Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія

Затверджено до друку
рішенням науково- методичної ради ЗДІА
протокол № 1 від 28.01.2016 р.

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Навчально-методичний посібник

для студентів спеціальності
7,8.05010301 «Програмне забезпечення систем»

Рекомендовано до видання
на засіданні кафедри ПЗАС
протокол № 9 від 29.12.2015 р.

Запоріжжя
ЗДІА
2016

УДК 303.732.4
ББК 32.81
Ш 89

О.Д. Шамровський, професор
А.І. Безверхий, доцент

Відповідальний за випуск: *зав. кафедри ПЗАС, професор О.Д. Шамровський*

Рецензенти:

М.Ю. Пазюк – д.т.н., професор, завідувач кафедри автоматизації технологічних процесів Запорізької державної інженерної академії

Грищак В.З. – д.т.н., професор, завідувач кафедри прикладної математики Запорізького національного університету

Шамровський О.Д., Безверхий А.І.
Ш 89 **Комп'ютерне моделювання економічних задач**
Навчально-методичний посібник для студентів спеціальності 7,8.05010301 «Програмне забезпечення систем» – Запорожжя: Вид-во ЗДІА 2016 – 107с.

Розглядаються сучасні математичні моделі в економіці, орієнтовані на їх комп'ютерну реалізацію. В основу покладений балансовий метод В.В.Леонтьева «Витрати-випуск» і його сучасні модифікації. Широко застосовуються чисельні й аналітичні методи рішення алгебраїчних і диференціальних рівнянь, що дозволяють доводити розгляд усіх задач до остаточних результатів.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Курс «Комп'ютерне моделювання економічних задач» є природним продовженням курсу «Системний аналіз». Головна увага в курсі «Системний аналіз» приділялася побудові й аналізу математичних моделей різноманітних процесів усілякої природи – механічної, екологічної, соціологічної і т.д. Приділялася деяка увага і питанням математичного моделювання економічних задач.

Даний курс цілком присвячений економічним задачам. В основу покладений балансовий метод Леонтьєва «витрати-випуск». Привабливість цього методу полягає в тім, що він по своїй природі заснований на строгих математичних співвідношеннях бухгалтерського балансу і, у той же час, дозволяє моделювати дуже складні й актуальні задачі економіки.

В умовах перехідних процесів в економіці, типових для теперішнього часу, ціна помилкових рішень дуже висока. Подібні рішення, прийняті без ретельних попередніх прорахунків можливих наслідків, важко відбиваються на стані економіки країни.

У той же час прогнозування наслідків прийнятих економічних рішень наражається на великі труднощі тому, що більшість математичних моделей в економіці спираються на деякі стандартні уявлення, справедливі при відносно стабільній ситуації. Крім того, економічні моделі завжди відбивають реалії тієї країни, для якої вони були розроблені.

Фактично, перехідний період вимагає розробки економічних моделей «з нуля», з опорою не на ідеологічні поняття чи досвід інших країн, а в першу чергу, на строгі математичні закони економіки. Однак такі моделі, звичайно, виявляються досить складними, що відлякує від них економістів. Існує, наприклад, думка, що в економіці можна застосовувати тільки лінійні моделі, оскільки нелінійні моделі занадто складні і непридатні для використання. Проте, перехідні процеси будь-якої природи, у тому числі і перехідні процеси в економіці, описуються саме нелінійними диференціальними й алгебраїчними рівняннями. Математичні труднощі при рішенні таких рівнянь переборюються при використанні сучасних аналітичних і чисельних методів і широкого застосування комп'ютерів.

Однієї з особливостей даного курсу саме і є те, що в ньому показується, яким чином можна будувати, на підставі економічних законів, як лінійні, так і нелінійні математичні моделі з обов'язковою умовою, що для будь-якої такої моделі створюється алгоритм її комп'ютерної реалізації.

За таких умов можна розраховувати на те, що економічні експерименти будуть перенесені з реального життя у віртуальний комп'ютерний світ, а для реальності будуть вибиратися, принаймні, ті рішення, що показали свою ефективність на комп'ютері.

Оскільки курс розрахований на студентів-програмістів старших курсів, то передбачається досить вільне володіння методами складання і комп'ютерної реалізації математичних моделей.

РОЗДІЛ 1 ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ СТАТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЕОНТЬЄВА

Перший розділ присвячений викладу класичних результатів лауреата Нобелівської премії з економіки Василя Леонтьєва. У теорії В.В. Леонтьєва можна відзначити наступні важливі обставини. По-перше, йому удалося представити важливі економічні співвідношення у вигляді добре оформлених математичних рівнянь. По-друге, він на практиці показав, як складати і вирішувати ці рівняння в конкретних економічних задачах. Це тим більше важливо, що нерідко математики складають деякі рівняння, що нібито мають економічний зміст, і в той же час нікому невідомо, як застосувати ці рівняння до рішення реальних економічних задач. Леонтьев був категоричним противником подібного підходу. Він вважав, що математичні рівняння тільки тоді можуть бути корисні в економіці, коли відповідний користувач – економіст може задати параметри, що входять у ці рівняння і вирішити рівняння з метою одержання конкретного економічного результату.

Теорія В.В. Леонтьєва цілком задовольняє зазначеним вимогам.

1.1 Односекторна економічна система

Рівняння Леонтьєва дають математичну форму звичайного бухгалтерського балансу. У зв'язку з цим них називають моделлю «витрати-випуск». Розглянемо спочатку найпростіші варіанти цих рівнянь.

Попередньо розглянемо поняття секторів економічної системи. Це поняття носить як об'єктивний, так і суб'єктивний характер. З об'єктивної точки зору сектори – це якісь істотні і відносно самостійні частини даної економічної системи. Наприклад, у масштабах країни можна розглядати такі сектори, як промисловість і сільське господарство, а також туризм і інші частини економіки. Але можливо і більш дрібна розбивка економічної системи на сектори. Наприклад, промисловість можна розділити на важку і легку, сільське господарство на тваринництво і рослинництво і т.д.

Таким чином, незважаючи на об'єктивний характер існування тих чи інших секторів, розбивка цілісної економічної системи на ту чи іншу кількість секторів багато в чому носить суб'єктивний характер і залежить від розв'язуваної задачі.

Наприклад, у сучасній економічній практиці найчастіше приходиться зустрічатися з таким поняттям, як валовий внутрішній продукт (ВВП) країни. Використання цього поняття означає, що для опису економічного становища країни вона вся розглядається як один економічний сектор. Такий інтегральний підхід зручний у силу спрощення ситуації, але природно, не дозволяє вивчати проблему досить заглиблено і змістовно.

Почнемо з розгляду саме односекторної економіки в силу її найбільшої простоти. Нехай економічна система випускає єдиний вид продукції, сумарна вартість якої за деякий проміжок часу (місяць, квартал, рік) дорівнює x. Підкреслимо ще раз, що ця «одиничність» виду продукції є відносною. Насправді, найчастіше, видів продукції досить багато, але з якихось розумінь, економічного чи політичного плану, зручно оцінювати ефективність діяльності економічної системи єдиним показником – сумарною вартістю продукції.

Частина цієї вартості залишається в системі з метою поновлення її роботи (витрати на закупівлю сировини, амортизаційні витрати і т.п.). Позначимо цю частину, що залишається, через w. Припустимо, що вона пропорційна сумарної вартості продукції x, тобто $w = ax$. Величину a, що показує частку продукції, що залишається у виробництві, називають виробничим коефіцієнтом. Конкретне значення цього коефіцієнта залежить від багатьох факторів, але в першу чергу від рівня розвитку технологічних процесів. Чим вище рівень технології, тим менша частка вартості випущеної продукції повинна повертатися в технологічний процес з метою його поновлення. Очевидна формула для обчислення величини a при відомих величинах x і w:

$$a = \frac{w}{x} \tag{1.1.1}$$

Для використання поза системою, тобто на невиробничі потреби, залишається вільний залишок y, рівний:

$$x - ax = y \tag{1.1.2}$$

Це і є рівняння Леонтьєва для односекторної економіки. Переписуючи його у виді:

$$(1 - a)x = y \tag{1.1.3}$$

бачимо, що при заданому виробничому коефіцієнті a воно дозволяє чи знаходити залишок y по заданому x чи, навпаки, обсяг (вартість) продукції x, що повинний бути вироблений для досягнення заданого залишку y:

$$x = \frac{y}{1 - a} \tag{1.1.4}$$

Таким чином, можна, наприклад, уклавши договір на постачання обсягу y продукції, спланувати обсяг x, що випускається, який забезпечує договірну величину y.

Наприклад, нехай $a = 0.3$. Тоді рівняння (1.1.3) приймає вид:

$$0.7x = y \tag{1.1.5}$$

При $x = 538$ одержуємо $y = 376.6$.

Рівняння (1.1.4) при цьому буде:

$$x = \frac{y}{0.7} \tag{1.1.6}$$

При $x = 777$, маємо $x = 1110$.

У прикладах розглянутий випадок $a < 1$. Цей, найбільш природний, випадок відповідає рентабельній економічній системі, у якій доходи більше виробничих витрат. Однак існують і нерентабельні системи, у яких $a > 1$, тобто виробничі витрати перевищують доходи. Наприклад, це військово-промисловий комплекс країни в тих випадках, коли основна частина його продукції йде не на експорт, а надходить на озброєння власної армії.

Менш відомий інший факт – збитковість сільського господарства більшості розвинених країн світу. Це пов'язано з тим, що в таких країнах багаторічна експлуатація землі привела до її виснаження і необхідності великих витрат на внесення добрив і інші агрономічні заходи.

У подібних випадках нерентабельної економічної системи одержуємо $1 - a < 0$ і, як наслідок, при додатному обсязі виробництва $x > 0$ одержуємо від'ємний вільний залишок:

$$y = (1 - a)x < 0 \tag{1.1.7}$$

Такий від'ємний залишок дорівнює обсягу дотацій, необхідних для підтримки системи в працездатному стані. Без дотацій неможливе функціонування ВПК і сільського господарства.

Описаний підхід дозволяє розглядати і більш складні ситуації, що виникають у випадках нелінійної залежності виробничих витрат w від x, а також залежності від x вільного залишку y. Відповідні приклади будуть розглянуті нижче.

1.2 Двосекторна економічна система

Перейдемо до більш складного випадку взаємодії двох секторів економічної системи. Підкреслимо ще раз, що питання про кількість секторів носить багато в чому суб'єктивний характер. Наприклад, можна, як у попередньому параграфі, розглядати всю економіку країни з позицій ВВП, а можна розчленувати єдину економіку на промисловість і сільське господарство. У свою чергу, промисловість буває легка і важка; у сільському господарстві можна виділити сектора рослинництва і тваринництва і т.д.

Підкреслимо, що така розбивка єдиної економічної системи на сектори дозволяє виявити і вирішити ряд проблем, що без такої розбивки не видні. .

Отже, розглянемо систему, умовно розбиту на два сектори. Позначимо обсяги випуску продукції в цих двох секторах, виражені в однаковому грошовому еквіваленті, через x_1 і x_2. Ми бачили раніше в односекторному випадку, що частину валового продукту необхідно повертати назад у систему для задоволення виробничих потреб. У двосекторному випадку спостерігається аналогічна картина, але тепер кожний із секторів повинний забезпечувати нормальне існування не тільки собі, але і сусідньому сектору.

Частина величини x_1 йде на поновлення випуску продукції в першому секторі економіки. Наприклад, промисловість витрачає засоби на закупівлю сировини, комплектуючі і т.д. Позначимо цю частину через w_{11}. Припустимо, що цей обсяг виробничих витрат першого сектора пропорційний обсягу виробництва в цьому секторі:

$$w_{11} = a_{11} x_1 \tag{1.2.1}$$

Коефіцієнт пропорційності a_{11} показує, яке кількість продукції першого сектора затрачається на виробництво одиниці продукції того ж сектора. Очевидна формула для обчислення a_{11} при відомих x_1 і w_{11}:

$$a_{11} = \frac{w_{11}}{x_1} \tag{1.2.2}$$

Також частина величини x_1 йде на поновлення випуску продукції в другому секторі економіки. У прикладі взаємодії промисловості і сільського господарства промисловість повинна поставляти сільському господарству відповідну техніку (трактора, комбайни). Позначимо зазначену частину через w_{12}. Якщо ці витрати пропорційні обсягу виробництва в другому секторі то буде:

$$w_{12} = a_{12} x_2 \tag{1.2.3}$$

Коефіцієнт пропорційності a_{12} показує, яке кількість продукції першого сектора йде на виробництво одиниці продукції другого сектора.

Очевидна формула:

$$a_{12} = \frac{w_{12}}{x_2}, \tag{1.2.4}$$

що дозволяє знаходити даний коефіцієнт по відомих витратах w_{12} і величині x_2.

Аналогічно, частина величини x_2 йде на виробництво продукції в першому секторі економіки. Наприклад, сільське господарство поставляє промисловості продовольство і сировину. Позначимо цю частину w_{21}. У випадку її пропорційності обсягу виробництва в першому секторі маємо:

$$w_{21} = a_{21}x_1 \tag{1.2.5}$$

Коефіцієнт пропорційності a_{21} показує, яке кількість продукції другого сектора йде на виробництво одиниці продукції першого сектора:

$$a_{21} = \frac{w_{21}}{x_1} \tag{1.2.6}$$

Ще частина величини x_2 йде на виробництво продукції в другому секторі економіки. Наприклад, сільське господарство постачає себе продовольством, насінним матеріалом і т.д. Позначимо цю частину w_{22}. У випадку її пропорційності обсягу валового продукту другого сектора буде:

$$w_{22} = a_{22}x_2 \tag{1.2.7}$$

Коефіцієнт a_{22} показує кількість продукції другого сектора, що йде на виробництво одиниці продукції цього ж сектора:

$$a_{22} = \frac{w_{22}}{x_2} \tag{1.2.8}$$

Таким чином, ми спостерігаємо взаємодію двох секторів. Кожний з них «піклується» не тільки про себе, але і про партнера.

Віднімаючи з x_1 величини $a_{11}x_1$ і $a_{12}x_2$, одержуємо вільний залишок y_1, тобто обсяг тих засобів, що перший сектор може витрачати на невиробничі потреби. Аналогічно, віднімаючи з x_2 величини $a_{21}x_1$ і $a_{22}x_2$, одержуємо вільний залишок y_2, дорівнює обсягу засобів, що може витрачати на невиробничі потреби другий сектор. У підсумку приходимо до системи двох рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 &= y_1 \\ x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 &= y_2 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Матриця:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.2.10}$$

називається виробничою матрицею системи.

Приводячи подібні, перепишемо рівняння (1.2.9) у формі:

$$(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = y_1 \tag{1.2.11}$$

$$-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 = y_2$$

За допомогою цих рівнянь можна вирішити дві основні задачі.

Перша. При відомих обсягах валової продукції x_1, x_2 знайти вільні залишки y_1, y_2. Ця задача розв’язується, за допомогою рівнянь (1.2.11), шляхом безпосередніх обчислень.

Друга. За відомими значеннями вільних залишків y_1, y_2 знайти обсяги валової продукції x_1, x_2, що відповідають їм. У цьому випадку необхідно вирішити систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь (1.2.11) щодо невідомих x_1, x_2. З цією метою можна скористатися, наприклад, наступними формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{1.2.12}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & -a_{12} \\ y_2 & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = (1 - a_{22})y_1 + a_{12}y_2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & y_1 \\ -a_{21} & y_2 \end{vmatrix} = (1 - a_{11})y_2 + a_{21}y_1$$

Зрозуміло, рішення (1.2.12) придатне тільки при не рівному нулю визначнику системи: $\Delta \neq 0$.

Розглянемо відповідні приклади. Нехай компоненти виробничої матриці будуть: $a_{11} = 0.3,\ a_{12} = 0.1,\ a_{21} = 0.2,\ a_{22} = 0.4$, тобто матриця має вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \tag{1.2.13}$$

Нехай при цьому відомі обсяги валової продукції кожного сектора: $x_1 = 500,\ \ x_2 = 300$. Тоді, відповідно до (1.2.11) маємо:

$$y_1 = (1 - 0.3) \cdot 500 - 0.1 \cdot 300 = 320 \tag{1.2.14}$$
$$y_2 = -0.2 \cdot 500 + (1 - 0.4) \cdot 300 = 80$$

Таким чином, обсяг засобів, які можна використовувати на невиробничі потреби, у першому секторі дорівнює 320, а в другому дорівнює 80.

