3.1 Двосекторна економічна система

Перенесемо розвиті вище ідеї на випадок двосекторної економічної системи. Запишемо балансові рівняння у формі:

$$\begin{aligned} x_1 - w_{11} - w_{12} &= y_1 \\ x_2 - w_{21} - w_{22} &= y_2 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Раніше, у параграфі 1.2, ми вважали величини w_{11} і w_{21} пропорційними x_1, а величини w_{12} і w_{22} – пропорційними x_2. Будемо тепер розглядати всі ці величини як деякі, узагалі говорячи, нелінійні функції x_1 і x_2:

$$\begin{aligned} w_{11} &= w_{11}(x_1,\ x_2),\ w_{12} = w_{12}(x_1,\ x_2) \\ w_{21} &= w_{21}(x_1,\ x_2),\ w_{22} = w_{22}(x_1,\ x_2) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Розглянемо величини $y_1,\ y_2$. При відсутності якихось додаткових умов їх можна обчислювати по формулах:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) \\ y_2 &= x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Однак цілком можливо, що якісь умови, зовнішні стосовно даної економічної системи, наприклад, податкові чи соціальні вимоги, задають функціональні залежності y_1 і y_2, відмінні від тих, що ми отримуємо у відповідності з (3.2.3):

$$y_1 = y_1(x_1,\ x_2),\ y_2 = y_2(x_1,\ x_2) \tag{3.2.4}$$

У попередньому параграфі ми обговорювали можливі варіанти таких зовнішніх умов; зрозуміло, у двосекторному випадку вони можуть бути більш різноманітними. Тепер рівняння (3.2.1) приймають вид:

$$\begin{aligned} x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) &= y_1(x_1,\ x_2) \\ x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) &= y_2(x_1,\ x_2) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Порівняємо рівняння (3.2.3) і (3.2.5). Відповідно до (3.2.3) ми можемо довільно задавати величини x_1, x_2, обчислюючи значення величин, y_1, y_2, що відповідають їм . Таким чином, тут зберігається типове для лінійної постановки припущення про необмежені можливості змін обсягів виробництва в секторах економічної системи.

Відповідно до (3.2.5) ми маємо два нелінійних алгебраїчних рівняння щодо двох невідомих x_1, x_2. Ці рівняння визначають якісь значення x_1, x_2, при яких зводиться баланс доходів і витрат. Таких пар значень може бути кілька, одна чи ні однієї, але, у будь-якому випадку, ми вже позбавлені можливості задавати значення x_1, x_2 довільно. Дані значення визначає сама економічна система в залежності від своїх внутрішніх характеристик, а також у залежності від її взаємин з навколишнім середовищем. Таким чином, і тут, як і в односекторному випадку, використання нелінійної моделі якісно змінює розглянуту картину, наближаючи її до реальності.

Рішення системи двох нелінійних рівнянь (3.2.5) може вироблятися якимись чисельними методами, наприклад, добре відомим методом Ньютона, що вивчався в курсі «Теорія алгоритмів і обчислювальних процесів».

Розглянемо конкретні варіанти функціональних залежностей. Нехай перехресні зв'язки, обумовлені величинами w_{12} і w_{21}, залишаться такими ж, як у лінійному випадку:

$$w_{12} = a_{12}x_2, \; w_{21} = a_{21}x_1 \tag{3.2.6}$$

Для величин w_{11}, w_{22}, y_1, y_2 виберемо вираження, аналогічні використаної в односекторному випадку:

$$\begin{aligned} & w_{11} = a_{11,0} + a_{11,1}x_1 + a_{11,2}x_2^2, \; y_1 = b_{1,0} + b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_1^2 \\ & w_{22} = a_{22,0} + a_{22,1}x_2 + a_{22,2}x_2^2, \; y_2 = b_{2,0} + b_{2,1}x_2 + b_{2,2}x_2^2 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Прийняті припущення можуть означати, наприклад, що усередині кожного із секторів реалізуються більш сильні нелінійні залежності, а взаємини секторів є слабкими і, відповідно, лінійними.

Тепер рівняння (3.2.5) приймуть вид:

$$\begin{aligned} & x_1 - a_{11,0} - a_{11,1}x_1 - a_{11,2}x_1^2 - a_{12}x_2 = b_{1,0} + b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_1^2 \\ & x_2 - a_{21}x_1 - a_{22,0} - a_{22,1}x_2 - a_{22,2}x_2^2 = b_{2,0} + b_{2,1}x_2 + b_{2,2}x_2^2 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Перетворимо їх до виду:

$$x_2 = -\frac{a_{11,0} + b_{1,0}}{a_{12}} + \frac{1 - a_{11,1} - b_{1,1}}{a_{12}} x_1 - \frac{a_{11,2} + b_{1,2}}{a_{12}} x_1^2 \tag{3.2.9}$$
$$x_1 = -\frac{a_{22,0} + b_{2,0}}{a_{21}} + \frac{1 - a_{22,1} - b_{2,1}}{a_{21}} x_2 - \frac{a_{22,2} + b_{2,2}}{a_{21}} x_2^2$$

Два рівняння (3.2.9) задають дві параболи на фазовій площині x_1, x_2.

