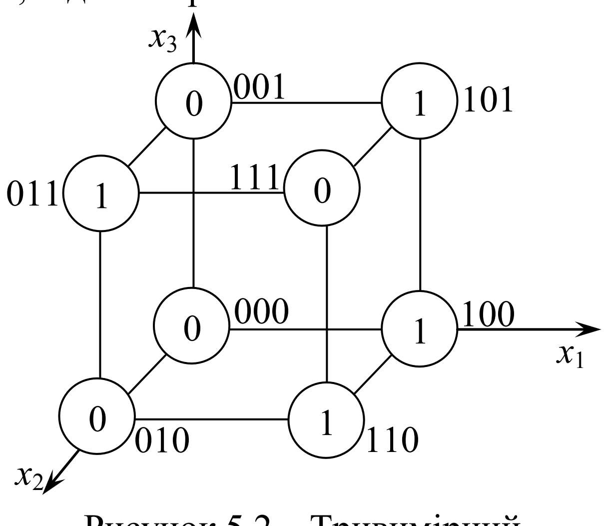
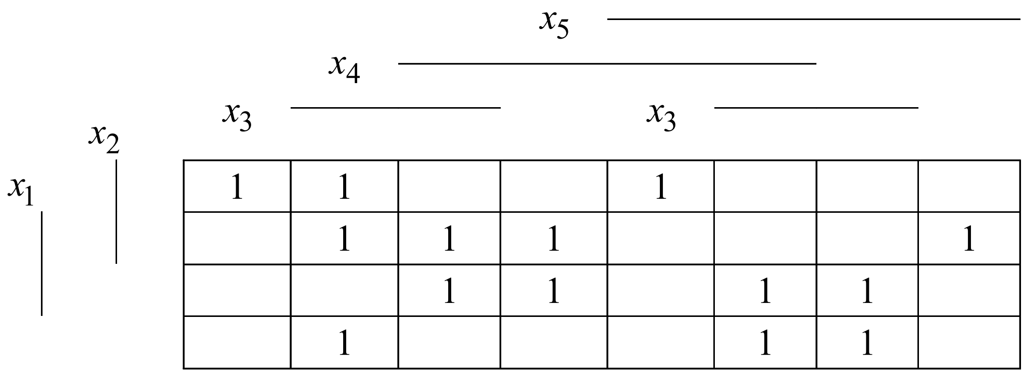


Рисунок 5.2 – Тривимірний одиничний куб

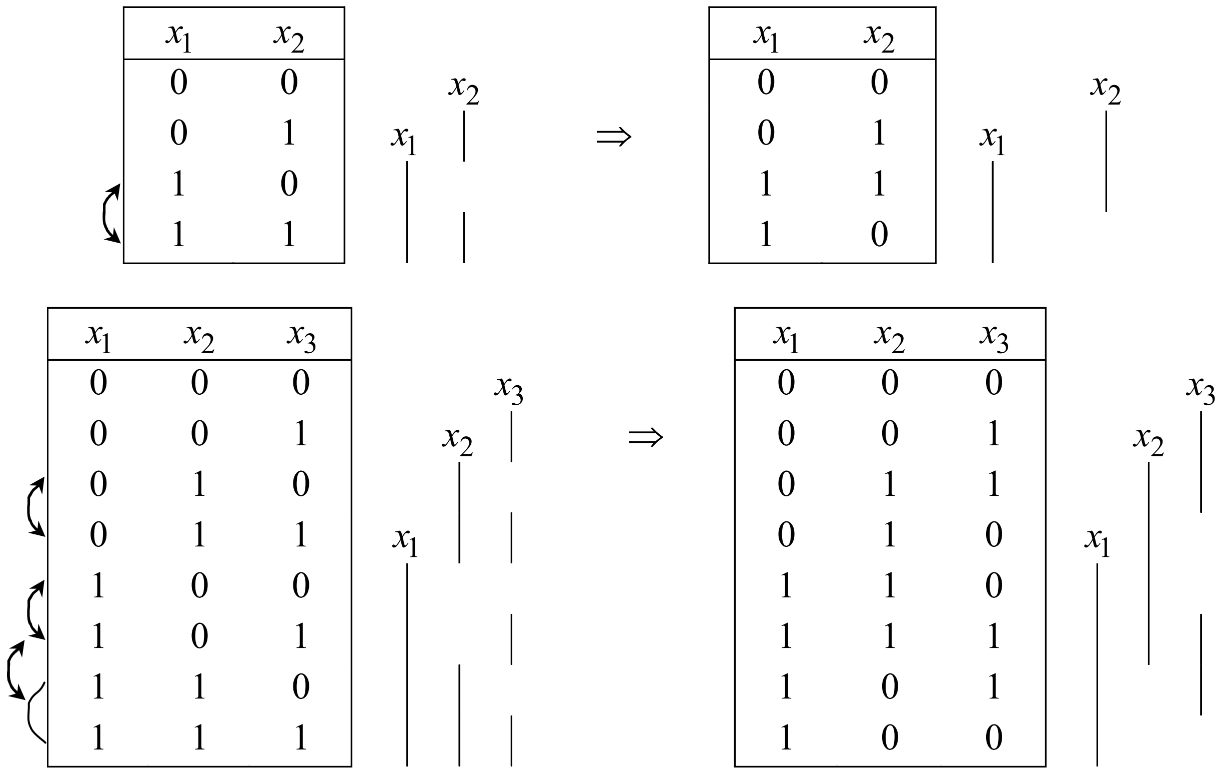
3. ***Координатний*** (картою Карно). У клітинках карти записуються значення функції (нулі зазвичай не вписують, їм відповідають порожні клітини). Значення змінної визначається відрізками (дужками) з позначенням цієї змінної. Наявність відрізка відповідає 1, а відсутність – 0. Наприклад, функція, задана на рис. 5.3.