Якщо при тій же виробничій матриці (1.2.13) відомі договірні обсяги постачань: $y_1 = 300,\ y_2 = 100$, то, відповідно (1.2.12), знаходимо необхідні обсяги валової продукції:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 1-0.4 \end{vmatrix} = 0.7 \cdot 0.6 - 0.2 \cdot 0.1 = 0.4 \qquad (1.2.15)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 300 & -0.1 \\ 100 & 0.6 \end{vmatrix} = 300 \cdot 0.6 + 100 \cdot 0.1 = 190$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.7 & 300 \\ -0.2 & 100 \end{vmatrix} = 100 \cdot 0.7 + 300 \cdot 0.2 = 130$$

$$x_1 = \frac{190}{0.4} = 475,\ x_2 = \frac{130}{0.4} = 325$$

На основі розглянутих двох задач можна вирішувати і більш складні задачі. Наприклад, становить інтерес дослідження параметрів виробничої матриці, їхній вплив на результати діяльності економічної системи.

В односекторному випадку ситуація досить очевидна і визначається єдиним параметром а. Вище було показано, що економічна система прибуткова при $a < 1$ і збиткова при $a > 1$.У двосекторному випадку подібної наочності немає. Всі елементи виробничої матриці (1.2.10) можуть бути відносно невеликими, але в сумі економічна система в цілому чи окремі її частини можуть бути збитковими. Наприклад, повертаючись до першого з розглянутих прикладів, візьмемо знову $x_1 = 500$, $x_2 = 300$, але виробничу матрицю (1.2.13) замінимо на матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad (1.2.16)$$

Зростання величин a_{21}, a_{22} означає, що виросли витрати другого сектора як на підтримку виробництва в першому секторі, так і на самозабезпечення. Тепер другий вільний залишок буде:

$$y_2 = -0.4 \cdot 500 + 0.5 \cdot 300 = -50 \qquad (1.2.17)$$

Таким чином, другий сектор у цьому випадку виявився збитковим. Саме по собі це ще не означає поганої оцінки його роботи. Нагадаємо, що вільний залишок першого сектора дорівнює 320, так що в сумі економічна система є прибутковою. Як уже говорилося, у сучасних розвинених країнах, як правило, збитковим є сільське господарство, що потребує дотацій з боку промисловості.

Розглянемо це питання більш докладно. Якщо усі компоненти виробничої матриці (1.2.10) є величинами малими, близькими до нуля, то величини $1-a_{11}$ і $1-a_{22}$ будуть близькими до одиниці. У підсумку, при додатних значеннях обсягів виробництва x_1 і x_2, виходять, відповідно до (1.2.11), і додатні значення вільних залишків y_1, y_2. Навпаки, додатним значенням y_1, y_2 відповідають, відповідно до (1.2.12), додатні x_1 і x_2. Підкреслимо, що такий результат виходить при однакових порядках величин x_1 і x_2, а також y_1, y_2. Ці результати природні для рентабельно працюючої економічної системи, у якої виробничі витрати в обох секторах відносно малі.

Нехай тепер компоненти виробничої матриці (1.2.10) близькі до одиниці. Тоді величини $1-a_{11}$ і $1-a_{22}$ будуть близькі до нуля і додатним значенням x_1 і x_2 будуть відповідати, відповідно до (1.2.11), від'ємні значення y_1, y_2 і навпаки. Це випадок нерентабельної економічної системи, у якої збиткові обидва сектора. І в цьому випадку результати справедливі при однакових порядках x_1 і x_2, а також y_1, y_2. Власне кажучи, у цьому випадку має сенс розглядати тільки випадок додатних обсягів виробництва x_1, x_2, що приводять, у силу великих виробничих витрат, до від'ємних вільних залишків y_1 і y_2.

Це два крайніх випадки. Ми бачили, на прикладі, що можливі і будь-які інші варіанти, тобто, при додатних x_1, x_2, додатне значення одного з вільних залишків при від'ємному значенні іншого, що означає рентабельність одного сектора і збитковість іншого. Економічна система в цілому при цьому може бути як рентабельною, так і збитковою.

Підводячи підсумки даного параграфа можна сказати, що перехід від односекторної до двосекторної моделі дозволив набагато глибше глянути на принципові економічні проблеми.

1.3 Довільна кількість секторів економічної системи

Вище ми розглянули дуже докладно приклади економічних систем з одним і двома секторами. Це було зроблено для того, щоб легше було сприймати загальну модель економічної системи з довільною кількістю секторів. Усі необхідні поняття в загальному випадку описуються як уже відомі і з меншою кількістю пояснень.

Отже, перейдемо тепер до випадку довільної кількості n секторів економічної системи. Як уже підкреслювалося вище, кількість секторів указується деякою мірою суб'єктивно, у залежності від того, які сектори представляються, у даній конкретній обстановці, найбільш важливими. Наприклад, раніше ми розглядали як приклади тільки промисловість і сільське господарство, тобто виробляючі галузі. Однак у даний час велика увага приділяється приватному підприємництву в сфері так називаного малого і середнього бізнесу. Не секрет, що таке підприємництво найчастіше виконується за схемою «купи-продай». Інакше кажучи, це скупка вже наявних товарів і наступна торгівля ними, але не виробництво нових товарів. Надмірне захоплення подібним бізнесом може породити в державі значені проблеми. Країна не може тільки торгувати, потрібно ще і виробляти, тому надмірне захоплення подібним бізнесом мало перспективне.

Позначимо обсяги виробництва в секторах економічної системи, виражені в єдиному грошовому еквіваленті, через $x_1,\ x_2,...,x_n$. Для довільного сектора номер i $(i=1,...,n)$ частина валової продукції x_i цього сектора, витрачається для підтримки виробництва цього ж і інших секторів. Ту частину продукції x_i, що направляється в сектор номер j $(j=1,...n)$, будемо позначати через w_{ij}. Якщо вона пропорційна обсягу виробництва x_j в цьому секторі, то маємо:

$$w_{ij} = a_{ij} x_j \tag{1.3.1}$$

Коефіцієнт a_{ij} показує, яке кількість продукції i-го сектора витрачається на виробництво одиниці продукції j-го сектора. Для його обчислення по відомим x_j і w_{ij} маємо очевидну формулу:

$$a_{ij} = \frac{w_{ij}}{x_j} \tag{1.3.2}$$

Величини кінцевої продукції (вільні залишки), що виходять після задоволення усіх внутрішніх потреб даної економічної системи, позначимо через $y_1,\ y_2,...,y_n$. Усі зазначені величини поєднуються очевидними рівняннями:

$$\begin{aligned} x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n &= y_1 \\ x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - ... - a_{2n}x_n &= y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ x_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... - a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Перепишемо ці рівняння у формі:

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n &= y_1 \\ - a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - ... - a_{2n}x_n &= y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... + (1 - a_{nn})x_n &= y_n \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Введемо в розгляд такі матриці і вектори:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (1.3.5)$$

Тут матриця A зветься виробничою; зміст векторів X і Y очевидний. За допомогою цих матриць і векторів систему рівнянь (1.3.4) можна представити у виді єдиного матричного рівняння:

$$(E-A)X=Y \qquad (1.3.6)$$

Так само, як у випадках одно- і двосекторної економіки система рівнянь (1.3.4) чи еквівалентне матричне рівняння (1.3.6) можуть застосовуватися для рішення двох задач.

По-перше, по заданих обсягах валової продукції $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ можна обчислити обсяги кінцевої продукції $y_1,\ y_2,\dots,y_n$. Ця задача розв’язується шляхом безпосередніх обчислень відповідно до рівнянь (1.3.4) чи (1.3.6).

По-друге, по заданих обсягах кінцевої продукції можна обчислити обсяги валової продукції $x_1,\ x_2,\dots,x_n$. Ця задача вимагає рішення системи рівнянь (1.3.4). При великих значеннях $n>2$ подібні системи рівнянь зручно вирішувати на комп'ютерах за допомогою відповідних стандартних програм. Зокрема, можна вказати на те, що популярні електронні таблиці Excel, які входять у комплект Microsoft Office і широко застосовуються при оформленні бухгалтерських документів, містять потрібні програми.

Найбільше зручно при цьому використовувати матричне рівняння (1.3.6). Для його рішення спочатку обчислюємо зворотну матрицю $(E-A)^{-1}$, а потім множимо рівняння (1.3.6) ліворуч на цю матрицю, одержуючи:

$$X=(E-A)^{-1}Y \qquad (1.3.7)$$

Усі зазначені тут процедури, тобто знаходження різниці матриць E і A, знаходження зворотної матриці $(E-A)^{-1}$ і знаходження добутку цієї матриці і вектора Y легко виконуються за допомогою вбудованих функцій електронних таблиць Excel.

Розглянемо відповідні приклади. Вивчимо функціонування економічної системи з сімома секторами. Обсяги валової продукції в секторах об'єднаємо у вектор:

$$\tilde{X}=(200,\ 250,\ 200,\ 270,\ 250,\ 210,\ 180) \qquad (1.3.8)$$

Для зручності запису тут використаний не вектор-стовпець X, а транспонований вектор-рядок $\widetilde{X}$.

Нехай виробнича матриця для цієї системи має вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.15 & 0.05 & 0.03 & 0.001 & 0.2 \\ 0.05 & 0.4 & 0.25 & 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.1 \\ 0.01 & 0.02 & 0.2 & 0.05 & 0.1 & 0.03 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0.1 & 0.3 & 0.15 & 0.25 & 0.03 \\ 0.15 & 0.1 & 0.13 & 0.11 & 0.3 & 0.01 & 0.02 \\ 0.05 & 0.04 & 0.07 & 0.1 & 0.09 & 0.25 & 0.04 \\ 0.02 & 0.03 & 0.01 & 0.2 & 0.25 & 0.15 & 0.03 \end{pmatrix} \qquad (1.3.9)$$

Тоді, за допомогою (1.3.6), знаходимо обсяги кінцевої продукції, об'єднані у вектор:

$$\widetilde{Y} = (27.79,\ 55.90,\ 106.40,\ 67.10,\ 58.60,\ 66.80,\ 13.10) \qquad (1.3.10)$$

Природно, що обсяги вільних залишків значно менші, ніж відповідні валові показники.

Нехай тепер задані обсяги вільних залишків:

$$\widetilde{Y} = (130,\ 150,\ 120,\ 170,\ 240,\ 260,\ 150) \qquad (1.3.11)$$

Тоді, відповідно до формули (1.3.7), одержуємо необхідні обсяги валової продукції:

$$\widetilde{X} = (629.99,\ 643.80,\ 353.51,\ 761.87,\ 783.77,\ 686.64,\ 656.45) \qquad (1.3.12)$$

Як і раніше, можна, на основі отриманих рівнянь, вирішувати і більш складні задачі, наприклад, задачу про вплив на діяльність економічної системи рівня технологічних процесів у секторах. Чим більш ефективний технологічний процес, тим менші відповідні параметри виробничої матриці. Надмірне збільшення цих параметрів може привести до від'ємних вільних залишків, тобто до збиткового виробництва, що ми вже бачили на прикладі двосекторної економіки.

Можливі і дослідження іншого роду. Наприклад, у розглянутому вище прикладі пошуку вільних залишків по заданих обсягах валової продукції (1.3.8) знизимо обсяг виробництва в першому секторі з 200 до 100. У результаті буде:

$$\widetilde{Y} = (-42.21,\ 60.90,\ 107.40,\ 69.10,\ 73.60,\ 71.80,\ 15.10) \qquad (1.3.13)$$

Перша галузь витратила більше, ніж зробила, тобто є збиткової.

Таким чином, розглянуті приклади показують практичне застосування рівнянь Леонтьєва для рішення різних виробничих задач.

Ті ж рівняння (1.3.4) можна розглядати і як такі, що описують торгівлю ряду країн між собою. У цьому випадку величини $x_1,\ x_2,...,x_n$ задають валові національні доходи країн; величини $y_1,\ y_2,...,y_n$ задають національні витрати країн, а величини виду $a_{ij}x_j$ задають обсяги імпорту країни номер j із країни номер і. У цьому випадку величина a_{ij} називається маргінальною схильністю країни номер j до імпорту з країни з номером і, а величина a_{ii} маргінальною схильністю країни номер і до споживання власних товарів.

Висновки. Ми розглянули методи складання і використання лінійних статичних рівнянь Леонтьєва. Ці рівняння дозволяють розглянути широке коло реальних економічних задач, добре обґрунтовані з теоретичної точки зору і досить зручні для практичного застосування.

Використання сучасних комп'ютерів і відповідного програмного забезпечення (електронних таблиць, популярних у бухгалтерській справі), дозволяє досить зручно і швидко вирішувати відповідні математичні проблеми.

1.4 Питання для контролю

1. Що таке сектора економічної системи?
2. Що таке односекторна економічна система?
3. Як виглядає рівняння Леонтьєва для односекторної економічної системи? Які задачі можна вирішувати з його допомогою?
4. Що таке двосекторна економічна система?
5. Як виглядають рівняння Леонтьєва для двосекторної економічної системи? Які задачі можна вирішувати з їхньою допомогою?
6. Як виглядають рівняння Леонтьєва для економічної системи з довільною кількістю секторів?
7. Як записується матричне рівняння Леонтьєва для економічної системи з довільною кількістю секторів?
8. Які задачі можна вирішити за допомогою рівняння Леонтьєва для економічної системи з довільною кількістю секторів? Як ці задачі розв’язуються на комп'ютері?
9. Як рівняння Леонтьєва дозволяють описати торгівлю між собою ряду країн?

1.5 Теми лабораторних робіт

1. Використати електронні таблиці Excel для пошуку вільних залишків при заданих обсягах виробництва для довільної кількості секторів.
2. Використати електронні таблиці Excel для пошуку обсягів виробництва по заданих вільних залишках при довільній кількості секторів.
3. Використати електронні таблиці Excel для аналізу впливу компонент виробничої матриці на ефективність економічної системи з довільною кількістю секторів.

РОЗДІЛ 2 ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЕОНТЬЄВА

У попередній главі розглядалися статичні рівняння Леонтьєва. Ці рівняння дозволяють описувати стан економічної системи тільки у випадку його незмінності в часі.

Ця глава присвячена розгляду динамічних рівнянь, що дозволяють вивчити розвиток економічної системи (чи її деградацію) у залежності від діяльності системи в попередні моменти часу.

У той час, як статичні задачі описувалися за допомогою алгебраїчних рівнянь, динамічні задачі, природним чином, описуються за допомогою диференціальних рівнянь. Однак і в цьому випадку приводяться алгоритми, що дозволяють, вичерпним чином, вирішувати відповідні задачі за допомогою комп'ютера.

Як і в статичному випадку, розглядаються економічні системи з різною кількістю секторів і ті задачі, що можуть бути розглянуті за допомогою відповідних динамічних рівнянь.

2.1 Односекторна економічна система. Виведення динамічного рівняння

У попередній главі вивчалися статичні задачі. Це означає, що розглядалося тільки так зване просте відтворення, коли обсяги продукції, що випускається, залишаються незмінними у часі. Таке функціонування характерне або для економічної системи, що досягла насичення, або для системи з недосконалими технологіями. В останньому випадку виробничі витрати настільки великі, що вільних залишків вистачає тільки на прожитковий мінімум.

При поліпшенні технологічних процесів виробничі витрати знижуються і вільні залишки можуть забезпечити вже не тільки потреби життєзабезпечення людей, зайнятих у виробництві, але і вкладання частини засобів у розширення виробництва.

Звернемо увагу на наступне. В даний час вважається, що для розширення виробництва обов'язково потрібні якісь зовнішні інвестиції. Але це зовсім не обов'язково і так було не завжди. Наприклад, знаменитий автомобільний магнат Генрі Форд починав із сараю на фермі, де він своїми руками будував свої перші автомобілі і поступово, виняткове за рахунок вкладання власних засобів, розширив виробництво до розмірів гігантської промислової імперії.

Ми будемо розглядати саме таку ситуацію розширення за рахунок використання частини вільного залишку. Розглянемо знову рівняння (1.1.2) і виконаємо заміну:

$$y \to y + y' \tag{2.1.1}$$

Тут y' – обсяг інвестицій, а величина y, розташована в правій частині (2.1.1), задає новий обсяг вільних засобів (природно, менший, ніж колишній обсяг, зазначений у лівій частині).