Найбільш типові випадки перетинання цих парабол зображені на рисунок 9 (чотири точки перетинання), рисунок 10 (дві точки перетинання) і рисунок 11 (немає точок перетинання).

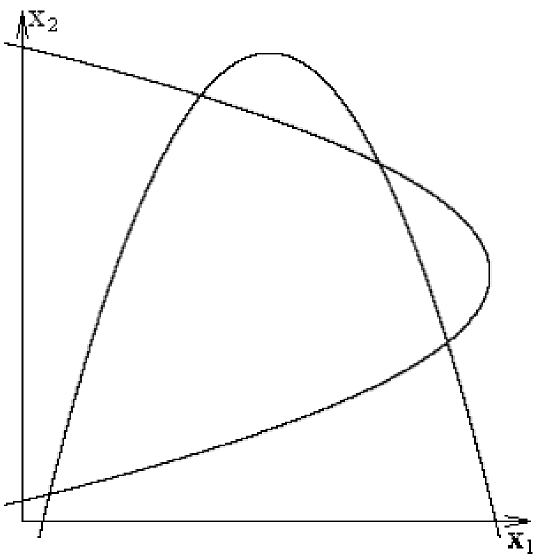

Рис. 9

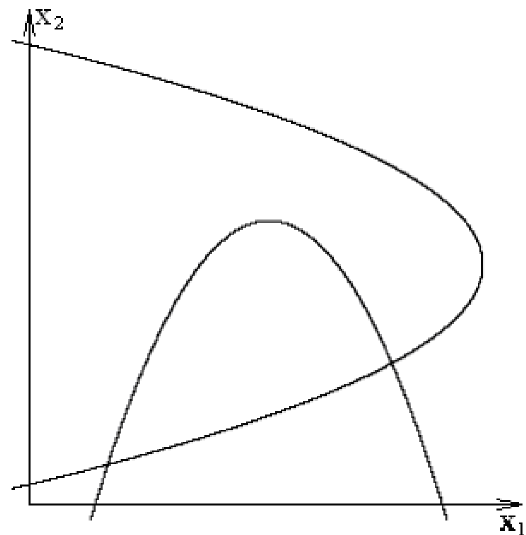

Рис. 10

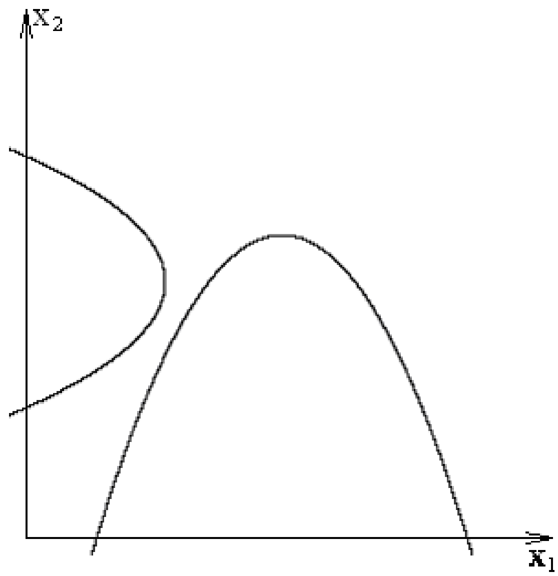

Рис. 11

Відповідно цим випадкам система має чотири, два чи жодного положення рівноваги. Взаємини цих положень, а також їхня стійкість чи нестійкість будуть докладно розглянуті при вивченні нелінійних динамічних моделей.

Поки ж ми знову, як і в односекторному випадку, можемо констатувати, що врахування нелінійності дозволяє розглянути принципово нові явища, що мають безсумнівний економічний зміст, причому такі, котрі не могли бути враховані в лінійних моделях.

3.2 Економічна система з довільною кількістю секторів

Розглянемо випадок довільної кількості секторів з обсягами виробництва в них $x_1, x_2,...,x_n$. Позначимо, як і раніше, величину виробничих витрат, що перелічуються із сектора номер i в сектор номер j через w_{ij}. Вивчимо, від чого може залежати ця величина. Раніше, у лінійному випадку, ми мали пропорційну залежність w_{ij} від величини x_j:

$$w_{ij} = a_{ij} x_j \tag{3.3.1}$$

Інакше кажучи, виробничі витрати сектора номер j залежали тільки від обсягу виробництва в цьому секторі. Тут ми знову маємо типово лінійний підхід, відповідно до якого обсяг виробництва може призначатися довільно з впевненістю в тім, що необхідні для цього ресурси обов'язково знайдуться.