1	1			1			
	1	1	1				1
		1	1		1	1	
	1				1	1	

Рисунок 5.3 – Приклад задання функції картою Карно

Відрізки карти Карно мають відбивати всі можливі набори значень. Для цього можна скористатися лівою частиною таблиці істинності, в якій рекомендується попередньо виконати перестановки наборів в такий спосіб, щоби зменшити загальне число розривів у відрізках. Наприклад, на рис. 5.4 подано перестановки наборів функцій двох та трьох незалежних змінних.



x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

⇒

x_1	x_2
0	0
0	1
1	1
1	0

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

⇒

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

Рисунок 5.4 – Приклади перестановок наборів

4. ***Числовий***. Функція задається у вигляді цілих десяткових (вісімкових, шістнадцяткових) чисел, які є еквівалентами тих наборів значень аргументів, на яких функція набуває значення 1.

Наприклад,

$$y = \{3; 4; 5; 6\}_{x_1 x_2 x_3},$$

де $3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ і набір значень аргументів 011 відповідає значенню функції 1 (див. рис. 5.2), і т. д.

5. ***Аналітичний***. Функція задається у вигляді формули. Наприклад:

$$y = x_1 + x_2 \cdot x_3.$$

5.2 Елементарні функції алгебри логіки

Булеві функції однієї та двох незалежних змінних прийнято називати *елементарними бульовими функціями*. Вони використовуються як логічні операції над булевими змінними при побудові булевих функцій багатьох незалежних змінних. Алгебра з такими логічними операціями називається *алгеброю логіки*, а булеві функції називаються ще *функціями алгебри логіки*.

Загальне число різних елементарних функцій (логічних операцій) дорівнює загальному числу функцій двох змінних, тобто $2^{2^2} = 16$ (функції однієї змінної є окремим випадком функцій двох змінних).

Основними в алгебрі логіки є три логічні операції.

Заперечення (*інверсія*) – функція $y = f(x)$, яка набуває значення 1, коли $x = 0$, і значення 0 – за $x = 1$. Позначення: $y = \overline{x}$. Читається: «не x».

Диз'юнкція (*логічне додавання*) – функція $y = f(x_1, x_2)$, яка набуває значення 0 тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють нулеві. Позначення: $y = x_1 + x_2$ або $y = x_1 \vee x_2$. Читається: «x_1 плюс x_2» або «x_1 або x_2».

Кон'юнкція (*логічне множення*) – функція $y = f(x_1, x_2)$, яка набуває значення 1 тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють одиниці. Позначається: $y = x_1 \cdot x_2$ або $y = x_1 \wedge x_2$, Читається: «x_1 помножити на x_2» або «x_1 та x_2».

Таблиці істинності наведених логічних операцій мають відповідно вигляд:

x	$y = \overline{x}$
0	1
1	0

x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	$y = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Якщо операція містить один операнд, вона називається *одномісною*, або *унарною*, а якщо два, то – *двомісною*, або *бінарною*. Заперечення – це одномісна операція, а диз’юнкція та кон’юнкція – двомісні. При цьому вирази $\overline{x}$, $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ є прикладами логічних формул. Більш складні формули дістаємо за рахунок суперпозиції логічних формул, які, звичайно беруться у круглі дужки. Наприклад: $y = x_1 + x_2\left(\overline{x_1} + x_2\right)\left(x_1 + x_1\overline{x_2}\right)$.

Елементарні функції однієї змінної.

Таблиця 5.1 – Таблиця істинності функції однієї змінної

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функції φ_0 та φ_3 – константи 0 та 1 відповідно. Позначення: $\varphi_0\left(x\right) = 0$; $\varphi_3\left(x\right) = 1$. Функція φ_1 набуває тих самих значень, що й x, тобто $\varphi_1\left(x\right) = x$. Функція $\varphi_2\left(x\right) = \overline{x}$, тобто це є логічна операція заперечення.

Елементарні функції двох змінних.

Таблиця 5.2 – Таблиця істинності функції двох змінних

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
						$\overline{x}_1$							x_1				
Операція		0	$\bullet$	$\leftarrow$	x_1	$\bullet$	x_2	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\sim$	$\overline{x}_2$	$+$	$\overline{x}_1$	$\rightarrow$	/	1
						x_2							$\overline{x}_2$				

Функції ψ_0 та ψ_{15} – константи 0 та 1. Ці функції відрізняються від φ_0 та φ_3 формально. Функції φ_0 … φ_3 є унарні операції, а функції ψ_0 … ψ_{15} – бінарні.