Розглянемо докладніше величину y'. Інвестиції викликають приріст обсягу виробництва. Припустимо, що швидкість цього росту пропорційна обсягу інвестицій y'. Оскільки швидкість зміни величини x у часі задається похідною dx/dt, то одержуємо:

$$y' = \nu \frac{dx}{dt} \tag{2.1.2}$$

Коефіцієнт пропорційності ν називається коефіцієнтом фондомісткості. Він дорівнює тому обсягу інвестицій, що необхідний для підтримки одиничної швидкості приросту валової продукції. Нехай, наприклад, обсяг продукції виміряється в тисячах доларів, а характерним масштабом часу є рік. Тоді величина $\nu = 0.1$ показує, що для забезпечення приросту 1000 $/рік необхідний обсяг інвестицій:

$$y' = 0.1 \cdot 1000 = 100 \ \$ \tag{2.1.3}$$

Інакше кажучи, рівність коефіцієнта фондомісткості величині 0.1 показує, що для річного збільшення обсягу виробництва на одиницю виміру, рівну в даному випадку 1000$, потрібно вкласти десяту частку цієї одиниці, тобто 100$.

Одиницею виміру коефіцієнта фондомісткості є час. Тому його можна також розглядати, як час повної окупності інвестицій. Наприклад, та ж величина $\nu = 0.1$ означає, що окупність інвестицій досягається за час, рівний однієї десятої року.

Остаточно, підставляючи (2.1.2) у (2.1.1) і результат у (1.1.2) одержуємо:

$$x - ax = \nu \frac{dx}{dt} + y \tag{2.1.4}$$

Це і є динамічне рівняння Леонтьєва для односекторної економічної системи.

2.2. Розв'язок динамічного рівняння для односекторного випадку

Перейдемо до рішення задач на основі рівняння (2.1.4). Тут, як і в статичному випадку, основними є дві задачі.

Перша. При заданому x знайти y. Істотна відмінність від статики є в тім, що тепер x задається не як число, а як функція часу:

$$x = x(t) \tag{2.2.1}$$

Тому і y знаходиться також як функція часу. Відповідно до (2.1.4) маємо:

$$y = y(t) = (1 - a)x(t) - \nu\frac{dx}{dt} \tag{2.2.2}$$

Таким чином, при відомих темпах зміни обсягів виробництва, заданих функцією (2.2.1), ми знаходимо темпи зміни росту вільного залишку.

Друга. Знаходження, на основі рішення диференціального рівняння (2.1.4), залежності (2.2.1). Розглянемо рішення зазначеного рівняння. Обмежимося, у даному параграфі, найпростішим випадком постійних величин a, ν і y. Розглянемо економічний зміст зазначених припущень.

Сталість виробничого коефіцієнта a означає, що відносний обсяг виробничих витрат не змінюється в часі. Це можливо при стабільному функціонуванні устаткування, коли витрати на його обслуговування і ремонт не змінюються в часі. Крім того, повинні бути стабільними ціни на сировину і комплектуючі і т.д.

Сталість коефіцієнта фондомісткості ν поз в'язана, насамперед, з таким фактором, як політична стабільність. Справді, інвестор, що вклав засоби в розширення виробництва й очікує їхньої окупності через час ν, а потім і одержання прибутку, вправі розраховувати, що за даний час не відбудуться такі події, що зможуть поставити під сумнів можливість подальшого розвитку виробництва, а також права власності інвестора.

Нарешті, розглянемо вимогу сталості вільного залишку y. Нагадаємо, що ми плануємо розширення виробництва; отже, і збільшення прибутку. Але при цьому, у рамках зроблених припущень, весь приріст прибутку йде на подальше розширення виробництва, а особисті витрати, що саме і виходять за рахунок вільного залишку, залишаються незмінними. Таке тверде обмеження характерне для початкової стадії розвитку; воно необхідно для підтримки найвищих темпів розвитку.

Перейдемо безпосередньо до рішення рівняння (2.1.4) з урахуванням зроблених припущень. Спочатку знайдемо стаціонарне рішення $x^* = \text{const}$, тобто той обсяг виробництва, при якому спостерігається баланс доходів і витрат і, як наслідок, незмінність обсягу виробництва. Оскільки похідна від константи дорівнює нулю, то ми приходимо до звичайного статичного рівняння:

$$(1 - a)x^* = y \tag{2.2.3}$$

з рішенням:

$$x^* = \frac{y}{1-a} \tag{2.2.4}$$

Далі виконаємо заміну:

$$x = x^* + z \tag{2.2.5}$$

Це означає перенос початку відліку на осі x у точку x^*. Підставляючи (2.2.5) у (2.1.4) і з огляду на рівність:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} \tag{2.2.6}$$

одержуємо:

$$x^* + z - a(x^* + z) = \nu \frac{dz}{dt} + y \tag{2.2.7}$$

У силу рівності (2.2.3) перший і третій доданки в правій частині рівняння (2.2.7) скорочуються з другим доданком у його лівій частині. У підсумку одержуємо наступне однорідне рівняння:

$$bz = \nu \frac{dz}{dt}, \; b = 1 - a \tag{2.2.8}$$

Це найпростіше диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами; його рішення має вид:

$$z = z_0 e^{kt}, \quad k = \frac{b}{\nu} \tag{2.2.9}$$

Величина z_0 задає початкове значення z у момент часу $t_0 = 0$. Від'ємні значення z_0 відповідають початковим значенням x, меншим чим x^*, додатні – більшим, ніж x^*. Для величини x у підсумку одержуємо:

$$x = x^* + z_0 e^{kt} \tag{2.2.10}$$

Розглянемо докладніше значення величини z_0. Відповідно до (2.1.2), (2.2.9) і (2.2.10) обсяг інвестицій, вкладених у початковий момент часу $t_0 = 0$, дорівнює:

$$y'(0) = \nu \frac{dx}{dt}(0) = \nu z_0 k = z_0 b \qquad (2.2.11)$$

Звідси:

$$z_0 = \frac{y'(0)}{b} = \frac{y'(0)}{1-a} \qquad (2.2.12)$$

Таким чином, величина z_0 дорівнює початковому обсягу інвестицій, поділеному на b.

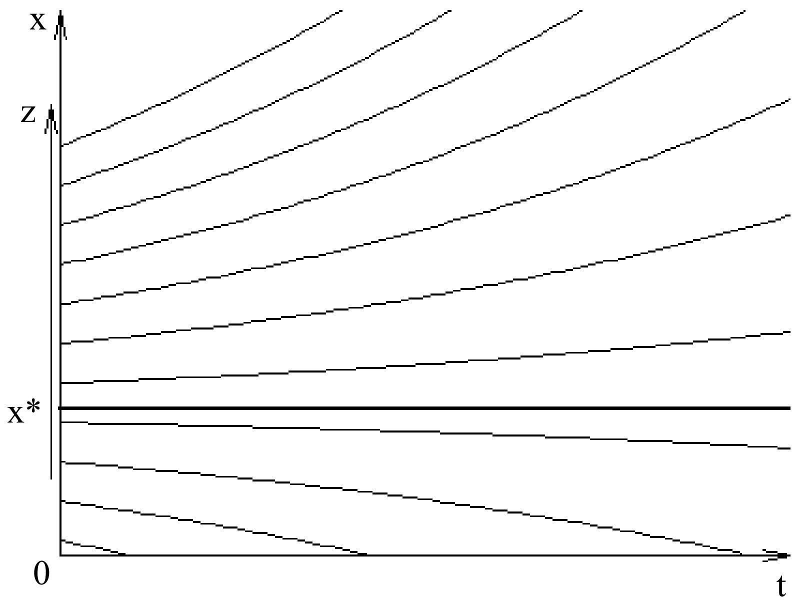

Рис. 1

Графіки, що відповідають виразу (2.2.10), побудовані для ряду значень величини z_0, приведені на рисунку 1. Проаналізуємо результати. Ми бачимо, що стан рівноваги x^* системи є хитливим, оскільки будь-яке початкове відхилення від цього стану згодом зростає. Сама по собі ця нестійкість ні хороша і ні погана; усе залежить від того, яку задачу ми вирішуємо.

У сучасних країнах з розвитою ринковою економікою її нестійкість сприймається як істотний недолік, оскільки вона вже неодноразово приводила до важких криз. Тому з нестійкістю борються різними законодавчими й адміністративними мірами.

У випадку країни зі слаборозвиненою економікою нестійкість може сприйматися як благо, оскільки дозволяє сподіватися, при відповідних умовах, на швидкий розвиток. Однак такий розвиток буде відбуватися тільки тоді, коли початкове положення знаходиться вище рівноважного положення x^*. Якщо ж із самого початку опинитися нижче цього положення, то можна швидким способом знищити економіку.

Звернемо увагу на те, що експонентний характер росту обсягу виробництва x прямо пов'язаний з умовою сталості вільного залишку y і викликаний тим, що, при постійному вільному залишку, весь приріст обсягу виробництва йде тільки на подальше розширення виробництва

Приведені на рис. 2.2.1 графіки відносяться до випадку прибуткової економічної системи, що відповідає нерівностям $a < 1$ і $b = 1 - a > 0$. У випадку нерентабельної системи, коли виробничий коефіцієнт більше одиниці: $a > 1$, як ми знаємо, додатному значенню x відповідає від'ємний вільний залишок y. У цьому випадку буде $b = 1 - a < 0$ і $k = \nu/b < 0$. Тоді графіки залежностей $x = x(t)$ (2.2.10) приймають вид, зображений на рисунку 2.

У цьому випадку стан рівноваги системи є стійким. При будь-яких відхиленнях від цього стану система прагне повернутися в нього. Нагадаємо, однак, що ми розглядаємо збиткову систему, що існує за рахунок дотацій. Отже, її стійкість означає, що вона стабільно збиткова і пручається спробам вивести її зі збиткового стану!

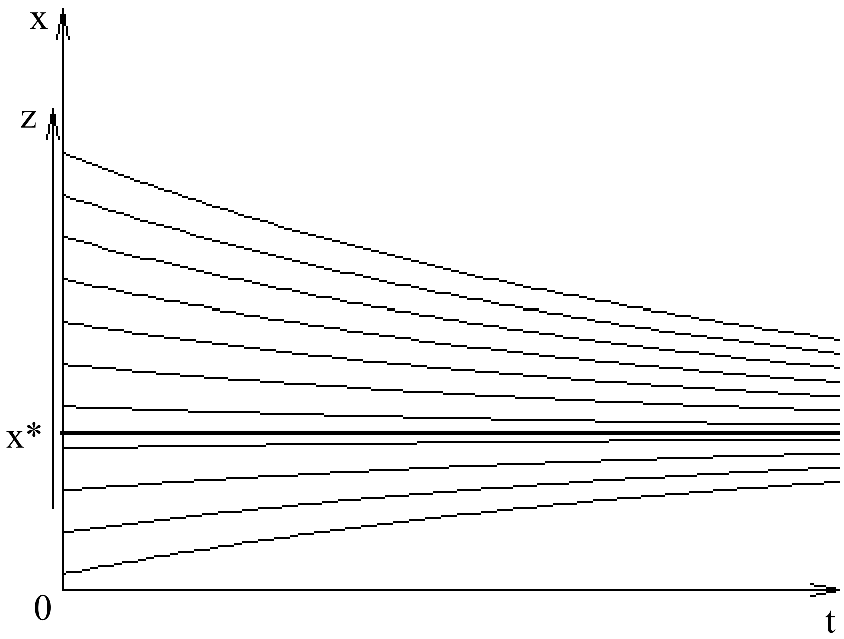

Рис. 2

Ми розглянули тільки найпростіший випадок постійних параметрів системи, одержавши вже в цьому випадку досить цікаві результати. Розгляд перемінних параметрів складніше і буде виконано далі.

2.3 Двосекторна економічна система. Динамічні рівняння

Перейдемо до рівнянь для двосекторної економічної системи. У статичних рівняннях (1.2.9) у правих частинах зазначені вільні залишки, частину яких можна направити на розширення виробництва. Врахуємо при цьому, що засоби, отримані в одному із секторів, можуть бути спрямовані для інвестицій в обох секторів. У зв'язку з цим величину y_1 заміняємо на:

$$y_1 \to y_1 + y_1' + y_1'' \tag{2.3.1}$$

Тут y_1' – інвестиції в перший сектор, а y_1'' – інвестиції в другий сектор економічної системи. Величина y_1 в правій частині задає новий (менший, чим раніше) обсяг вільних засобів. Припустимо, що швидкість росту валового продукту в першому секторі dx_1/dt пропорційна y_1':

$$y_1' = \nu_{11} \frac{dx_1}{dt} , \tag{2.3.2}$$

а швидкість росту валового продукту dx_2/dt в другому секторі пропорційна y_1'':

$$y_1'' = \nu_{12} \frac{dx_2}{dt} \tag{2.3.3}$$

Аналогічно, величину y_2 заміняємо на:

$$y_2 \to y_2 + y_2' + y_2'' \tag{2.3.4}$$

і вважаємо величину y_2' пропорційною dx_1/dt:

$$y_2' = \nu_{21} \frac{dx_1}{dt} , \tag{2.3.5}$$

а y_2'' – пропорційною dx_2/dt:

$$y_2'' = \nu_{22} \frac{dx_2}{dt} \tag{2.3.6}$$

Коефіцієнти пропорційності ν_{11}, ν_{12}, ν_{21}, ν_{22} і тут називаються коефіцієнтами фондомісткості. До них відноситься всі те, що було сказано про коефіцієнт фондомісткості у випадку односекторної економічної системи, однак тут необхідно зробити деякі зауваження. Коефіцієнти ν_{11} і ν_{21} задають фондомісткості першого сектора економічної системи. Тому можна було б очікувати їхньої рівності між собою. Так і було б при умовах однакових умов збереження і надходження інвестицій у перший сектор як з нього самого, так і з другого сектора. Однак цілком можливо, що ці умови можуть досить сильно відрізнятися. Тому, у загальному випадку, будемо вважати коефіцієнти ν_{11} і ν_{21} різними. Те ж саме відноситься і до величин ν_{12} і ν_{22}, що характеризують інвестиції в другий сектор економічної системи.

Підставляючи (2.3.2) і (2.3.3) у (2.3.1), а (2.3.5) і (2.3.6) у (2.3.4), а потім (2.3.1) і (2.3.4) у (1.2.9) одержуємо систему динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи:

$$\begin{aligned} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + y_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 &= \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + y_2 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

2.4 Розв'язок динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи

Для двосекторного динамічного випадку вирішуються ті ж дві головні задачі, що й у попередніх випадках.

Перша. При заданих залежностях:

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t) \quad (2.4.1)$$

знайти вільні залишки, задані як функції часу. Ця задача вирішується безпосередньо, за допомогою перетворення (2.3.7) до виду:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (1-a_{11})x_1(t) - a_{12}x_2(t) - \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} - \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} \\ y_2(t) &= -a_{21}x_1(t) + (1-a_{22})x_2(t) - \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} - \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Друга. Знаходження, за допомогою рішення диференціальних рівнянь (2.3.7), залежностей (2.4.1). Розглянемо це рішення. Як і в односекторному випадку, обмежимося спочатку випадком постійних параметрів системи. Економічний зміст цього такої ж, як і раніше. Повторимо коротко його опис.

Сталість виробничих коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} означає, що відносний обсяг виробничих витрат не змінюється в часі. Це можливо при стабільному функціонуванні устаткування, коли витрати на його обслуговування і ремонт не змінюються в часі. Крім того, повинні бути стабільними ціни на сировину і комплектуючі і т.д.

Сталість коефіцієнтів фондомісткості ν_{11}, ν_{12}, ν_{21}, ν_{22} зв'язана, насамперед, з таким фактором, як політична стабільність. Інвестори, що вклали засоби в розширення виробництва й чекають їхньої окупності, а потім і одержання прибутку, вправі розраховувати, що в доступному для огляду майбутньому не відбудуться такі події, що зможуть поставити під сумнів можливість подальшого розвитку виробництва, а також права власності інвестора.

Вимога сталості вільних залишків y_1, y_2 означає, що весь приріст прибутку в обох секторах йде на подальше розширення виробництва, а невиробничі витрати залишаються незмінними. Таке тверде обмеження характерне для початкової стадії розвитку; воно необхідно для підтримки найвищих темпів розвитку.