Однак це зовсім не обов'язково. Сектор номер i може просто не справитися з заявкою на надмірно велику кількість виробничих витрат сектора номер j. Таким чином, при з'ясуванні значень величини w_{ij}, взагалі кажучи, бажано враховувати не тільки значення x_j, але і значення x_i, тобто обсяг виробництва в секторі-постачальнику. У підсумку виходить наступна функціональна залежність:

$$w_{ij} = w_{ij}\left(x_i,\ x_j\right) \tag{3.3.2}$$

Припустимо також, що величина вільного залишку y_i залежить тільки від обсягу виробництва в секторі номер i:

$$y_i = y_i\left(x_i\right) \tag{3.3.3}$$

З урахуванням усіх зазначених припущень можна записати наступну систему балансових рівнянь:

$$\begin{array}{l} x_1 - w_{11}\left(x_1\right) - w_{12}\left(x_1,\ x_2\right) - \ldots - w_{1n}\left(x_1,\ x_n\right) = y_1\left(x_1\right) \\ x_2 - w_{21}\left(x_1,\ x_2\right) - w_{22}\left(x_2\right) - \ldots - w_{2n}\left(x_2,\ x_n\right) = y_2\left(x_2\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - w_{n1}\left(x_1,\ x_n\right) - w_{n2}\left(x_2,\ x_n\right) - \ldots - w_n\left(x_n\right) = y_n\left(x_n\right) \end{array} \tag{3.3.4}$$

Ця система рівнянь дозволяє розглядати і вирішувати значно більш широке коло задач, чим у лінійному випадку з якісно іншими результатами. Зокрема, тепер величини $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ не можуть задаватися довільно, а повинні знаходитися як рішення системи рівнянь (3.3.4).

Однак ми можемо розглянути і більш складні випадки нелінійних рівнянь. У принципі, нескладно уявити собі випадки, коли виробничі витрати сектора номер j залежать не тільки від обсягів виробництва в секторах номер i та j, але і від обсягів виробництва у всіх інших секторах даної економічної системи. Система – це щось єдине ціле; тому в ній можливі більш складні варіанти взаємодії, чим тільки перехресні. У цьому випадку буде:

$$w_{ij} = w_{ij}\left(x_1,\ldots,x_n\right) \tag{3.3.5}$$

Аналогічно, можна уявити собі залежності вільних залишків не тільки від обсягів виробництва у власному секторі, але і від обсягів виробництва у всіх інших секторах:

$$y_i = y_i(x_1,...,x_n) \qquad (3.3.6)$$

У підсумку ми приходимо до наступної системі нелінійних рівнянь:

$$\begin{array}{l} x_1 - w_{11}(x_1,...,x_n) - w_{12}(x_1,...,x_n) - ... - w_{1n}(x_1,...,x_n) = y_1(x_1,...,x_n) \\ x_2 - w_{21}(x_1,...,x_n) - w_{22}(x_1,...,x_n) - ... - w_{2n}(x_1,...,x_n) = y_2(x_1,...,x_n) \\ . \\ x_n - w_{n1}(x_1,...,x_n) - w_{n2}(x_1,...,x_n) - ... - w_{nn}(x_1,...,x_n) = y_n(x_1,...,x_n) \end{array} \qquad (3.3.7)$$

Зрозуміло, складання подібних рівнянь вимагає дуже повного попереднього вивчення усіх виробничих зв'язків усередині даної системи, а також зв'язків системи з зовнішнім світом, що відбиваються на вільних залишках.

Рішення систем нелінійних рівнянь являє собою більш складну задачу, чим у лінійному випадку, однак при використанні комп'ютерів і ефективних чисельних методів рішення, наприклад, методу Ньютона, ця задача цілком розв'язна.

Однак тут потрібно знову застерегти від захоплення універсальними моделями з великою кількістю секторів. Чим більше секторів, тим сутужніше збирати необхідну інформацію для побудови моделей і тем складніше вирішувати відповідні рівняння. Реальним і адекватним суті розв'язуваних задач є використання спеціалізованих моделей з відносно невеликою кількістю секторів. Правда, такі моделі вимагають творчого підходу як від замовника-економіста, так і від виконавця-програміста (чи математика), але тільки їхнє використання гарантує необхідний ступінь вірогідності при комп'ютерному моделюванні економічних задач.