Функції ψ_7 та ψ_1 – це розглянуті вище операції диз’юнкції та кон’юнкції.

Функція ψ_6 – це додавання за модулем 2. Позначення:

$$\psi_6\left(x_1, x_2\right) = x_1 \oplus x_2.$$

Функція ψ_9 називається *еквівалентністю*. Позначення:

$$\psi_9\left(x_1, x_2\right) = x_1 \sim x_2.$$

Функція ψ_{13} – *імплікація*: $\psi_{13}\left(x_1, x_2\right) = x_1 \rightarrow x_2$.

ψ_2 – *заборона* (*заперечення імплікації*): $\psi_2\left(x_1, x_2\right) = x_1 \leftarrow x_2$.

ψ_8 – *стрілка Пірса* (*функція Вебба*), $\psi_8\left(x_1, x_2\right) = x_1 \downarrow x_2$.

ψ_{14} – *штрих Шеффера*, $\psi_{14}\left(x_1, x_2\right) = x_1 / x_2$.

Решта функцій спеціальних назв не мають і, як буде показано далі, легко виражаються через вищенаведені функції.

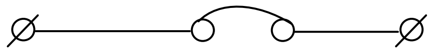
Зауважимо, що ці функції є *інверсними*, тобто

$$\psi_0 = \overline{\psi}_{15}, \quad \psi_1 = \overline{\psi}_{14}, \quad \ldots, \quad \psi_7 = \overline{\psi}_8 .$$

Технічну реалізацію функцій однієї змінної наведено на рис. 5.5.

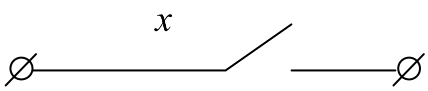
$\varphi_0 = 0$

Константа 0



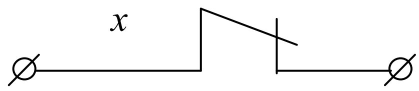
$\varphi_3 = 1$

Константа 1



$\varphi_1 = x$

Повторення

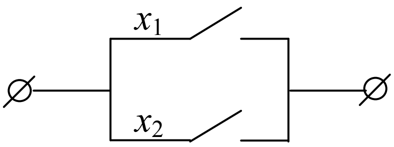


$\varphi_2 = \overline{x}$

Заперечення

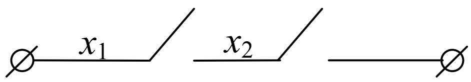
Рисунок 5.5 – Технічна реалізація функцій однієї змінної

Технічну реалізацію деяких функцій двох змінних показано на рис. 5.6.



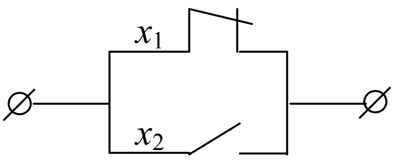
$\psi_7 = x_1 + x_2$

Диз’юнкція



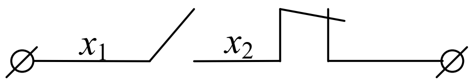
$\psi_1 = x_1 \cdot x_2$

Кон’юнкція



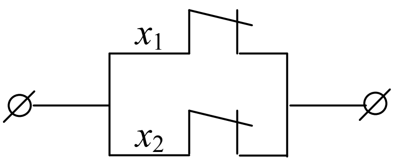
$\psi_{13} = x_1 \to x_2$

Імплікація



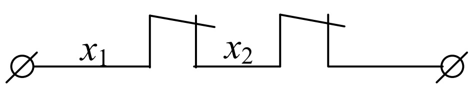
$\psi_2 = x_1 \leftarrow x_2$

Заборона



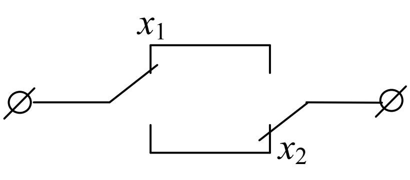
$\psi_{14} = x_1 / x_2$

Штрих Шеффера



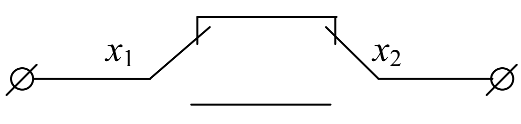
$\psi_8 = x_1 \downarrow x_2$

Стрілка Пірса



$\psi_6 = x_1 \oplus x_2$

Додавання за модулем 2



$\psi_9 = x_1 \sim x_2$

Еквівалентність

Рисунок 5.6 – Технічна реалізація функцій двох змінних

5.3 Основні властивості функцій алгебри логіки

Формулою алгебри логіки або *логічним виразом* називається скінчена послідовність булевих змінних та функцій, пов'язаних знаками логічних операцій та круглими дужками.

Функція алгебри логіки – це рівність, у лівій частині якої стоїть булева змінна, а у правій – логічний вираз. Отже, функція алгебри логіки визначається формулою.

Наприклад, $x_1\left(x_2 \to x_3\right)$ – логічний вираз, $y = x_1 + x_2 x_3$ – булева функція.