З урахуванням зроблених припущень відшукуємо спочатку стаціонарне рішення, що відповідає постійним значенням x_1^* і x_2^*. Похідні від констант дорівнюють нулю і динамічні рівняння перетворюються в статичні:

$$\begin{aligned} &(1-a_{11})x_1^* - a_{12}x_2^* = y_1 \\ &-a_{21}x_1^* + (1-a_{22})x_2^* = y_2 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Їхнє рішення, відповідно до (1.2.12), буде:

$$x_1^* = \frac{y_1(1-a_{22}) + y_2 a_{12}}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}, \; x_2^* = \frac{y_1 a_{21} + y_2(1-a_{11})}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}} \tag{2.4.4}$$

Це рішення задає особливу точку на фазовій площині x_1, x_2. Перенесемо початок координат у цю точку (рис. 3), виконавши заміну:

$$x_1 = x_1^* + z_1, \; x_2 = x_2^* + z_2 \tag{2.4.5}$$

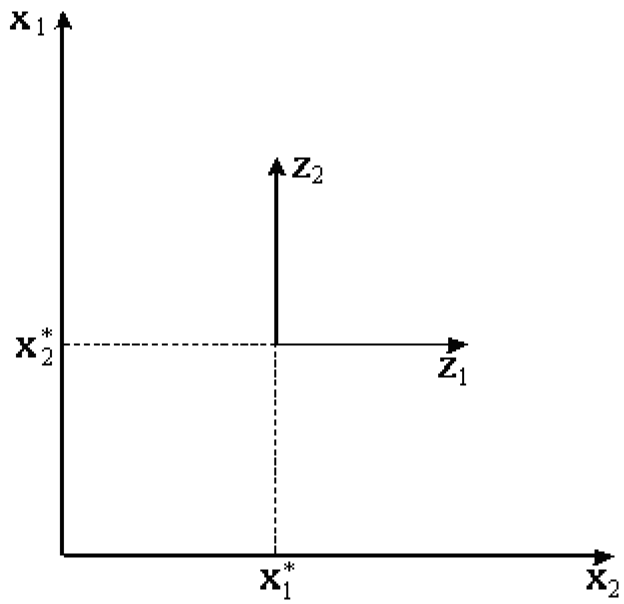

Рис.3

Підставимо (2.4.5) у (2.3.7). З урахуванням рівностей:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt}, \; \frac{dx_2}{dt} = \frac{dz_2}{dt} \;, \tag{2.4.6}$$

справедливих при постійних $x_1^*,\ x_2^*$, одержуємо:

$$
\begin{aligned}
&(1-a_{11})x_1^* + (1-a_{11})z_1 - a_{12}x_2^* - a_{12}z_2 = \nu_{11}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dz_2}{dt} + y_1 \\
&-a_{21}x_1^* - a_{21}z_1 + (1-a_{22})x_2^* + (1-a_{22})z_2 = \nu_{21}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dz_2}{dt} + y_2
\end{aligned}
\tag{2.4.7}
$$

У силу (2.4.3) доданки з зірочками в лівих частинах рівнянь скорочуються з вільними залишками в правих частинах. У підсумку ми приходимо до однорідних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&(1-a_{11})z_1 - a_{12}z_2 = \nu_{11}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dz_2}{dt} \\
&-a_{21}z_1 + (1-a_{22})\frac{dz_2}{dt} = \nu_{21}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dz_2}{dt}
\end{aligned}
\tag{2.4.8}
$$

Перетворимо цю систему рівнянь до виду, розв'язаному відносно похідних:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz_1}{dt} = \frac{[(1-a_{11})\nu_{22} + a_{21}\nu_{12}]z_1 - [(1-a_{22})\nu_{12} + a_{12}\nu_{22}]z_2}{\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}} \\
&\frac{dz_2}{dt} = \frac{-[(1-a_{11})\nu_{21} + a_{21}\nu_{11}]z_1 + [(1-a_{22})\nu_{11} + a_{12}\nu_{21}]z_2}{\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}}
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

Зрозуміло, це можливо тільки при нерівній нулю величині $\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}$.

Розшукуємо рішення цих рівнянь у виді:

$$
z_1 = A_1 e^{kt},\ z_2 = A_2 e^{kt}
\tag{2.4.10}
$$

Підставляючи (2.4.10) у (2.4.9) і скорочуючи на загальний множник e^{kt} приходимо до рівнянь щодо амплітуд $A_1,\ A_2$:

$$
\begin{aligned}
&[(1-a_{11})\nu_{22} + a_{21}\nu_{12} - k(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})]A_1 - [(1-a_{22})\nu_{12} + a_{12}\nu_{22}]A_2 = 0 \\
&-[(1-a_{11})\nu_{21} + a_{21}\nu_{11}]A_1 + [(1-a_{22})\nu_{11} + a_{12}\nu_{21} - k(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})]A_2 = 0
\end{aligned}
\tag{2.4.11}
$$

Для того щоб ця система однорідних алгебраїчних рівнянь мала нетривіальне ненульове рішення, дорівняємо до нуля її визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1-a_{11})\nu_{22} + a_{21}\nu_{12} - k(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}) & -[(1-a_{22})\nu_{12} + a_{12}\nu_{22}] \\ -[(1-a_{11})\nu_{21} + a_{21}\nu_{11}] & (1-a_{22})\nu_{11} + a_{12}\nu_{21} - k(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}) \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваючи цей визначник і приводячи подібні по однакових степенях k одержуємо характеристичне рівняння:

$$e_0 k^2 - e_1 k + e_2 = 0 \qquad (2.4.12)$$
$$e_0 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21},\ e_1 = (1-a_{11})\nu_{22} + (1-a_{22})\nu_{11} + a_{12}\nu_{21} + a_{21}\nu_{12}$$
$$e_2 = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

Це характеристичне рівняння має два корені:

$$k_{1,2} = \frac{e_1 \pm \sqrt{D}}{2e_0},\ D = e_1^2 - 4e_0 e_2 \qquad (2.4.13)$$

Вивчимо докладніше величину дискримінанта D. У відповідності зі значеннями коефіцієнтів рівняння (2.4.12) маємо:

$$\begin{aligned} D = {} & [(1-a_{11})\nu_{22} + (1-a_{22})\nu_{11} + a_{12}\nu_{21} + a_{21}\nu_{12}]^2 - \qquad (2.4.14)\\ & -4(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})[(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}] = \\ & = (1-a_{11})^2\nu_{22}^2 + (1-a_{22})^2\nu_{11}^2 + a_{12}^2\nu_{21}^2 + a_{21}^2\nu_{12}^2 + 2(1-a_{11})(1-a_{22})\nu_{11}\nu_{22} + \\ & + 2(1-a_{11})a_{12}\nu_{22}\nu_{21} + 2(1-a_{11})a_{21}\nu_{22}\nu_{12} + 2(1-a_{22})a_{12}\nu_{11}\nu_{21} + \\ & + 2(1-a_{22})a_{21}\nu_{11}\nu_{12} + 2a_{12}a_{21}\nu_{21}\nu_{12} - 4\nu_{11}\nu_{22}(1-a_{11})(1-a_{22}) + \\ & + 4\nu_{11}\nu_{22}a_{12}a_{21} + 4\nu_{12}\nu_{21}(1-a_{11})(1-a_{22}) - 4\nu_{12}\nu_{21}a_{12}a_{21} = \\ & = (1-a_{11})^2\nu_{22}^2 - 2(1-a_{11})(1-a_{22})\nu_{11}\nu_{22} + (1-a_{22})^2\nu_{11}^2 + \\ & + a_{12}^2\nu_{21}^2 - 2a_{12}a_{21}\nu_{21}\nu_{12} + a_{21}^2\nu_{12}^2 + 2(1-a_{11})a_{12}\nu_{22}\nu_{21} + \\ & + 2(1-a_{11})a_{21}\nu_{22}\nu_{12} + 2(1-a_{22})a_{12}\nu_{11}\nu_{21} + 2(1-a_{22})a_{21}\nu_{11}\nu_{12} + \\ & + 4\nu_{11}\nu_{22}a_{12}a_{21} + 4\nu_{12}\nu_{21}(1-a_{11})(1-a_{22}) = \\ & = [(1-a_{11})\nu_{22} - (1-a_{22})\nu_{11}]^2 + (a_{12}\nu_{21} - a_{21}\nu_{12})^2 + 2(1-a_{11})a_{12}\nu_{22}\nu_{21} + \\ & + 2(1-a_{11})a_{21}\nu_{22}\nu_{12} + 2(1-a_{22})a_{12}\nu_{11}\nu_{21} + 2(1-a_{22})a_{21}\nu_{11}\nu_{12} + \\ & + 4\nu_{11}\nu_{22}a_{12}a_{21} + 4\nu_{12}\nu_{21}(1-a_{11})(1-a_{22}) > 0 \end{aligned}$$

За допомогою очевидних перегрупувань ми одержали вираження для дискримінанта, у якому від'ємними можуть бути тільки доданки, що містять вираження $1-a_{11}$ і $1-a_{22}$. Припускаючи, що ці вираження невід'ємні, що відповідає виробничим витратам кожного сектора, які не перевищують обсяг виробництва в секторі, одержуємо, що і весь дискримінант є невід'ємним. Отже, обидва корені характеристичного рівняння є дійсними.

Розглянемо знаки коренів. Величина e_1 є додатною; величини e_0 і e_2 можуть бути як додатними, так і від'ємними. Якщо $e_0 e_2 > 0$, то справедлива нерівність:

$$\sqrt{D} = \sqrt{e_1^2 - 4e_0 e_2} < e_1 \tag{2.4.15}$$

У цьому випадку одержуємо, що вираження, що стоїть в знаменнику дробу (2.4.13) додатне при будь-якому знаку перед радикалом; отже, обидва корені мають однаковий знак – додатний при $e_0 > 0$ і від'ємний при $e_0 < 0$.

Якщо $e_0 e_2 < 0$, то буде:

$$\sqrt{D} = \sqrt{e_1^2 - 4e_0 e_2} > e_1 \tag{2.4.16}$$

У цьому випадку знаменник у дробі (2.4.13) додатний при знаку + перед радикалом і від'ємний при знаку –. Отже, корені мають протилежні знаки.

Повернемося до рівнянь (2.4.11). При підстановці в них одного зі значень k, рівного k_1 чи k_2, визначник системи звертається в нуль; отже, рівняння стають лінійно залежними. Це означає, що варто розглядати тільки одне з рівнянь, наприклад, перше, оскільки друге є його копією (з точністю до деякого загального множника).

Підставляючи в перше з рівнянь (2.4.11) $k = k_1$ знаходимо відповідне співвідношення між амплітудами:

$$A_{21} = \alpha_1 A_{11},\ \alpha_1 = \frac{(1 - a_{11})\nu_{22} + a_{21}\nu_{12} - k_1(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})}{(1 - a_{22})\nu_{12} + a_{12}\nu_{22}} \tag{2.4.17}$$

При $k = k_2$ буде:

$$A_{22} = \alpha_2 A_{12},\ \alpha_2 = \frac{(1 - a_{11})\nu_{22} + a_{21}\nu_{12} - k_2(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})}{(1 - a_{22})\nu_{12} + a_{12}\nu_{22}} \tag{2.4.18}$$

Тут амплітуди A_1 і A_2 придбали по другому індексу, рівному відповідному індексу в корені k.

Загальне рішення однорідної системи диференціальних рівнянь (2.4.8) буде мати вид:

$$\begin{gathered} z_1 = A_{11}e^{k_1 t} + A_{12}e^{k_2 t} \\ z_2 = A_{21}e^{k_1 t} + A_{22}e^{k_2 t} = \alpha_1 A_{11}e^{k_1 t} + \alpha_2 A_{12}e^{k_2 t} \end{gathered} \tag{2.4.19}$$

Загальне рішення вихідної неоднорідної системи рівнянь (2.3.7) буде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* + A_{11}e^{k_1 t} + A_{12}e^{k_2 t} \\ x_2 &= x_2^* + \alpha_1 A_{11}e^{k_1 t} + \alpha_2 A_{12}e^{k_2 t} \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Для знаходження постійних інтегрування A_{11} і A_{12} скористаємося заданими в момент часу $t_0 = 0$ початковими значеннями x_{10}, x_{20}. З (2.4.20) при $t = 0$ одержуємо:

$$\begin{aligned} x_{10} - x_1^* &= A_{11} + A_{12} \\ x_{20} - x_2^* &= \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Звідси:

$$A_{11} = \frac{x_{20} - x_2^* - \alpha_2\left(x_{10} - x_1^*\right)}{\alpha_1 - \alpha_2}, \; A_{12} = \frac{x_{20} - x_2^* - \alpha_1\left(x_{10} - x_1^*\right)}{\alpha_2 - \alpha_1} \tag{2.4.22}$$

Рішення в загальному виді цілком завершено. Розглянемо деякі графічні ілюстрації отриманих результатів з використанням фазової площини x_1, x_2.

При $e_2 > 0$ система є, як правило, рентабельною, як це було показано в розділі 1.2. Це означає, що додатним значенням x_1, x_2 відповідають і додатні вільні залишки y_1, y_2 і навпаки. Нехай при цьому буде $e_0 > 0$. Як ми показали вище, при цьому обидва корені характеристичного рівняння додатні і фазова площина в околі статичного положення системи має вид, зображений на рисунку 4. Статичне положення є особливою точкою типу хитливого вузла.

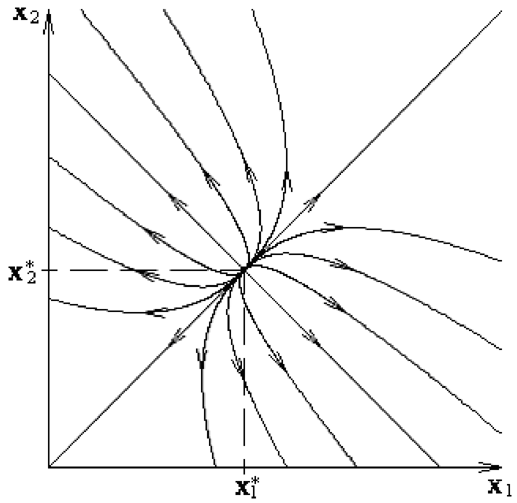

Рис. 4

При $e_0 < 0$ корені мають протилежні знаки і фазова площина має вид, зображений на рис. 2.4.3. Тепер статичне положення системи є особливою точкою типу сідло.

Розглянемо ці результати докладніше. В обох випадках статичні положення хитливі. Будь-які початкові відхилення від них надалі необмежено зростають. Проте, ці нестійкості істотно відрізняються друг від друга. У першому випадку (рис. 4) відхід від положення рівноваги системи майже завжди супроводжується зменшенням, аж до від ємних значень, обох чи однієї з величин x_1, x_2. Одночасний ріст x_1, x_2 можливий у єдиному випадку; найменше відхилення від відповідної лінії неминуче приводить надалі до зменшення однієї з цих величин. Таким чином, у цьому випадку забезпечити розвиток системи практично неможливо.

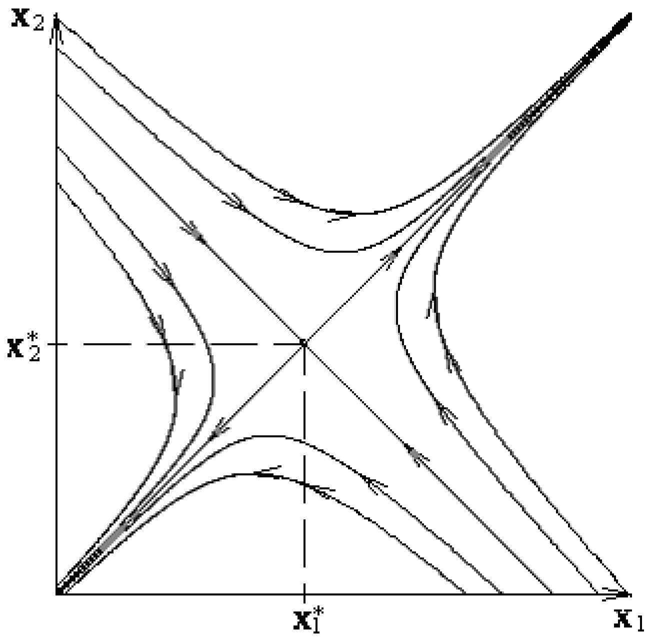

Рис.5

В другому випадку (рис. 5) зменшення x_1, x_2 відбувається тільки при старті з деякого околу початку координат. В усіх інших випадках ми бачимо одночасний ріст цих величин, тобто обсягів виробництва в обох секторах. Таким чином, ми бачимо, що явно краще ситуація з $e_0 < 0$. Чим же відрізняються розглянуті випадки?

При $e_0 > 0$, відповідно до (2.4.12), переважає добуток коефіцієнтів фондомісткості $\nu_{11}\nu_{22}$ над добутком коефіцієнтів фондомісткості $\nu_{12}\nu_{21}$. Це значить, що строки окупності власних інвестицій у сектори економічної системи більші, ніж строки окупності перехресних інвестицій секторів друг у друга. Кожний із секторів воліє витрачати, у першу чергу, «чужі» засоби, а не свої. Як бачимо, це приводить до неминучого руйнування одного чи обох секторів.

