Статична односекторна нелінійна модель В.Леонтьєва.

Класична теорія Леонтьєва є принципово лінійною як у статичному, так і в динамічному випадку. Математично це виражається у тому, що усі використовувані в ній рівняння, як алгебраїчні, так і диференціальні, є лінійними. З економічної точки зору лінійність означає пропорційність результатів витраченим зусиллям, наприклад, вкладеним коштам.

Однак припущення про лінійність далеко не завжди виправдуються. Фактично, вони потрібні для полегшення рішення задач з використанням математичних рівнянь. Відомо, що лінійні рівняння вирішуються незрівнянно легше, ніж нелінійні.

Проте, сучасні проблеми економіки диктують вимоги про використання не таких моделей, що зручніше для рішення, а таких, котрі адекватно описують економічні реалії. Подібні моделі, як правило, є нелінійними, тобто досить складними як з економічної, так і з математичної точки зору.

У даній главі робляться перші кроки по створенню нелінійних економічних моделей балансового типу для випадку статичних задач. Усі виникаючі математичні труднощі переборюються при цьому за рахунок використання ефективних комп'ютерних алгоритмів. Це дозволяє розглядати значно більш складні і реальні задачі, чим у лінійному випадку.

3.1 Односекторна економічна система

Раніше, у главі 1, ми розглядали випадок, коли виробничі витрати w були пропорційні обсягу виробництва, тобто лінійно залежать від них: $w = ax$. Однак це припущення не завжди виправдується на практиці. Існує безліч факторів, що можуть приводити до більш складних залежностей виробничих витрат від обсягу виробництва, чим лінійна.

Нехай, наприклад, ми маємо недовантажене виробництво, на якому частина виробничих потужностей простоює. Тоді, зі збільшенням обсягу виробництва, витрати ростуть відносно повільно, тому що для випуску додаткової продукції не потрібно закуповувати нове обладнання; досить задіяти вже наявне.

Навпаки, при цілком завантаженому виробництві поява додаткових замовлень потребує витрат на придбання устаткування і будівництво приміщень. У цьому випадку виробничі витрати, на початковому етапі, ростуть значно швидше, ніж обсяг виробництва.

Можливі випадки, коли виробничі витрати існують при відсутності виробництва. Наприклад, при тимчасовому простої підприємства все одно необхідно підтримувати в справному стані устаткування, платити обслуговуючому персоналу і т.д.

Усі розглянуті приклади показують, що залежність виробничих витрат w від обсягу виробництва x може бути досить складної і задаватися якоюсь функцією:

$$w = w(x), \tag{3.1.1}$$

відмінною від лінійної.

Розглянемо тепер вільний залишок y. Природно припустити, що він обчислюється як різниця величини x і виробничих витрат $w(x)$:

$$y = x - w(x) \tag{3.1.2}$$

Однак можливі і більш складні випадки. Величина вільного залишку може регулюватися якимись умовами, зовнішніми стосовно даної економічної системи. Наприклад, в умовах так званого прогресивного оподатковування відсоток податку від прибутку росте разом із прибутком, так що податок росте значно швидше, ніж прибуток. Цікаво відзначити, що ця дуже розповсюджена міра придумана спеціально для того, щоб обмежувати зростання виробництва, оскільки досвід капіталістичних країн показав, що такий ріст найчастіше приводить до так називаних криз надвиробництва, що важко відбивається на економіці. Оскільки податок платиться саме з вільного залишку, то може трапитися, що величина податку перевищує величину вільного залишку. Можливі й інші аналогічні вимоги до витрати вільного залишку, загальна особливість яких виражається в тім, що ця витрата прив'язується не стільки до реальної величини вільного залишку, вираженою формулою (3.1.2), скільки до обсягу виробництва x. У загальному випадку для вільного залишку існує якась нелінійна залежність

$$y = y(x), \tag{3.1.3}$$

яка не обов'язково співпадає з (3.1.2). У підсумку рівняння балансу здобуває вид:

$$x - w(x) = y(x) \tag{3.1.4}$$

Головна відмінність цього рівняння від лінійного аналога (1.1.2) полягає в наступному. У рівняння (1.1.2) входять дві змінні величини: x і y.

Відповідно до цього, ми можемо довільно змінювати одну з них, обчислюючи іншу. Таке «лінійне» мислення характерне для ранніх стадій розвитку капіталізму. Наприклад, у XIX столітті економічні теорії не брали до уваги питання можливого вичерпання природних ресурсів чи браку робочої сили. При цьому, природно, можна було припускати можливість необмеженого зростання виробництва і, як наслідок, росту вільних засобів.

Однак зазначені питання грають у сучасній економіці ключову роль. Рівняння (3.1.4), при відповідному завданні функціональних залежностей (3.1.1) і (3.1.3), може відбивати реальні умови, у яких баланс між витратами і випуском можливий не при будь-яких значеннях x, як у лінійному випадку, а тільки при тих, котрі задовольняють, як корені, рівнянню (3.1.4). Інакше кажучи, ми тепер можемо, за допомогою балансового рівняння, знаходити якісь природні значення обсягів виробництва, що враховують умови функціонування даної економічної системи.

Розглянемо, як окремий приклад, найпростіші нелінійні залежності квадратичного типу:

$$w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\; y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \qquad (3.1.5)$$

Тепер рівняння (3.1.4) приймає вид:

$$x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \qquad (3.1.6)$$

чи:

$$(a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1 - 1)x + a_0 + b_0 = 0 \qquad (3.1.7)$$

Корені цього квадратного рівняння будуть:

$$x_{1,2} = \frac{1 - a_1 - b_1 \pm \sqrt{(1 - a_1 - b_1)^2 - 4(a_2 + b_2)(a_0 + b_0)}}{2(a_2 + b_2)} \qquad (3.1.8)$$

У залежності від значення дискримінанта можуть бути два дійсних корені, один чи жодного дійсного кореня. Відповідно, може існувати два рівноважних стани системи, один стан чи жодного такого стану. Становить інтерес дослідження стійкості рівноважних станів; це питання буде розглянутий нижче при рішенні динамічних задач.

Підводячи підсумки вищесказаному, відзначимо той важливий момент, що облік нелінійних залежностей привів до розгляду принципово нових явищ, що були відсутні в лінійному випадку. У нелінійній постановці виникає поняття природних станів рівноваги економічної системи, що дозволяє ставити і вирішувати задачу про пошук оптимальних режимів функціонування системи. Ці режими є власними характеристиками системи й описують ті її стани, що вона сама прагне вибрати як природні для неї.

Відзначимо, що завдання функцій $w = w(x)$ і $y = y(x)$ як у квадратичному, так і в більш складних випадках вимагає додаткового дослідження, що проводиться відомими методами математичної статистики на основі наявної інформації про досліджувану економічну систему.