При обчислюванні логічних виразів дотримуються такого пріоритету операцій: насамперед обчислюються функції, потім заперечення, після чого логічне множення і, врешті, логічне додавання. Вирази, які стоять у дужках, обчислюються в першу чергу. Інші операції мають найменший пріоритет. Порядок їхнього виконання визначається круглими дужками.

Функції, які зводяться до залежності від меншого числа змінних, називаються *виродженими*, а функції, які суттєво залежать від усіх змінних, є *невиродженими*. Наприклад, серед функцій однієї змінної є дві вироджені функції. Це $\varphi_0 = 0$, $\varphi_3 = 1$, які можна розглядати як функції від нуля змінних.

Функції двох змінних містять ті самі константи і чотири функції однієї змінної – ψ_3, ψ_5, ψ_{10}, ψ_{12}.

Функція багатьох змінних $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається *функцією, яка зберігає константу* 0, якщо $f\left(0, 0, ..., 0\right) = 0$. Наприклад, функції ψ_0 ... ψ_7 мають цю властивість, а функції ψ_8 ... ψ_{15} цієї властивості не мають (див. табл. 5.2).

Функція *n* змінних $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається *функцією, яка* зберігає *константу* 1, якщо $f\left(1, 1, ..., 1\right) = 1$. Наприклад, функції ψ_{2i+1}, де $i = \overline{0,7}$, мають цю властивість, а функції ψ_{2i} – не мають.

Логічна функція $f^*\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається *двоїстою* до функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, якщо має місце рівність $f^*\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \overline{f}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)$.

Наприклад, функція $\psi_1 = x_1 \cdot x_2$ має властивість двоїстості до функції $\psi_7 = x_1 + x_2$, тому що $x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}$.

Логічна функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається *самодвоїстою*, якщо $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \overline{f}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)$.

Наприклад, функція $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$ є самодвоїстою, тому що $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3}$ (перевіряється за допомогою таблиці істинності).

Функція багатьох змінних називається *монотонною*, якщо для будь-якої пари наборів значень її аргументів $\left(x_1', x_2', ..., x_n'\right)$ та $\left(x_1'', x_2'', ..., x_n''\right)$, які задовольняють нерівності $x_i'' \ge x_i'$, $i = \overline{1,n}$, виконується нерівність

$$f\left(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''\right) \geq f\left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right).$$

Наприклад, функція ψ_1 є монотонною (див. табл. 5.2).

Функція багатьох змінних називається *лінійною*, якщо її можна подати у вигляді многочлена

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus c_n x_n,$$

де $c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, n}$. Наприклад, функція ψ_6 є лінійною, тому що $\psi_6\left(x_1, x_2\right) = x_1 \oplus x_2$.

Система функцій алгебри логіки $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ називається *повною*, якщо кожна інша функція алгебри логіки може бути виражена за допомогою суперпозицій цих функцій. При цьому стверджують, що повна система функцій утворює *базис* у логічному просторі.

Мінімальним базисом є такий базис, вилучення з якого будь-якої функції порушує його повноту.

Теорема 5.1 (Поста-Яблонського) Для того щоб система функцій була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила в собі хоча б одну функцію: незберігаючу константу 0, незберігаючу константу 1, несамодвоїсту, немонотонну й нелінійну.

З теореми випливає, що таких функцій має бути п’ять. Але, через те що деякі функції мають одразу кілька потрібних властивостей, базис може складатися з меншого числа функцій.

Властивості функції	**Функції**									
	0	1	–	+	•	/	$\downarrow$	$\rightarrow$	$\oplus$	$\leftarrow$
Незберігаюча 0		*	*			*	*	*		
Незберігаюча 1	*		*			*	*		*	*
Несамодвоїста	*	*		*	*	*	*	*	*	*
Немонотонна			*			*	*	*	*	*
Нелінійна				*	*	*	*	*		*

З таблиці видно, що повними системами функцій будуть: {¬, +, •}, {¬, +}, {¬, •}, {/}, {$\downarrow$}, {0, $\rightarrow$} тощо. Так, наприклад, алгебра Буля побудована на системі функцій {¬, +, •}, а алгебра Жегалкіна використовує базис {1, •, $\oplus$}.

5.4 Булева алгебра та її основні закони

Булевою алгеброю називається множина логічних функцій з операціями диз’юнкція, кон’юнкція та заперечення, – тобто алгебра, базисом якої є система функцій {¬, +, •}.

Операції булевої алгебри звичайно називають *булевими операціями*, а функції – *булевими функціями*.

Розглянемо тепер ***основні закони булевих операцій***:

1) комутативний (для диз’юнкції та кон’юнкції):

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3, \qquad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$ – перший дистрибутивний закон;

$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$ – другий дистрибутивний закон;

4) ідемпотентний:

$$x + x = x, \qquad x \cdot x = x;$$

5) інверсний (формули де Моргана):

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2, \qquad \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2;$$

6) закон вилученого третього (для диз'юнкції) і закон суперечності (для кон'юнкції):

$$x + \overline{x} = 1, \qquad x \cdot \overline{x} = 0.$$

У булевій алгебрі мають місце такі властивості:

$$\overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0; \quad x + 0 = x; \quad x + 1 = 1; \quad x \cdot 0 = 0; \quad x \cdot 1 = x; \quad \overline{\overline{x}} = x.$$

Решта функцій двох змінних логіки виражаються через базис булевої алгебри в такий спосіб:

$$x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 + x_2; \qquad x_1 / x_2 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2; \qquad x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_1 \cdot x_2;$$

$$x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \cdot \overline{x}_2; \qquad x_1 \downarrow x_2 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2; \qquad x_1 \sim x_2 = x_1 \cdot x_2 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2.$$

У справедливості цих формул легко переконатися за допомогою таблиці істинності.