При $e_0 < 0$ маємо зворотну картину. Переважає добуток коефіцієнтів фондомісткості $\nu_{12}\nu_{21}$ над коефіцієнтами фондомісткості $\nu_{11}\nu_{22}$. Отже, кожний із секторів швидше окупає власні інвестиції, чим інвестиції із сусіднього сектора. Саме це забезпечує зростання виробництва в обох секторах (при вдало підібраних початкових умовах).

При $e_2 < 0$ система, як правило, нерентабельна, тобто додатні значення обсягів виробництва x_1, x_2 можливі тільки при від'ємних вільних залишках y_1, y_2, тобто при одержанні дотацій обома секторами. При цьому знову розглянемо обидва значення знаків величини e_0.

При $e_0 > 0$ одержуємо картину, зображену на рисунку 6. Кореням протилежного знака відповідає особлива точка типу сідло. Перевага «чужих» інвестиціям у порівнянні з «своїми» приводить до гарантованого руйнування одного із секторів.

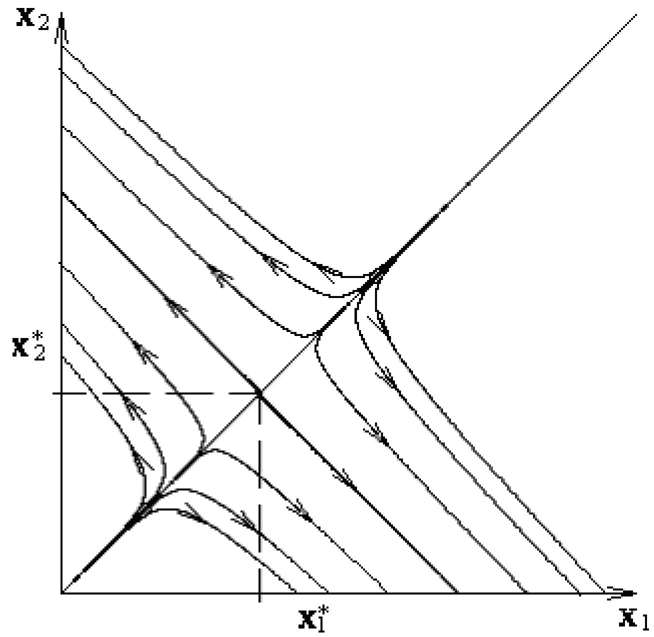

Рис.6

Результат, що відповідає $e_0 < 0$, зображений на рисунку 7. Тут одержуємо стійкий вузол, що відповідає двом від'ємним кореням. Ця стійкість досить цікава. Як ми пам'ятаємо, система суттєво збиткова; обидва сектори мають потребу в дотаціях. Стійкість, у цьому випадку, означає, що система пручається всяким спробам розвитку. Однак, усе-таки, вона, принаймні, здатна функціонувати без погіршення показників.

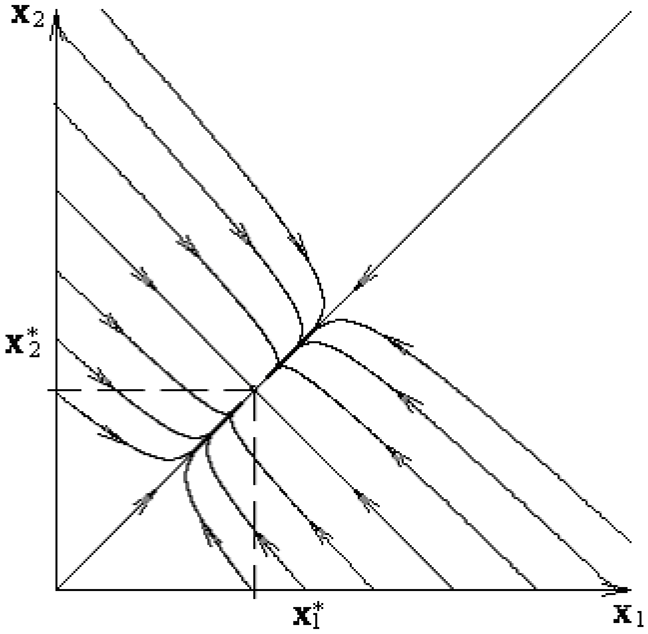

Рис.7

Ми бачимо, що у всіх розглянутих випадках кращі результати дає опора, у першу чергу, на інвестування з власних, а не запозичених джерел.

Ми розглянули далеко не усі варіанти, що можуть описувати лінійні рівняння Леонтьєва для двосекторної економічної системи, однак і вже отримані результати показують, що ці рівняння здатні виявляти важливі економічні ефекти.

2.5 Особливий випадок розв'язку динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи

У попередньому параграфі був проаналізований випадок, коли коефіцієнти фондомісткості, при інвестуванні одного й того ж сектора, відрізняються в залежності від джерела фінансування. Математично це відбивалося в нерівності нулю величини $e_0 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}$. Розглянемо більш очевидний випадок, коли засоби, отримані в обох секторах, зберігаються в однакових умовах, наприклад, у тому самому банку, у силу чого при інвестуванні того чи іншого сектора не має значення, з якого сектора надійшли гроші.

Нагадаємо, що інвестування першого сектора відбивають коефіцієнти фондомісткості ν_{11} і ν_{21}. Будемо вважати їх рівними, вважаючи:

$$\nu_{11} = \nu_{21} = \nu_1 \tag{2.5.1}$$

Інвестування другого сектора відбивають коефіцієнти ν_{12} і ν_{22}. Будемо вважати рівними між собою і їх:

$$\nu_{12} = \nu_{22} = \nu_2 \tag{2.5.2}$$

Тепер величина e_0 стає рівною нулю:

$$e_0 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21} = \nu_1\nu_2 - \nu_2\nu_1 = 0 , \qquad (2.5.3)$$

а система рівнянь (2.4.8) приймає вид:

$$\begin{aligned} (1-a_{11})z_1 - a_{12}z_2 &= \nu_1\frac{dz_1}{dt} + \nu_2\frac{dz_2}{dt} \\ -a_{21}z_1 + (1-a_{22})z_2 &= \nu_1\frac{dz_1}{dt} + \nu_2\frac{dz_2}{dt} \end{aligned} \qquad (2.5.4)$$

У цьому випадку, на відміну від попереднього параграфа, неможливо розв’язати рівняння відносно похідних, тобто привести їх до виду, подібному (2.4.9). Зробимо тут у такий спосіб. Користаючись однаковістю правих частин рівнянь (2.5.4) віднімемо друге рівняння з першого і замінимо друге з рівнянь на результат, що вийшов, приходячи до наступної системі:

$$\begin{aligned} &(1-a_{11})z_1 - a_{12}z_2 = \nu_1\frac{dz_1}{dt} + \nu_2\frac{dz_2}{dt} \\ &(1-a_{11}+a_{21})z_1 - (1-a_{22}+a_{12})z_2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.5.5)$$

Друге з рівнянь (2.5.5) вийшло статичним; воно встановлює однозначний зв'язок між z_1 і z_2:

$$z_2 = \alpha z_1, \ \alpha = \frac{1-a_{11}+a_{21}}{1-a_{22}+a_{12}} \qquad (2.5.6)$$

Підставляючи (2.5.6) у перше з рівнянь (2.5.5) одержуємо:

$$kz_1 = \frac{dz_1}{dt}, \ k = \frac{1-a_{11}-a_{12}\alpha}{\nu_1+\nu_2\alpha} \qquad (2.5.7)$$

Рішення рівняння (2.5.7) буде:

$$z_1 = z_{10}e^{kt} , \qquad (2.5.8)$$

де z_{10} – початкове (при $t = 0$) значення z_1. З (2.5.6) маємо:

$$z_2 = \alpha z_{10}e^{kt} \qquad (2.5.9)$$

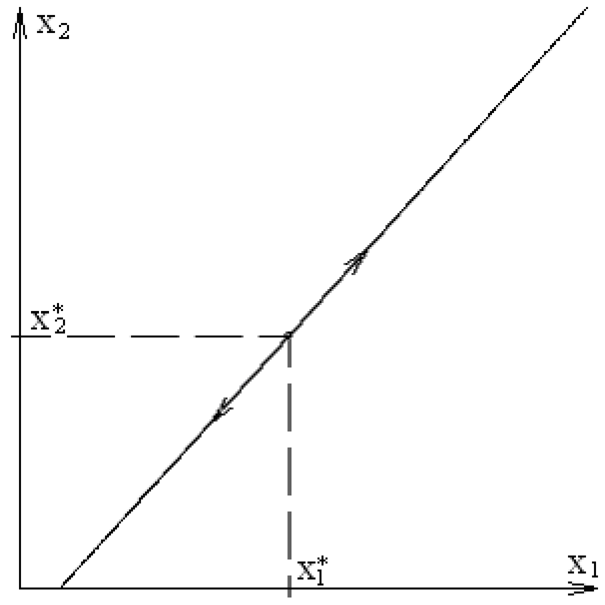

Рис.7

Таким чином, у даному випадку розвиток обох секторів однозначно пов'язаний між собою, чого не було при $e_0 \neq 0$. Величина k може бути як додатною, так і від'ємною; відповідно до цього положення рівноваги буде стійким при $k < 0$ і хитливим при $k > 0$. На рисунку 7 зображена фазова площина при $k > 0$, а на рисунку 8 – при $k < 0$.

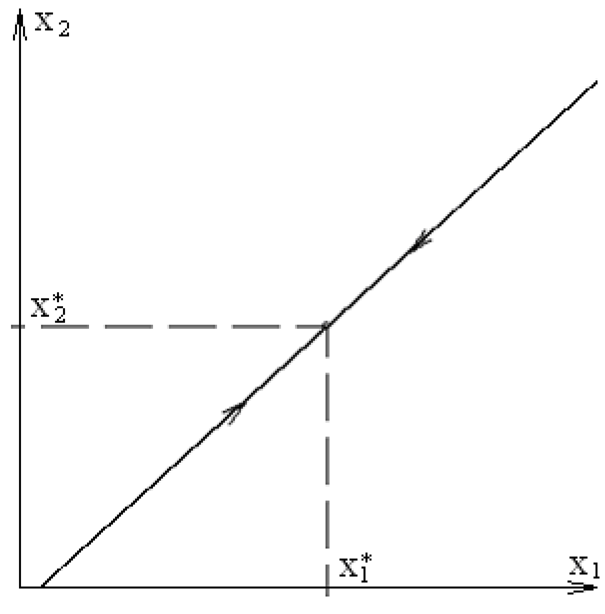

Рис.8

Як і в загальному випадку, нестійкість відповідає прибутковій економічній системі, а стійкість – збиткової.

2.6 Динамічні рівняння для випадку довільної кількості секторів

Після докладного вивчення структури динамічних рівнянь у випадку двосекторної економічної системи нескладно узагальнити результати на економічну систему з довільною кількістю секторів.

Нехай система має n секторів. Позначимо, як і колись, обсяги випусків продукції в секторах через $x_1,\ x_2,...,x_n$, а величини вільних залишків через $y_1,\ y_2,...,y_n$. Кожний із секторів забезпечує як власне відтворення, так і відтворення всіх інших секторів. Як і в статичному випадку, обсяг виробничих витрат, спрямованих із сектора номер i в сектор номер j, дорівнює $a_{ij}x_j$. Крім того, кожен сектор інвестує власний розвиток і розвиток інших секторів. Обсяг інвестицій із сектора номер i в сектор номер j дорівнює:

$$y_{ij} = \nu_{ij}\frac{dx_j}{dt} \tag{2.6.1}$$

Вираження (2.6.1) показує, що швидкість росту обсягу виробництва в секторі номер j , тобто величина dx_j/dt, вважається пропорційної обсягу інвестицій. Коефіцієнт пропорційності ν_{ij} називається коефіцієнтом фондомісткості. Він дорівнює часу окупності інвестицій, спрямованих із сектора номер i в сектор номер j.

З урахуванням вищесказаного одержуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n = \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + ... + \nu_{1n}\frac{dx_n}{dt} + y_1 \quad (2.6.2)\\
&-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - ... - a_{2n}x_n = \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + ... + \nu_{2n}\frac{dx_n}{dt} + y_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... + (1-a_{nn})x_n = \nu_{n1}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{n2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \nu_{nn}\frac{dx_n}{dt} + y_n
\end{aligned}$$

Складемо, на основі цих рівнянь, більш компактну матричну форму їхнього запису. З цією метою введемо в розгляд наступні матриці і вектора:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},\ \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ ... \\ \dot{x}_n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6.3}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \dots & \nu_{1n} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \dots & \nu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_{n1} & \nu_{n2} & \dots & \nu_{nn} \end{pmatrix}$$

Вектора X і Y, а також матриці E і A мають той же зміст, що й у статичному випадку. Вектор $\dot{X}$ задає швидкості зміни обсягів виробництва в секторах. Матриця N називається матрицею фондомісткості. З використанням цих матриць і векторів можна записати одне матричне рівняння:

$$(E-A)X=N\dot{X}+Y\ , \tag{2.6.4}$$

еквівалентне системі рівняння (2.6.2).

2.7 Розв’язок динамічних рівнянь у загальному випадку

Як і у всіх попередніх випадках, розглядаються дві основні задачі.

Перша. При відомих залежностях:

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\dots,x_n=x_n(t) \tag{2.7.1}$$

знайти вільні залишки як функції часу. Ця задача вирішується безпосередньо, за допомогою перетворення (2.6.2) до виду:

$$y_1(t)=(1-a_{11})x_1(t)-a_{12}x_2(t)-\dots-a_{1n}x_n(t)-\nu_{11}\frac{dx_1}{dt}-\nu_{12}\frac{dx_2}{dt}-\dots-\nu_{1n}\frac{dx_n}{dt} \tag{2.7.2}$$

$$y_2(t)=-a_{21}x_1(t)+(1-a_{22})x_2(t)-\dots-a_{2n}x_n(t)-\nu_{21}\frac{dx_1}{dt}-\nu_{22}\frac{dx_2}{dt}-\dots-\nu_{2n}\frac{dx_n}{dt}$$

. . . .

$$y_n(t)=-a_{n1}x_1(t)-a_{n2}x_2(t)-\dots+(1-a_{nn})x_n(t)-\nu_{n1}\frac{dx_1}{dt}-\nu_{n2}\frac{dx_2}{dt}-\dots-\nu_{nn}\frac{dx_n}{dt}$$

Друга. Знаходження, за допомогою рішення диференціальних рівнянь (2.6.2), залежностей (2.7.1). Як і в попередніх випадках, обмежимося спочатку випадком постійних параметрів системи. Повторимо коротко зміст такого припущення з економічної точки зору.

Сталість виробничих коефіцієнтів, тобто компонент матриці A (2.6.3) означає, що відносний обсяг виробничих витрат не змінюється в часі. Це можливо при стабільному функціонуванні устаткування, коли витрати на його обслуговування і ремонт не змінюються в часі. Крім того, повинні бути стабільними ціни на сировину і комплектуючі і т.п.

Сталість коефіцієнтів фондомісткості, тобто компонент матриці N (2.6.3) пов'язана, насамперед, з політичною стабільністю. Інвестори, що вклали засоби в розширення виробництва й чекають їхньої окупності, а потім і одержання прибутку, вправі розраховувати, що в доступному для огляду майбутньому не відбудуться такі події, що зможуть поставити під сумнів можливість подальшого розвитку виробництва, а також права власності інвестора.

Вимога сталості вільних залишків $y_1,\ y_2,...,y_n$ означає, що весь приріст прибутку у всіх секторах йде на подальше розширення виробництва, а невиробничі витрати залишаються незмінними. Таке тверде обмеження характерне для початкової стадії розвитку; воно необхідно для підтримки найвищих темпів розвитку.

Рішення, у довільному випадку, найбільше зручно робити за допомогою матричного рівняння (2.6.4). Спочатку відшукуємо стаціонарне рішення, що відповідає постійним значенням $x_1,\ x_2,...,x_n$. Похідні від констант дорівнюють нулю, отже вектор $\dot{X}$ має усі компоненти рівними нулю і динамічне рівняння перетворюється в статичне:

$$(E - A)X = Y \tag{2.7.3}$$

Рішення такого рівняння вже розглядалося раніше при вивченні статичних рівнянь Леонтьєва; при цьому одержуємо:

$$\begin{aligned} &X^* = (E - A)^{-1} Y \\ &\tilde{X}^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,...,x_n^*\right) \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Далі виконуємо заміну:

$$\begin{aligned} &X = X^* + Z \\ &\tilde{Z} = (z_1,\ z_2,...,z_n) \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Компоненти вектора Z – це відхилення шуканих величин, тобто компонент вектора X, від рівноважних значень (компонент вектора X^*).