Закони булевої алгебри та її властивості надають можливість виконувати перетворювання логічних виразів з метою побудови найбільш простих (компактних) формул.

Приклад 5.1 Спростити: $((x_1 \downarrow x_2) / x_3) \to (x_1 \to x_3)$.

Розв'язання.

$$((x_1 \downarrow x_2) / x_3) \to (x_1 \to x_3) = ((\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) / x_3) \to (\overline{x}_1 + x_3) =$$

$$= (\overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} + \overline{x}_3) \to (\overline{x}_1 + x_3) = \overline{\overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} + \overline{x}_3} + \overline{x}_1 + x_3 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 + \overline{x}_1 + x_3 =$$

$$= \overline{x}_1 + x_3 (1 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) = \overline{x}_1 + x_3.$$

5.5 Нормальні форми булевих функцій

Елементарною диз'юнкцією (*кон'юнкцією*) називається диз'юнкція (кон'юнкція) скінченного числа булевих змінних, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу в прямому чи інверсному вигляді. Наприклад:

$x_1 + \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_4$ – елементарні диз'юнкції;

$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3$, $\overline{x}_5 \cdot x_7 \cdot \overline{x}_9 \cdot x_{10}$ – елементарні кон'юнкції.

Диз'юнктивною нормальною формою (*кон'юнктивною нормальною формою*) називається формула, яка містить диз'юнкцію (кон'юнкцію) скінченного числа різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

Позначення: ДНФ, КНФ.

Наприклад: $x_1 \cdot \overline{x}_2 + x_1 x_3$, $x_1 \cdot x_5 + \overline{x}_6$ – ДНФ;

$\left(x_1 + x_2\right) \cdot \overline{x}_3$, $\left(\overline{x}_1 + x_3\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x}_4\right) \cdot \left(x_2 + x_5\right)$ – КНФ.

ДНФ (КНФ) називається *досконалою* і позначається ДДНФ (ДКНФ), якщо в кожній її елементарній кон'юнкції (диз'юнкції) подано всі змінні.

Наприклад: $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$ – ДДНФ;

$\left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + x_4\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x}_2 + x_3 + x_4\right)$ – ДКНФ.

Для того щоб ***привести формулу до ДДНФ***, потрібно:

– за допомогою законів та властивостей булевої алгебри привести її до ДНФ;

– якщо в елементарній кон'юнкції не міститься змінної x_i із загальної кількості змінних, які входять до даної формули, додати до цієї кон'юнкції співмножник $x_i + \overline{x}_i$ і розкрити дужки;

– з однакових елементарних кон'юнкцій вилучити всі, окрім однієї.

Приклад 5.2

$$x_1 x_2 + \overline{x}_3 = x_1 x_2\left(x_3 + \overline{x}_3\right) + \left(x_1 + \overline{x}_1\right)\left(x_2 + \overline{x}_2\right)\overline{x}_3 =$$
$$= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 =$$
$$= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 .$$

Для того щоб ***привести формулу до ДКНФ***, доцільно спочатку привести її до ДНФ, а потім від ДНФ перейти до КНФ в такий спосіб.

Нехай ДНФ має вигляд

$$f = c_1 + c_2 + \ldots + c_m ,$$

де c_i – елементарні кон'юнкції, $i = \overline{1,m}$.

Формулу $\overline{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}$ приведемо до ДНФ $k_1 + k_2 + \ldots + k_l$, де k_i – елементарні кон'юнкції. Тоді

$$\overline{\overline{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}} = \overline{k_1 + k_2 + \ldots + k_l} = \overline{k}_1 \cdot \overline{k}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{k}_l .$$

Застосовуючи правило де Моргана, перетворимо елементарні кон'юнкції $\overline{k}_i$ на елементарні диз'юнкції D_i, де $i = \overline{1,k}$. Отже, дістанемо КНФ

$$f = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_l .$$

І, врешті, використовуючи закон суперечності та другий дистрибутивний закон, зробимо перехід від КНФ до ДКНФ.

Приклад 5.3

$$\overline{x_1 x_2 x_3} \cdot \left(x_1 x_2 \to x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3\right) = \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) \cdot \left(\overline{x_1 x_2} + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3\right) =$$
$$= \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3\right) = \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_1\right) \times$$
$$\times \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_2\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) = \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2\right) =$$
$$= \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) = \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3\right).$$

Приклад 5.4

$$x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2=\overline{\overline{x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2}}=\overline{\overline{x_1\bar{x}_2}\cdot\overline{\bar{x}_1x_2}}=\overline{\left(\bar{x}_1+x_2\right)\cdot\left(x_1+\bar{x}_2\right)}=$$
$$=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1x_2}=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}\cdot\overline{x_1x_2}=\left(x_1+x_2\right)\cdot\left(\bar{x}_1+\bar{x}_2\right).$$

Елементарна диз’юнкція (кон’юнкція), яка містить усі змінні, називається *конституентою нуля* (*одиниці*). Наприклад, якщо загальна кількість змінних $n=3$, то $\bar{x}_1+x_2+x_3$ – конституента нуля, а $x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3$ – конституента одиниці.

Вочевидь, що конституента нуля перетворюється на нуль лише за одного набору значень змінних. У нашому прикладі конституенті нуля відповідає набір (1, 0, 0). Аналогічно, конституента одиниці перетворюється на одиницю також лише за одного набору. Наприклад, конституенті одиниці $x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3$ відповідає набір (1, 0, 1).

Оскільки для заданої булевої функції її ДДНФ являє собою диз’юнкцію конституент одиниці, а її ДКНФ – це кон’юнкція конституент нуля, то дана функція перетворюється на одиницю чи нуль лише за відповідних цим конституентам наборів значень змінних. Справедливе є і зворотне твердження.

Це дозволяє за заданою таблицею істинності булевої функції одразу записати її досконалі нормальні форми і, навпаки, за заданою ДНФ – скласти таблицю істинності.

Досконалі форми для функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ позначають:

для ДДНФ – $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\underset{1}{\vee}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$;

для ДКНФ – $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\underset{0}{\wedge}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$,

де символ $\underset{1}{\vee}$ або $\underset{0}{\wedge}$ позначає, що диз’юнкція або кон’юнкція виконуються за відповідними конституентами.

Приклад 5.5 Знайти досконалі нормальні форми для функції Вебба.

Розв’язання.

x_1	x_2	$y=\psi_8$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\psi_8=\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$ – ДДНФ;

$\psi_8=\left(x_1+\bar{x}_2\right)\cdot\left(\bar{x}_1+x_2\right)\cdot\left(\bar{x}_1+\bar{x}_2\right)$ – ДКНФ.

Приклад 5.6 Перетворити функцію $y=\left\{0, 3, 5\right\}_{x_1x_2x_3}$ на ДДНФ.

Розв’язання.

$$y=\left\{(000), (011), (101)\right\}_{x_1x_2x_3}=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3 \text{ – ДДНФ.}$$

Приклад 5.7 Для функції, заданої власною ДКНФ $y=\left(x_1+x_2+\bar{x}_3\right)\cdot\left(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3\right)$, скласти таблицю істинності.

Розв’язання.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

5.6 Алгебра Жегалкіна та її основні закони

Алгеброю Жегалкіна називається множина логічних функцій з операціями кон'юнкція, додавання за модулем 2 і константа 1, тобто алгебра, базисом якої є система функцій $\{1, \bullet, \oplus\}$.

Подамо ***основні закони*** цієї алгебри:

1) комутативний:

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 \oplus \left(x_2 \oplus x_3\right) = \left(x_1 \oplus x_2\right) \oplus x_3, \qquad x_1 \cdot \left(x_2 \cdot x_3\right) = \left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$$x_1 \cdot \left(x_2 \oplus x_3\right) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3;$$

4) ідемпотентний:

$$x \cdot x = x;$$

5) закон приведення подібних членів:

$$x \oplus x = 0.$$

В алгебрі Жегалкіна мають місце такі властивості:

$$x \oplus 0 = x; \qquad x \cdot 0 = 0; \qquad x \cdot 1 = x.$$

Решта операцій алгебри логіки виражаються через базис цієї алгебри в такий спосіб:

$$\overline{x} = x \oplus 1; \qquad x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; \qquad x_1 \sim x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2;$$

$$x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2; \qquad x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \oplus x_1 \cdot x_2;$$

$$x_1 \downarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; \qquad x_1 / x_2 = 1 \oplus x_1 \cdot x_2.$$

Функція алгебри Жегалкіна, подана у вигляді суми за модулем 2 добутків незалежних змінних, називається *канонічним многочленом*, або *поліномом Жегалкіна*.

Наприклад, $y = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$ – поліном Жегалкіна.

Лінійна функція

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus c_n x_n,$$

де $c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0,n}$, є окремим випадком полінома Жегалкіна.

Можна довести, що для кожної функції алгебри логіки існує єдиний поліном Жегалкіна.

Якщо булеву функцію задано у вигляді ДДНФ, то для здобуття многочлена Жегалкіна треба: знак «+» замінити знаком «$\oplus$», заперечення $\overline{x}$ замінити на вираз $x \oplus 1$, розкрити дужки і зробити всі можливі спрощення.

Приклад 5.8

$$x_1 \cdot x_2 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus \left(x_1 \oplus 1\right) \cdot \left(x_2 \oplus 1\right) =$$
$$= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 .$$

5.7 Функція Вебба та штрих Шеффера

При розробці багатьох схем електронних пристроїв та вузлів дискретної автоматики використовуються логічні елементи, які реалізують функцію Вебба та функцію Шеффера.