Підставляючи (2.7.5) у (2.6.4) одержуємо:

$$\begin{aligned} &(E - A)(X^* + Z) = N\dot{Z} + Y \quad \Leftrightarrow \quad (E - A)X^* + (E - A)Z = N\dot{Z} + Y \\ &\tilde{\dot{Z}} = (\dot{z}_1,\ \dot{z}_2,...,\dot{z}_n) \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Перший доданок у лівій частині скорочується, у силу (2.7.3), із другим доданком у правій частині; у підсумку приходимо до однорідного рівняння:

$$(E - A)Z = N\dot{Z} \tag{2.7.7}$$

Припускаючи, що матриця фондомісткості N має зворотну, знайдемо цю зворотну матрицю N^{-1} і помножимо рівність (2.7.7) ліворуч на N^{-1}, одержуючи:

$$DZ = \dot{Z}, \quad D = N^{-1}(E - A) \tag{2.7.8}$$

Інакше кажучи, ми розв’язали систему рівнянь відносно похідних, як це робилося (у розгорнутому виді) у випадку двосекторної економічної системи.

Рішення матричного рівняння (2.7.8) розшукуємо у виді:

$$Z = Be^{kt}, \quad \tilde{B} = (b_1,\ b_2, ..., b_n) \tag{2.7.9}$$

Ми припускаємо, що всі шукані функції $z_1,\ z_2, ..., z_n$ змінюються в часі по однаковому експонентному законі, відрізняючи тільки множниками $b_1,\ b_2, ..., b_n$. Звідси:

$$\dot{Z} = kBe^{kt} \tag{2.7.10}$$

Підставляючи (2.7.9) і (2.7.10) у (2.7.8) одержуємо, після скорочення на e^{kt}:

$$DB = kB \tag{2.7.11}$$

Ми прийшли до задачі про пошук власних чисел k і власних векторів B заданої матриці D. Алгоритми рішення цієї задачі добре відомі. Вони вивчалися, зокрема, у курсі «Теорія алгоритмів і обчислювальних процесів». Тому будемо вважати, що рішення даної задачі відомо; у результаті виконання відповідної процедури одержуємо n власних чисел:

$$k_1,\ k_2, ..., k_n \tag{2.7.12}$$

і відповідних n власних векторів:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{n1} \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ ... \\ b_{n2} \end{pmatrix}, ..., B_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ ... \\ b_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.7.13}$$

І власні числа, і власні вектора будуть, у загальному випадку, комплексними. Зрозуміло, вони можуть бути і дійсними, але ми розглянемо загальну процедуру, що приводить до правильних результатів у будь-якому випадку. З цією метою будемо вважати усі величини комплексними, тому що дійсні числа є частковим випадком комплексних. Нагадаємо, при цьому, що кожен із власних векторів визначений з точністю до довільного загального множника, який також будемо вважати комплексним. Позначимо ці множники в такий спосіб:

$$e_1,\ e_2,\ldots,e_n \tag{2.7.14}$$

Власному числу номер m відповідає часткове рішення шуканого виду:

$$z_{1m} = e_m b_{1m} e^{k_m t},\ z_{2m} = e_m b_{2m} e^{k_m t},\ldots,z_{nm} = e_m b_{nm} e^{k_m t} \quad (m = 1,\ldots,n) \tag{2.7.15}$$

Загальне рішення вихідної системи рівнянь, представленої у виді одного матричного рівняння (2.7.8), дорівнює сумі всіх таких часткових рішень:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{11} + z_{12} + \ldots + z_{1n} = e_1 b_{11} e^{k_1 t} + e_2 b_{12} e^{k_2 t} + \ldots + e_n b_{1n} e^{k_n t} \\ z_2 &= z_{21} + z_{22} + \ldots + z_{2n} = e_1 b_{21} e^{k_1 t} + e_2 b_{22} e^{k_2 t} + \ldots + e_n b_{2n} e^{k_n t} \\ &\ldots \\ z_n &= z_{n1} + z_{n2} + \ldots + z_{nn} = e_1 b_{n1} e^{k_1 t} + e_2 b_{n2} e^{k_2 t} + \ldots + e_n b_{nn} e^{k_n t} \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Повертаючись, за допомогою (2.7.5), до компонентів вектора X, одержуємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* + z_1 = x_1^* + e_1 b_{11} e^{k_1 t} + e_2 b_{12} e^{k_2 t} + \ldots + e_n b_{1n} e^{k_n t} \\ x_2 &= x_2^* + z_2 = x_2^* + e_1 b_{21} e^{k_1 t} + e_2 b_{22} e^{k_2 t} + \ldots + e_n b_{2n} e^{k_n t} \\ &\ldots \\ x_n &= x_n^* + z_n = x_n^* + e_1 b_{n1} e^{k_1 t} + e_2 b_{n2} e^{k_2 t} + \ldots + e_n b_{nn} e^{k_n t} \end{aligned} \tag{2.7.17}$$

Це рішення містить n довільних постійних: $e_1,\ e_2,\ldots,e_n$. Для знаходження цих постійних використовуємо початкові умови, тобто задані в початковий момент часу $t_0 = 0$ значення шуканих функцій:

$$x_{10},\ x_{20},\ldots,x_{n0} \tag{2.7.18}$$

Підставляючи (2.7.18) у (2.7.17) одержуємо:

$$b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \ldots + b_{1n}e_n = x_{10} - x_1^* \tag{2.7.19}$$

$$b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + ... + b_{2n}e_n = x_{20} - x_2^*$$
$$. \quad .$$
$$b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + ... + b_{nn}e_n = x_{n0} - x_n^*$$

Перетворимо дану систему рівнянь до матричної форми. З цією метою введемо в розгляд наступні матрицю і вектори:

$$U = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}, \; e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix}, \; X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} - x_1^* \\ x_{20} - x_2^* \\ ... \\ x_{n0} - x_n^* \end{pmatrix}, \quad (2.7.20)$$

одержуючи, замість (2.7.19):

$$Ue = X_0 \quad (2.7.21)$$

Рішення матричного рівняння (2.7.21) знаходимо у виді:

$$e = U^{-1}X_0 \, , \quad (2.7.22)$$

де U^{-1} – матриця, зворотна до U. Відзначимо, що в даному випадку пошук цієї матриці не викликає додаткових труднощів. Справа в тім, що алгоритм пошуку власних чисел і векторів матриці D (задача 2.7.11) побудований таким чином, що поряд з матрицею U, що містить своїми стовпцями шукані власні вектора матриці D, одночасно знаходиться і зворотна їй матриця U^{-1}. Таким чином, задачу пошуку вектора e, компонентами якого є шукані константи інтегрування, можна вважати цілком закінченою. Тим самим закінчується і рішення системи рівнянь (2.6.2).

Ми не будемо розглядати, у даному випадку, конкретні приклади обчислень на основі отриманого алгоритму через занадто велику розмаїтість можливих результатів. Реалізація даного алгоритму на комп'ютері може бути темою самостійної роботи для студентів і магістрів, що навчаються за фахом «Програмне забезпечення автоматизованих систем».

Відзначимо, однак, що досвід рішення відповідних задач показує, що в більшості випадків ми має результати, подібні тим, що були отримані в двосекторному випадку. Положення рівноваги, як правило, є хитливим, тобто система прагне віддалитися від нього зі зростанням часу.

2.8 Особливий випадок розв'язку динамічних рівнянь при довільній кількості секторів

У попередньому розділі рішення рівнянь (2.6.2) істотно спиралося на припущення про існування матриці N^{-1}, зворотної до матриці N. Однак це припущення зовсім не очевидне. Більш того, як це вже було показано у випадку двосекторної економічної системи, більш природним є випадок, коли визначник матриці N дорівнює нулю і, отже, зворотної матриці N^{-1} не існує.

Розглянемо питання докладніше. Запишемо матричне рівняння (2.7.7) у розгорнутому виді:

$$
\begin{aligned}
&(1-a_{11})z_1 - a_{12}z_2 - \ldots - a_{1n}z_n = \nu_{11}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dz_2}{dt} + \ldots + \nu_{1n}\frac{dz_n}{dt} \\
&-a_{21}z_1 + (1-a_{22})z_2 - \ldots - a_{2n}z_n = \nu_{21}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dz_2}{dt} + \ldots + \nu_{2n}\frac{dz_n}{dt} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&-a_{n1}z_1 - a_{n2}z_2 - \ldots + (1-a_{nn})z_n = \nu_{n1}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{n2}\frac{dz_2}{dt} + \ldots + \nu_{nn}\frac{dz_n}{dt}
\end{aligned}
\qquad (2.8.1)
$$

Вивчимо величини коефіцієнтів фондомісткості. Коефіцієнти $\nu_{11}, \nu_{21}, \ldots, \nu_{n1}$ відносяться до інвестування першого сектора. Тому можна припустити, що в більшості випадків ці коефіцієнти рівні між собою:

$$\nu_{11} = \nu_{21} = \ldots = \nu_{n1} = \nu_1 \qquad (2.8.2)$$

Це означає, що час окупності інвестицій у перший сектор не залежить від джерела, з якого надходять інвестиції – з першого сектора, із другого сектора, і т.д. В умовах сучасної банківської системи, коли надходження з усіх секторів економічної системи зберігаються в однакових умовах, таке припущення дуже правдоподібне.

Аналогічно, коефіцієнти $\nu_{12}, \nu_{22}, \ldots, \nu_{n2}$ описують інвестиції в другий сектор. Будемо вважати і їх рівними між собою:

$$\nu_{12} = \nu_{22} = \ldots = \nu_{n2} = \nu_2 \qquad (2.8.3)$$

Точно так само будемо міркувати і для всіх інших секторів, зокрема для останнього сектора номер n маємо:

$$\nu_{1n} = \nu_{2n} = \ldots = \nu_{nn} = \nu_n \qquad (2.8.4)$$

У підсумку рівняння (2.8.1) приймуть вид:

$$
\begin{aligned}
&(1-a_{11})z_1 - a_{12}z_2 - \ldots - a_{1n}z_n = \nu_1 \frac{dz_1}{dt} + \nu_2 \frac{dz_2}{dt} + \ldots + \nu_n \frac{dz_n}{dt} \\
&-a_{21}z_1 + (1-a_{22})z_2 - \ldots - a_{2n}z_n = \nu_1 \frac{dz_1}{dt} + \nu_2 \frac{dz_2}{dt} + \ldots + \nu_n \frac{dz_n}{dt} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-a_{n1}z_1 - a_{n2}z_2 - \ldots + (1-a_{nn})z_n = \nu_1 \frac{dz_1}{dt} + \nu_2 \frac{dz_2}{dt} + \ldots + \nu_n \frac{dz_n}{dt}
\end{aligned}
\tag{2.8.5}
$$

Ми бачимо, що при зроблених припущеннях щодо коефіцієнтів фондомісткості праві частини всіх рівнянь виявилися однаковими. Це дозволяє виконати наступні перетворення. Залишимо перше з рівняння (2.8.5) без змін, а кожне з інших замінимо на різницю першого рівняння і даного рівняння. У підсумку одержуємо:

$$
\begin{aligned}
&(1-a_{11})z_1 - a_{12}z_2 - \ldots - a_{1n}z_n = \nu_1 \frac{dz_1}{dt} + \nu_2 \frac{dz_2}{dt} + \ldots + \nu_n \frac{dz_n}{dt} \\
&(1-a_{11}+a_{21})z_1 - (1-a_{22}+a_{12})z_2 - \ldots - (a_{1n}-a_{2n})z_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(1-a_{11}+a_{n1})z_1 - (a_{12}-a_{n2})z_2 - \ldots - (1-a_{nn}+a_{1n})z_n = 0
\end{aligned}
\tag{2.8.6}
$$

Останні n–1 рівняння системи (2.8.6) є статичними. Вирішуючи ці рівняння, можна виразити величини z_2, $z_3, \ldots, z_n$ через z_1:

$$
z_2 = \alpha_2 z_1,\ z_3 = \alpha_3 z_1, \ldots, z_n = \alpha_n z_1 \tag{2.8.7}
$$

Підставляючи (2.8.7) у перше з рівнянь (2.8.6) приходимо до динамічного рівняння щодо величини z_1:

$$
(1 - a_{11} - a_{12}\alpha_2 - \ldots - a_{1n}\alpha_n)z_1 = (\nu_1 + \nu_2\alpha_2 + \ldots + \nu_n\alpha_n)\frac{dz_1}{dt} \tag{2.8.8}
$$

чи:

$$
\frac{dz_1}{dt} = kz_1,\ k = \frac{1 - a_{11} - a_{12}\alpha_2 - \ldots - a_{1n}\alpha_n}{\nu_1 + \nu_2\alpha_2 + \ldots + \nu_n\alpha_n} \tag{2.8.9}
$$

Рішення цього рівняння буде:

$$
z_1 = z_{10}e^{kt}\ , \tag{2.8.10}
$$

де z_{10} – початкове (при $t_0 = 0$) значення z_1. Відповідно до (2.8.7) для інших шуканих величин маємо:

$$z_2 = \alpha_2 z_{10} e^{kt},\ z_3 = \alpha_3 z_{10} e^{kt}, .., z_n = \alpha_n z_{10} e^{kt} \qquad (2.8.11)$$

Задача цілком вирішена. Так само, як і в двосекторному випадку, тут виходить однозначна залежність між усіма шуканими величинами, тобто квазі одновимірна задача.

Величина k може бути як додатною, так і від'ємною. При $k > 0$ початкове відхилення від положення рівноваги системи надалі зростає, тобто положення рівноваги є хитливим. При $k < 0$ система, виведена з положення рівноваги, повертається в нього; отже, положення рівноваги є стійким.

Висновки. Оцінимо отримані в даній главі результати. Динамічна модель дозволяє вирішувати значно більше коло задач, чим статична. З її допомогою можна моделювати варіанти розвитку економічної системи в залежності від використовуваних технологічних процесів, а також способів інвестування.

У той же час отримані результати вказують на деякі істотні недоліки лінійної моделі. Як уже указувалося вище, положення рівноваги, у більшості випадків, виявляється хитливим. Система прагне видалитися від нього, при цьому шукані величини зростають у часі експоненціально. Експонентний розвиток відбувається за законом ланцюгової реакції, тобто за рівні проміжки часу відповідні величини збільшуються в рівне число раз. При цьому відбувається необмежений ріст шуканих величин із усе зростаючою швидкістю. Насправді, подібний ріст можливий тільки протягом деякого обмеженого проміжку часу, після чого в силу якихось природних причин (вичерпання ресурсів, насичення ринку збуту і т.д.) ріст припиниться. Але лінійна модель подібного припинення чи уповільнення росту не відбиває.

З цим же недоліком лінійної моделі зв'язана і ще одна важлива обставина. Воно зв'язано з пошуком параметрів матриць A і N. Кількість цих параметрів швидко зростає зі збільшенням числа секторів розглянутої економічної системи. Отже, зростає і час, необхідне для пошуку параметрів. Однак ми застосовуємо динамічну модель для прогнозу стану системи через якийсь час. Очевидно, що час пошуку параметрів повинний бути значно меншим, чим той проміжок часу, на який ми даємо прогноз. Але труднощі пошуку великої кількості параметрів можуть зробити рішення такої задачі неможливим. Інакше кажучи, час пошуку параметрів системи може виявитися більшим, ніж той проміжок часу, на який ми даємо прогноз, що робить цей прогноз безглуздим.

З цим перегукується й інша особливість рішень лінійних задач. Як ми уже відзначали вище, положення рівноваги системи, як правило, є хитливими. З цього, крім іншого, випливає наступне. Якщо ми допустимо деяку, нехай дуже невелику, похибку у знаходженні параметрів матриць A і N, а також похибки при завданні початкових умов, то всі зазначені погрішності будуть з часом зростати, оскільки різні інтегральні криві розходяться з видаленням від початкової точки. Оскільки зазначених початкових погрішностей уникнути неможливо, те це знецінює одержувані результати для великих значень часу, роблячи їх недостовірними.

Підводячи підсумки, можна сказати, що лінійні динамічні моделі придатні для прогнозування на відносно невеликих проміжках часу і для систем з відносно невеликою кількістю секторів.