Як було зазначено раніш, кожну з цих функцій можна використовувати як базис алгебри логічних функцій.

Функція Вебба:

$\overline{x} = x \downarrow x$; $\quad x_1 + x_2 = \left(x_1 \downarrow x_2\right) \downarrow 0$; $\quad 1 = \left(x \downarrow \overline{x}\right) \downarrow 0$;

$0 = x \downarrow \overline{x}$; $\quad x_1 \cdot x_2 = \left(x_1 \downarrow x_1\right) \downarrow \left(x_2 \downarrow x_2\right)$; $\quad \overline{x} = x \downarrow 0$.

Функція Шеффера:

$\overline{x} = x / x$; $\quad x_1 + x_2 = \left(x_1 / 1\right) / \left(x_2 / 1\right)$; $\quad 1 = x / \overline{x}$;

$0 = \left(x / \overline{x}\right) / 1$; $\quad x_1 \cdot x_2 = \left(x_1 / x_2\right) / 1$; $\quad \overline{x} = x / 1$.

Отже, як і в булевій алгебрі, кожну функцію чи операцію можна розкласти і в алгебрі Вебба, і в алгебрі Шеффера.

5.8 Мінімізація булевих функцій

Одна й та сама функція алгебри логіки може бути подана в певному базисі по-різному. Тому, наприклад, при побудові економних схем цифрових автоматів виникає проблема подання логічних функцій у мінімальній формі.

Мінімальною ДНФ (*КНФ*) *булевої функції* називається така ДНФ (КНФ), котра містить найменше число елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) та змінних у них стосовно решти ДНФ (КНФ), які представляють дану функцію.

В інженерній практиці найчастіше мінімізується число змінних (число літер) у ДНФ (КНФ).

Нині розроблено чималу кількість методів (способів, прийомів) мінімізації в класі нормальних форм. Нижче розглянемо лише один з них – метод Квайна-Мак-Класкі мінімізації ДДНФ, який ґрунтується на систематичному застосовуванні операцій склеювання та поглинання:

$$k \cdot x + k \cdot \overline{x} = k , \qquad k + k \cdot x = k , \qquad k + k \cdot \overline{x} = k$$

де k – елементарна кон'юнкція.

Бульова функція $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *імплікантою* функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо вона перетворюється на одиницю при наборі змінних, на якому сама функція також дорівнює одиниці. Коротше кажучи, якщо $g = 1$, то й $f = 1$.

З означення випливає, що кожна конституента одиниці, яка входить до складу ДДНФ, або їхня диз'юнкція є імплікантою певної булевої функції.

Імпліканта g називається *простою*, якщо жодна її частина не може бути імплікантою функції f.

Приклад 5.9 Для функції $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3$ знайти всі імпліканти.

Розв'язання.

x_1	x_2	x_3	f	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

$g_1 = x_1x_2x_3$; $g_2 = x_1x_2\overline{x}_3$; $g_3 = \overline{x}_1x_2x_3$;

$g_4 = x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 = x_1x_2$; $g_5 = \overline{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 = x_2x_3$;

$g_6 = \overline{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3$; $g_7 = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 = f$.

Імпліканти $g_4 = x_1x_2$ та $g_5 = x_2x_3$ є простими, решта – ні.

Можна довести, що кожна булева функція є еквівалентна до диз'юнкції власних простих імплікант.

Булеву функцію, зображену за допомогою простих імплікант, називатимемо *скороченою ДНФ*. Пошук мінімальної ДНФ здійснюється серед скорочених ДНФ шляхом їхнього простого перебирання. У розглянутому прикладі скорочена ДНФ має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = g_4 + g_5 = x_1x_2 + x_2x_3.$$

Оскільки інших скорочених ДНФ немає, то ця форма й буде мінімальною.

Метод Квайна-Мак-Класкі виконується в три етапи:

1) знаходження простих імплікант;
2) пошук скорочених ДНФ;
3) вибір з цих форм мінімальної.

Без обмеження спільності розглянемо його на конкретному прикладі. Нехай треба мінімізувати логічну функцію, задану таблицею істинності

x_1	x_2	x_3	x_4	f	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Перший етап: знаходження простих імплікант. На першому кроці цього етапу слід виписати з таблиці істинності конституенти одиниці, розміщуючи їх за групами (див. 1-й крок в таблиці). Номер групи *N* відповідає кількості одиниць у конституенті; *N* може набувати значення від 0 до *n*, де *n* – загальна кількість змінних.

На другому кроці цього етапу виконаємо поелементне порівняння конституент (початкових імплікант) сусідніх груп, тобто здійснимо склеювання. Конституента 1-ї групи (0100) склеюється за змінною x_4 з конституентою 2-ї групи (0101) і за змінною x_1 – з конституентою 2-ї групи (1100). Конституента 2-ї групи (0011) склеюється за змінною x_2 з конституентою 3-ї групи (0111) і за змінною x_1 – з конституентою (1011) цієї ж групи тощо.

Результат склеювання, тобто загальну частину конституент, запишемо в наступний стовпець, роблячи прочерк «–» на місці вилученої змінної (2-й крок в таблиці). Конституенти, які брали участь в операції склеювання, позначимо символом «*».

1-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	0
2	*	0	0	1	1
	*	0	1	0	1
	*	1	0	0	1
	*	1	1	0	0
3	*	0	1	1	1
	*	1	0	1	1
	*	1	1	0	1

2-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	–
	*	–	1	0	0
2		0	–	1	1
		–	0	1	1
		0	1	–	1
	*	–	1	0	1
		1	0	–	1
		1	–	0	1
	*	1	1	0	–

3-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1		–	1	0	–
Прості імпліканти					
		–	1	0	–
		0	–	1	1
		–	0	1	1
		0	1	–	1
		1	0	–	1
		1	–	0	1

Якщо початкова імпліканта (1-й крок) мала *n* змінних (розрядів), то кожна імпліканта 2-го кроку має $n-1$ змінну. Імпліканти 2-го кроку знову піддаються операції склеювання. При цьому склеюванню підлягають імпліканти сусідніх груп, в яких в одній і тій самій позиції стоїть символ «–». Після цього кроку дістаємо імпліканти, які містять $n-2$ змінних і т.і., допоки подальше склеювання стає неможливим.

Виписавши тепер з усіх кроків непозначені символом «*» імпліканти, дістанемо сукупність простих імплікант.

Другий етап: пошук скорочених ДНФ. З цією метою складемо імплікантну таблицю.

Конституенти / Прості імпліканти	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$g_1 = x_2 \bar{x}_3$	*		*		*			*
$g_2 = \bar{x}_1 x_3 x_4$		*				*		
$g_3 = \bar{x}_2 x_3 x_4$		*					*	
$g_4 = \bar{x}_1 x_2 x_4$			*			*		
$g_5 = x_1 \bar{x}_2 x_4$				*			*	
$g_6 = x_1 \bar{x}_3 x_4$				*				*

Кожен рядок цієї таблиці відповідає простій імпліканті, а кожен стовпець – початковій імпліканті (конституенті). Якщо проста імпліканта поглинає (накриває) конституенту одиниці, тобто є її частиною, то відповідна клітина матриці позначається символом «*». Потім відшукаємо стовпці імплікантної таблиці, які мають лише по одній позначці. Такі позначки обводимо кружечком. Відповідні цим позначкам прості імпліканти називаються *базисними* і становлять так зване ядро бульової функції, яке неодмінно входить до скороченої ДНФ.

Після цього розглянемо різні варіанти вибору сукупності простих імплікант, які спільно накриють позначками інші клітини рядка імплікантної таблиці. Ці імпліканти разом з ядром утворять скорочену ДНФ.

З таблиці видно, що скороченими ДНФ для заданої функції *f* будуть:

1) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$;
2) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_6$;
3) $f = g_1 + g_2 + g_5$;
4) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_5$;
5) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_6$.

Третій етап: вибір мінімальної форми. Серед цих скорочених ДНФ обирається та, яка задовольняє критерію мінімальності. При цьому враховуються економічні та технічні чинники її реалізації в конкретному цифровому пристрої. У нашому прикладі мінімальна ДНФ має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 + g_2 + g_5 = x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4.$$

Якщо винести за дужки x_4, здобудемо більш простий вираз:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 + g_2 + g_5 = x_2 \bar{x}_3 + x_4 (\bar{x}_1 x_3 + x_1 \bar{x}_2),$$

який містить менше число змінних (літер). Така форма подання функції називається *дужковою*.

Технічну реалізацію цих форм даної функції подано на рис. 5.7.

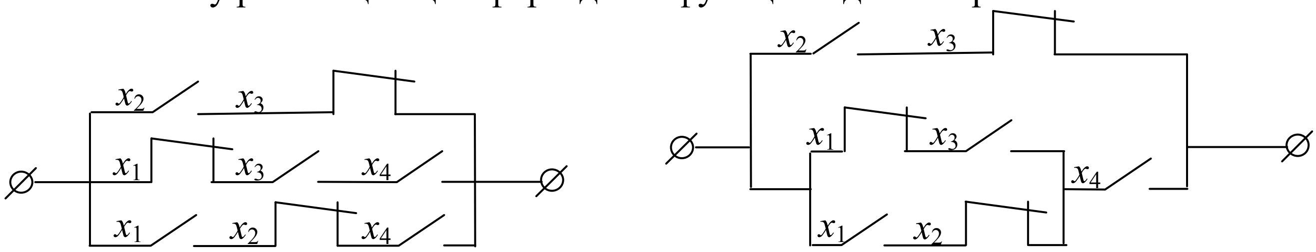


Рисунок 5.7 – Різні реалізації мінімальної ДНФ

Зауваження. Метод Квайна-Мак-Класкі можна використовувати і для здобуття мінімальної КНФ. Для цього слід розглянути значення функції $f = 0$ і конституенти одиниці, які відповідають цим значенням. В наслідок дістанемо $\overline{f} = \underset{1}{\vee}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Потім треба виконати мінімізацію відповідно до вищевикладеного методу. Застосувавши формули де Моргана до дістаної мінімальної ДНФ для функції $\overline{f}$, знайдемо мінімальну КНФ для функції f.