2.9 Питання для контролю

1. Опишіть виведення динамічного рівняння Леонтьєва для випадку односекторної економічної системи.
2. Яким чином у динамічному випадку знаходиться вільний залишок за заданим обсягом виробництва для односекторної економічної системи?
3. Яким чином у динамічному випадку знаходиться обсяг виробництва за допомогою рішення відповідного диференціального рівняння для односекторної економічної системи?
4. Проаналізуйте, з економічної точки зору, результати рішення диференціального рівняння для односекторної економічної системи.
5. Опишіть виведення динамічних рівнянь Леонтьєва для випадку двосекторної економічної системи.
6. Яким чином у динамічному випадку знаходяться вільні залишки по заданих обсягах виробництва для двосекторної економічної системи?
7. Яким образом у динамічному випадку знаходяться обсяги виробництва за допомогою рішення відповідних диференціальних рівнянь для двосекторної економічної системи?
8. Опишіть процедуру аналізу коренів характеристичного рівняння і її економічний зміст.
9. Проаналізуйте результати рішення диференціальних рівнянь Леонтьєва для двосекторної економічної системи з економічної точки зору.
10. Опишіть особливий випадок рішення динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи.
11. Опишіть виведення динамічних рівнянь Леонтьєва для випадку довільної кількості секторів економічної системи.
12. Опишіть перехід до матричної форми запису динамічних рівнянь Леонтьєва для випадку довільної кількості секторів економічної системи.
13. Опишіть процес пошуку вільних залишків при заданих обсягах виробництва в динамічному випадку при довільній кількості секторів.
14. Опишіть процес рішення диференціальних рівнянь при пошуку обсягів виробництва у випадку довільної кількості секторів.
15. Опишіть особливий випадок рішення динамічних рівнянь при довільній кількості секторів.

2.10 Теми лабораторних робіт

1. Складіть програму, що дозволяє зображувати фазову площину в результаті розв'язку системи двох диференціальних рівнянь для двосекторної економічної системи й аналізувати економічний зміст одержуваних результатів у загальному випадку.

2. Складіть програму, що дозволяє зображувати фазову площину в результаті розв'язку системи двох диференціальних рівнянь для двосекторної економічної системи й аналізувати економічний зміст одержуваних результатів в особливому випадку.

3. Реалізуйте алгоритм пошуку розв'язку системи диференціальних рівнянь для економічної системи з довільною кількістю секторів у загальному випадку з графічним представленням результатів.

4. Реалізуйте алгоритм пошуку розв'язку системи диференціальних рівнянь для економічної системи з довільною кількістю секторів в особливому випадку з графічним представленням результатів.

РОЗДІЛ 3 НЕЛІНІЙНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ СТАТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Класична теорія Леонтьєва є принципово лінійною як у статичному, так і в динамічному випадку. Математично це виражається у тому, що усі використовувані в ній рівняння, як алгебраїчні, так і диференціальні, є лінійними. З економічної точки зору лінійність означає пропорційність результатів витраченим зусиллям, наприклад, вкладеним коштам.

Однак припущення про лінійність далеко не завжди виправдуються. Фактично, вони потрібні для полегшення рішення задач з використанням математичних рівнянь. Відомо, що лінійні рівняння вирішуються незрівнянно легше, ніж нелінійні.

Проте, сучасні проблеми економіки диктують вимоги про використання не таких моделей, що зручніше для рішення, а таких, котрі адекватно описують економічні реалії. Подібні моделі, як правило, є нелінійними, тобто досить складними як з економічної, так і з математичної точки зору.

У даній главі робляться перші кроки по створенню нелінійних економічних моделей балансового типу для випадку статичних задач. Усі виникаючі математичні труднощі переборюються при цьому за рахунок використання ефективних комп'ютерних алгоритмів. Це дозволяє розглядати значно більш складні і реальні задачі, чим у лінійному випадку.

3.1 Односекторна економічна система

Раніше, у главі 1, ми розглядали випадок, коли виробничі витрати w були пропорційні обсягу виробництва, тобто лінійно залежать від них: $w = ax$. Однак це припущення не завжди виправдується на практиці. Існує безліч факторів, що можуть приводити до більш складних залежностей виробничих витрат від обсягу виробництва, чим лінійна.

Нехай, наприклад, ми маємо недовантажене виробництво, на якому частина виробничих потужностей простоює. Тоді, зі збільшенням обсягу виробництва, витрати ростуть відносно повільно, тому що для випуску додаткової продукції не потрібно закуповувати нове обладнання; досить задіяти вже наявне.

Навпаки, при цілком завантаженому виробництві поява додаткових замовлень потребує витрат на придбання устаткування і будівництво приміщень. У цьому випадку виробничі витрати, на початковому етапі, ростуть значно швидше, ніж обсяг виробництва.

Можливі випадки, коли виробничі витрати існують при відсутності виробництва. Наприклад, при тимчасовому простої підприємства все одно необхідно підтримувати в справному стані устаткування, платити обслуговуючому персоналу і т.д.

Усі розглянуті приклади показують, що залежність виробничих витрат w від обсягу виробництва x може бути досить складної і задаватися якоюсь функцією:

$$w = w(x), \tag{3.1.1}$$

відмінною від лінійної.

Розглянемо тепер вільний залишок y. Природно припустити, що він обчислюється як різниця величини x і виробничих витрат $w(x)$:

$$y = x - w(x) \tag{3.1.2}$$

Однак можливі і більш складні випадки. Величина вільного залишку може регулюватися якимись умовами, зовнішніми стосовно даної економічної системи. Наприклад, в умовах так званого прогресивного оподатковування відсоток податку від прибутку росте разом із прибутком, так що податок росте значно швидше, ніж прибуток. Цікаво відзначити, що ця дуже розповсюджена міра придумана спеціально для того, щоб обмежувати зростання виробництва, оскільки досвід капіталістичних країн показав, що такий ріст найчастіше приводить до так називаних криз надвиробництва, що важко відбивається на економіці. Оскільки податок платиться саме з вільного залишку, то може трапитися, що величина податку перевищує величину вільного залишку. Можливі й інші аналогічні вимоги до витрати вільного залишку, загальна особливість яких виражається в тім, що ця витрата прив'язується не стільки до реальної величини вільного залишку, вираженою формулою (3.1.2), скільки до обсягу виробництва x. У загальному випадку для вільного залишку існує якась нелінійна залежність

$$y = y(x), \tag{3.1.3}$$

яка не обов'язково співпадає з (3.1.2). У підсумку рівняння балансу здобуває вид:

$$x - w(x) = y(x) \tag{3.1.4}$$

Головна відмінність цього рівняння від лінійного аналога (1.1.2) полягає в наступному. У рівняння (1.1.2) входять дві змінні величини: x і y. Відповідно до цього, ми можемо довільно змінювати одну з них, обчислюючи іншу. Таке «лінійне» мислення характерне для ранніх стадій розвитку капіталізму. Наприклад, у XIX столітті економічні теорії не брали до уваги питання можливого вичерпання природних ресурсів чи браку робочої сили. При цьому, природно, можна було припускати можливість необмеженого зростання виробництва і, як наслідок, росту вільних засобів.

Однак зазначені питання грають у сучасній економіці ключову роль. Рівняння (3.1.4), при відповідному завданні функціональних залежностей (3.1.1) і (3.1.3), може відбивати реальні умови, у яких баланс між витратами і випуском можливий не при будь-яких значеннях x, як у лінійному випадку, а тільки при тих, котрі задовольняють, як корені, рівнянню (3.1.4). Інакше кажучи, ми тепер можемо, за допомогою балансового рівняння, знаходити якісь природні значення обсягів виробництва, що враховують умови функціонування даної економічної системи.

Розглянемо, як окремий приклад, найпростіші нелінійні залежності квадратичного типу:

$$w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \; y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \tag{3.1.5}$$

Тепер рівняння (3.1.4) приймає вид:

$$x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \tag{3.1.6}$$

чи:

$$(a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1 - 1)x + a_0 + b_0 = 0 \tag{3.1.7}$$

Корені цього квадратного рівняння будуть:

$$x_{1,2} = \frac{1 - a_1 - b_1 \pm \sqrt{(1 - a_1 - b_1)^2 - 4(a_2 + b_2)(a_0 + b_0)}}{2(a_2 + b_2)} \tag{3.1.8}$$

У залежності від значення дискримінанта можуть бути два дійсних корені, один чи жодного дійсного кореня. Відповідно, може існувати два рівноважних стани системи, один стан чи жодного такого стану. Становить інтерес дослідження стійкості рівноважних станів; це питання буде розглянутий нижче при рішенні динамічних задач.

Підводячи підсумки вищесказаному, відзначимо той важливий момент, що облік нелінійних залежностей привів до розгляду принципово нових явищ, що були відсутні в лінійному випадку. У нелінійній постановці виникає поняття природних станів рівноваги економічної системи, що дозволяє ставити і вирішувати задачу про пошук оптимальних режимів функціонування системи. Ці режими є власними характеристиками системи й описують ті її стани, що вона сама прагне вибрати як природні для неї.

Відзначимо, що завдання функцій $w = w(x)$ і $y = y(x)$ як у квадратичному, так і в більш складних випадках вимагає додаткового дослідження, що проводиться відомими методами математичної статистики на основі наявної інформації про досліджувану економічну систему.

3.2 Двосекторна економічна система

Перенесемо розвиті вище ідеї на випадок двосекторної економічної системи. Запишемо балансові рівняння у формі:

$$\begin{aligned} x_1 - w_{11} - w_{12} &= y_1 \\ x_2 - w_{21} - w_{22} &= y_2 \end{aligned} \qquad (3.2.1)$$

Раніше, у параграфі 1.2, ми вважали величини w_{11} і w_{21} пропорційними x_1, а величини w_{12} і w_{22} – пропорційними x_2. Будемо тепер розглядати всі ці величини як деякі, узагалі говорячи, нелінійні функції x_1 і x_2:

$$\begin{aligned} w_{11} = w_{11}(x_1,\ x_2),\ w_{12} = w_{12}(x_1,\ x_2) \\ w_{21} = w_{21}(x_1,\ x_2),\ w_{22} = w_{22}(x_1,\ x_2) \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

Розглянемо величини $y_1,\ y_2$. При відсутності якихось додаткових умов їх можна обчислювати по формулах:

$$\begin{aligned} y_1 = x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) \\ y_2 = x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

Однак цілком можливо, що якісь умови, зовнішні стосовно даної економічної системи, наприклад, податкові чи соціальні вимоги, задають функціональні залежності y_1 і y_2, відмінні від тих, що ми отримуємо у відповідності з (3.2.3):

$$y_1 = y_1(x_1,\ x_2),\ y_2 = y_2(x_1,\ x_2) \qquad (3.2.4)$$

У попередньому параграфі ми обговорювали можливі варіанти таких зовнішніх умов; зрозуміло, у двосекторному випадку вони можуть бути більш різноманітними. Тепер рівняння (3.2.1) приймають вид:

$$\begin{aligned} x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) = y_1(x_1,\ x_2) \\ x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) = y_2(x_1,\ x_2) \end{aligned} \qquad (3.2.5)$$

Порівняємо рівняння (3.2.3) і (3.2.5). Відповідно до (3.2.3) ми можемо довільно задавати величини $x_1,\ x_2$, обчислюючи значення величин, $y_1,\ y_2$, що відповідають їм . Таким чином, тут зберігається типове для лінійної постановки припущення про необмежені можливості змін обсягів виробництва в секторах економічної системи.

Відповідно до (3.2.5) ми маємо два нелінійних алгебраїчних рівняння щодо двох невідомих $x_1,\ x_2$. Ці рівняння визначають якісь значення $x_1,\ x_2$, при яких зводиться баланс доходів і витрат. Таких пар значень може бути кілька, одна чи ні однієї, але, у будь-якому випадку, ми вже позбавлені можливості задавати значення $x_1,\ x_2$ довільно. Дані значення визначає сама економічна система в залежності від своїх внутрішніх характеристик, а також у залежності від її взаємин з навколишнім середовищем. Таким чином, і тут, як і в односекторному випадку, використання нелінійної моделі якісно змінює розглянуту картину, наближаючи її до реальності.

Рішення системи двох нелінійних рівнянь (3.2.5) може вироблятися якимись чисельними методами, наприклад, добре відомим методом Ньютона, що вивчався в курсі «Теорія алгоритмів і обчислювальних процесів».

Розглянемо конкретні варіанти функціональних залежностей. Нехай перехресні зв'язки, обумовлені величинами w_{12} і w_{21}, залишаться такими ж, як у лінійному випадку:

$$w_{12} = a_{12}x_2,\ w_{21} = a_{21}x_1 \tag{3.2.6}$$

Для величин $w_{11},\ w_{22},\ y_1,\ y_2$ виберемо вираження, аналогічні використаної в односекторному випадку:

$$\begin{aligned} w_{11} &= a_{11,0} + a_{11,1}x_1 + a_{11,2}x_2^2,\ y_1 = b_{1,0} + b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_1^2 \\ w_{22} &= a_{22,0} + a_{22,1}x_2 + a_{22,2}x_2^2,\ y_2 = b_{2,0} + b_{2,1}x_2 + b_{2,2}x_2^2 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Прийняті припущення можуть означати, наприклад, що усередині кожного із секторів реалізуються більш сильні нелінійні залежності, а взаємини секторів є слабкими і, відповідно, лінійними.

Тепер рівняння (3.2.5) приймуть вид:

$$\begin{aligned} x_1 - a_{11,0} - a_{11,1}x_1 - a_{11,2}x_1^2 - a_{12}x_2 &= b_{1,0} + b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_1^2 \\ x_2 - a_{21}x_1 - a_{22,0} - a_{22,1}x_2 - a_{22,2}x_2^2 &= b_{2,0} + b_{2,1}x_2 + b_{2,2}x_2^2 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Перетворимо їх до виду:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{a_{11,0} + b_{1,0}}{a_{12}} + \frac{1 - a_{11,1} - b_{1,1}}{a_{12}}x_1 - \frac{a_{11,2} + b_{1,2}}{a_{12}}x_1^2 \\ x_1 &= -\frac{a_{22,0} + b_{2,0}}{a_{21}} + \frac{1 - a_{22,1} - b_{2,1}}{a_{21}}x_2 - \frac{a_{22,2} + b_{2,2}}{a_{21}}x_2^2 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Два рівняння (3.2.9) задають дві параболи на фазовій площині $x_1,\ x_2$.

Найбільш типові випадки перетинання цих парабол зображені на рисунок 9 (чотири точки перетинання), рисунок 10 (дві точки перетинання) і рисунок 11 (немає точок перетинання).

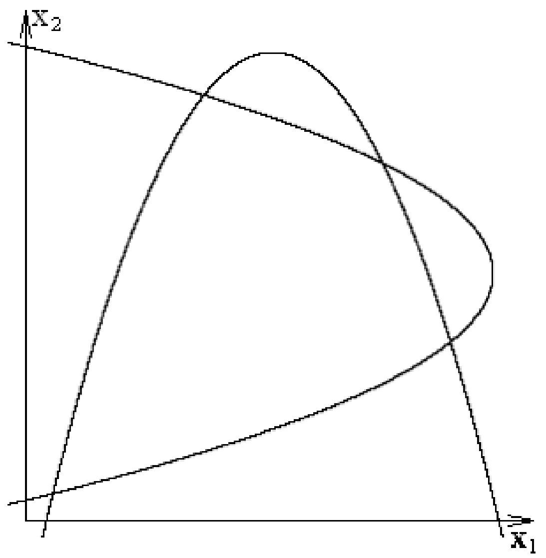

Рис. 9

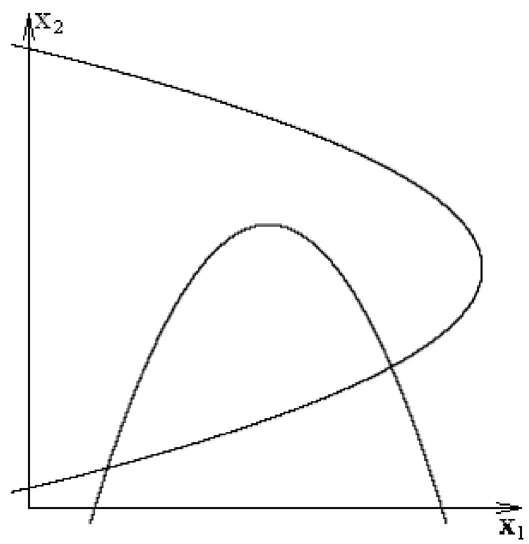

Рис. 10

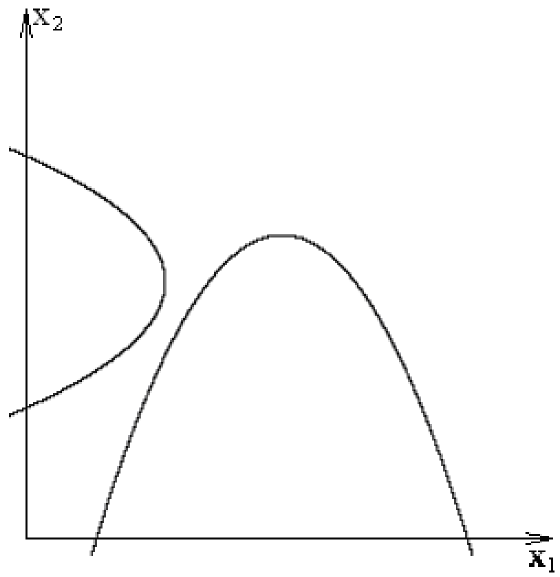

Рис. 11

Відповідно цим випадкам система має чотири, два чи жодного положення рівноваги. Взаємини цих положень, а також їхня стійкість чи нестійкість будуть докладно розглянуті при вивченні нелінійних динамічних моделей.

Поки ж ми знову, як і в односекторному випадку, можемо констатувати, що врахування нелінійності дозволяє розглянути принципово нові явища, що мають безсумнівний економічний зміст, причому такі, котрі не могли бути враховані в лінійних моделях.

3.3 Економічна система з довільною кількістю секторів

Розглянемо випадок довільної кількості секторів з обсягами виробництва в них $x_1,\ x_2,...,x_n$. Позначимо, як і раніше, величину виробничих витрат, що перелічуються із сектора номер i в сектор номер j через w_{ij}. Вивчимо, від чого може залежати ця величина. Раніше, у лінійному випадку, ми мали пропорційну залежність w_{ij} від величини x_j:

$$w_{ij} = a_{ij} x_j \tag{3.3.1}$$

Інакше кажучи, виробничі витрати сектора номер j залежали тільки від обсягу виробництва в цьому секторі. Тут ми знову маємо типово лінійний підхід, відповідно до якого обсяг виробництва може призначатися довільно з впевненістю в тім, що необхідні для цього ресурси обов'язково знайдуться. Однак це зовсім не обов'язково. Сектор номер і може просто не справитися з заявкою на надмірно велику кількість виробничих витрат сектора номер j. Таким чином, при з'ясуванні значень величини w_{ij}, взагалі кажучи, бажано враховувати не тільки значення x_j, але і значення x_i, тобто обсяг виробництва в секторі-постачальнику. У підсумку виходить наступна функціональна залежність:

$$w_{ij} = w_{ij}(x_i,\ x_j) \tag{3.3.2}$$

Припустимо також, що величина вільного залишку y_i залежить тільки від обсягу виробництва в секторі номер і:

$$y_i = y_i(x_i) \tag{3.3.3}$$

З урахуванням усіх зазначених припущень можна записати наступну систему балансових рівнянь:

$$\begin{aligned}
&x_1 - w_{11}(x_1) - w_{12}(x_1,\ x_2) - ... - w_{1n}(x_1,\ x_n) = y_1(x_1) \\
&x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_2) - ... - w_{2n}(x_2,\ x_n) = y_2(x_2) \\
&.\ . \\
&x_n - w_{n1}(x_1,\ x_n) - w_{n2}(x_2,\ x_n) - ... - w_n(x_n) = y_n(x_n)
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Ця система рівнянь дозволяє розглядати і вирішувати значно більш широке коло задач, чим у лінійному випадку з якісно іншими результатами. Зокрема, тепер величини $x_1, x_2, ..., x_n$ не можуть задаватися довільно, а повинні знаходитися як рішення системи рівнянь (3.3.4).

Однак ми можемо розглянути і більш складні випадки нелінійних рівнянь. У принципі, нескладно уявити собі випадки, коли виробничі витрати сектора номер j залежать не тільки від обсягів виробництва в секторах номер і та j, але і від обсягів виробництва у всіх інших секторах даної економічної системи. Система – це щось єдине ціле; тому в ній можливі більш складні варіанти взаємодії, чим тільки перехресні. У цьому випадку буде:

$$w_{ij} = w_{ij}(x_1, ..., x_n) \tag{3.3.5}$$

Аналогічно, можна уявити собі залежності вільних залишків не тільки від обсягів виробництва у власному секторі, але і від обсягів виробництва у всіх інших секторах:

$$y_i = y_i(x_1, ..., x_n) \tag{3.3.6}$$

У підсумку ми приходимо до наступної системі нелінійних рівнянь:

$$\begin{gathered}
x_1 - w_{11}(x_1,...,x_n) - w_{12}(x_1,...,x_n) - ... - w_{1n}(x_1,...,x_n) = y_1(x_1,...,x_n) \quad (3.3.7)\\
x_2 - w_{21}(x_1,...,x_n) - w_{22}(x_1,...,x_n) - ... - w_{2n}(x_1,...,x_n) = y_2(x_1,...,x_n)\\
. \; . \\
x_n - w_{n1}(x_1,...,x_n) - w_{n2}(x_1,...,x_n) - ... - w_{nn}(x_1,...,x_n) = y_n(x_1,...,x_n)
\end{gathered}$$

Зрозуміло, складання подібних рівнянь вимагає дуже повного попереднього вивчення усіх виробничих зв'язків усередині даної системи, а також зв'язків системи з зовнішнім світом, що відбиваються на вільних залишках.

Рішення систем нелінійних рівнянь являє собою більш складну задачу, чим у лінійному випадку, однак при використанні комп'ютерів і ефективних чисельних методів рішення, наприклад, методу Ньютона, ця задача цілком розв'язна.

Однак тут потрібно знову застерегти від захоплення універсальними моделями з великою кількістю секторів. Чим більше секторів, тим сутужніше збирати необхідну інформацію для побудови моделей і тем складніше вирішувати відповідні рівняння. Реальним і адекватним суті розв'язуваних задач є використання спеціалізованих моделей з відносно невеликою кількістю секторів. Правда, такі моделі вимагають творчого підходу як від замовника-економіста, так і від виконавця-програміста (чи математика), але тільки їхнє використання гарантує необхідний ступінь вірогідності при комп'ютерному моделюванні економічних задач.

Висновки. На прикладі статичних задач показано, що нелінійні узагальнення лінійних економічних моделей Леонтьєва цілком можливі. При цьому важливо відзначити наступне.

По-перше такі узагальнення дозволяють враховує реальні явища, що є присутнім у сучасній економіці.

По-друге, врахування нелінійних ефектів дозволяє виявити такі особливості в поводженні економічних систем, що принципово неможливо виявити на основі лінійних моделей.

У першу чергу це стосується того, що в нелінійному випадку виявляються природні стани рівноваги системи, до яких вона тяжіє в силу взаємин між секторами усередині системи, а також взаємин з іншими економічними системами.

Усі математичні труднощі, що виникають при використанні нелінійних економічних моделей, переборюються за рахунок використання відповідних алгоритмів і сучасної комп'ютерної техніки.

3.4 Питання для контролю

1. Опишіть основні відмінності лінійних і нелінійних статичних моделей для випадку односекторних економічних систем.
2. Поясніть причини виникнення природних станів рівноваги при врахуванні нелінійних ефектів в односекторних економічних системах.
3. Опишіть загальний спосіб складання нелінійних статичних рівнянь для двосекторних економічних систем.
4. Опишіть частковий вид нелінійних статичних рівнянь для випадку квадратичних залежностей параметрів від шуканих величин.
5. Опишіть графічний спосіб знаходження станів рівноваги для нелінійних двосекторних економічних систем.
6. Опишіть аналітичний спосіб знаходження станів рівноваги для нелінійних двосекторних економічних систем.
7. Опишіть спосіб складання нелінійних статичних рівнянь для випадку економічних систем з довільною кількістю секторів.

3.5 Теми лабораторних робіт

1. Складіть програму, що дозволяє знаходити положення рівноваги двосекторної економічної системи графічним методом.
2. Доповните попередню програму аналітичним методом перебування положень рівноваги двосекторної економічної системи.

РОЗДІЛ 4 НЕЛІНІЙНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ

У попередній главі були розглянуті нелінійні узагальнення статичних рівнянь Леонтьєва. Однак обмеження тільки статикою не дозволяє вирішувати ряд важливих задач, зв'язаних з еволюцією економічних систем. Зокрема, залишаються відкритими питання про стійкість положень рівноваги системи.

Дана глава присвячена розгляду нелінійних узагальнень динамічних рівнянь Леонтьєва. При цьому враховується досвід складання нелінійних статичних рівнянь. Одержувані нелінійні динамічні рівняння дозволяють вирішувати ряд складних задач про еволюціонування економічних систем у залежності від умов їхнього існування.

У силу складності нелінійних динамічних рівнянь їхнє рішення виконується, як правило, чисельними методами з використанням апарата фазової площини, що значно полегшує дослідження одержуваних результатів.

Ряд важливих питань, у той же час, розв'язується й аналітичними методами. Зокрема, це стосується питань дослідження характеру особливих точок.

Найбільше докладно розглядаються задачі для односекторної і двосекторної економічних систем.

4.1 Односекторна економічна система

Використаємо досвід, накопичений у попередній главі, для побудови нелінійних динамічних моделей. У лінійному випадку перехід від статичних до динамічних рівнянь відбувався за рахунок додавання складових, що відбивають ріст обсягів виробництва в секторах за рахунок вкладення інвестицій. При цьому передбачалося, що швидкість росту обсягу виробництва в тім чи іншому секторі пропорційна обсягу вкладених інвестицій.

Приймемо такого ж припущення і тут, зберігаючи нелінійності тільки тих же видів, що й у статиці. Відповідно до цього, рівняння (3.1.4) перетвориться до рівняння:

$$x - w(x) = \nu \frac{dx}{dt} + y(x) \qquad (4.1.1)$$

У відповідності зі зробленими тільки що припущеннями похідна dx/dt входить у рівняння лінійним образом. Це дозволяє легко розв'язати рівняння відносно похідної:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu}\left[x - w(x) - y(x)\right] \qquad (4.1.2)$$

що необхідно для його рішення яким-небудь чисельним методом, наприклад, методом Рунге-Кутти.

Рівняння (4.1.2) можна узагальнити, роблячи природні в динамічному випадку припущення про залежність виробничих витрат w і вільного залишку y не тільки від обсягу виробництва x, але і від часу t. Також може бути заданою функцією часу і коефіцієнт фондомісткості ν. У підсумку замість (4.1.2) одержуємо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu(t)}\left[x - w(t,x) - y(t,x)\right] \tag{4.1.3}$$

Це рівняння також нескладне розв'язується чисельним методом.

Однак наочність рішення як для рівняння (4.1.2), так і для рівняння (4.1.3) різко підвищується, якщо використовувати чисельний метод інтегрування разом з методом фазової площини.

Продемонструємо таке сполучення на частковому прикладі квадратичних залежностей для w і y (3.1.5). У цьому випадку рівняння (4.1.2) прийме вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu}\left[-(a_0 + b_0) + (1 - a_1 - b_1)x - (a_2 + b_2)x^2\right] \tag{4.1.4}$$

Рівняння (4.1.4) можна розглядати як алгебраїчне рівняння, що зв'язує швидкість зміни обсягу виробництва $\dot{x} = dx/dt$ з величиною цього обсягу x. Відповідна крива на фазовій площині $x,\ \dot{x}$ має, у даному випадку, вид параболи. На рис. 4.1.1 фазова площина $x,\ \dot{x}$ зображена разом із площиною $x,\ t$. При цьому, для зручності спільного розгляду, в обох випадках вісь x спрямована нагору. У силу цього вісь $\dot{x}$ на фазовій площині спрямована горизонтально вліво, а парабола має горизонтальну вісь.

Розглянемо докладніше властивості цієї параболи. Вона може перетинати вісь x у двох точках, бути дотичною до цієї осі в одній точці чи не перетинати осі. Для знаходження точок перетинання вирішимо спочатку статичне рівняння, що відповідає постійному обсягу виробництва $x = \mathrm{const}$. У цьому випадку буде: $\dot{x} = dx/dt = 0$ і ми знову приходимо до рівняння (3.1.7), корені якого знаходяться по формулах (3.1.8). При досить малих значеннях величин $a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ маємо два дійсних корені $x_1,\ x_2$. Отже, парабола перетинає вісь x у двох точках (рис. 12).

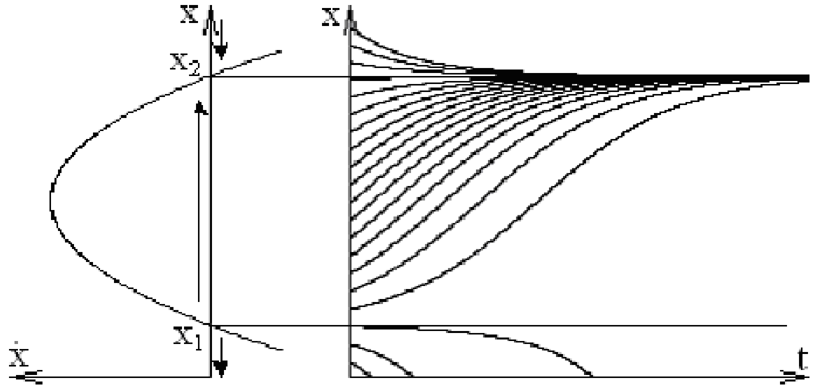

Рис. 12

Звернемо увагу на те, що при $x < x_1$ значення швидкості від'ємне: $\dot{x} < 0$. Отже, величина x убуває. У проміжку $x_1 < x < x_2$ швидкість додатна; величина x зростає. При $x > x_2$ швидкість знову від'ємна; величина x убуває. Відповідні зони на рисунку 12 відзначені стрілочками, спрямованими вниз чи нагору. Результати чисельного інтегрування рівняння (4.1.4), проведеного для ряду початкових значень x, зображені в графічному виді праворуч від фазової площини. Відповідні криві поводяться саме так, як випливає з тільки що проробленого аналізу фазової площини.

Розгляд графіків, зображених на рисунку 12, дозволяє зробити висновок про нестійкість положення рівноваги, що відповідає першому кореню x_1. Малі відхилення від цього положення рівноваги надалі наростають. Друге положення рівноваги, що відповідає кореню x_2, навпаки, стійке. При малих відхиленнях від цього положення система прагне повернутися назад у нього.

Таким чином, ми бачимо, що метод фазової площини, у даному випадку, дозволяє завбачити якісну картину інтегральних кривих на площині x, t, а також дає цим кривим чітке економічне значення.

Зокрема, добре видно, що в даному випадку існує зона економічного росту; причому цей ріст обмежений значенням x_2. Такий результат істотно відрізняється від лінійного випадку, коли ріст обсягу виробництва носив експонентний характер і не мав ніяких обмежень.

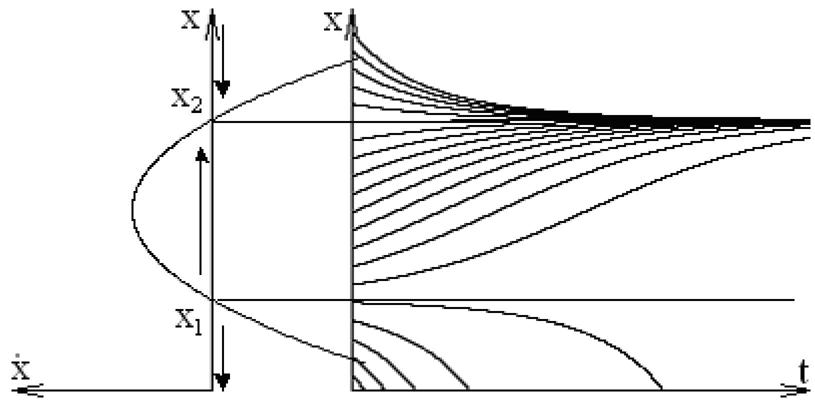

Рис. 13

З ростом величин a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 корені x_1, x_2 зближаються між собою (рис. 13), але доти, поки вони залишаються дійсними, картина в цілому якісно не змінюється.

При подальшому росту величин a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 настає момент, коли корені зливаються (рис. 14). Тепер уже зона росту величини x відсутня, але зберігається положення рівноваги, що відповідає кратному кореню.

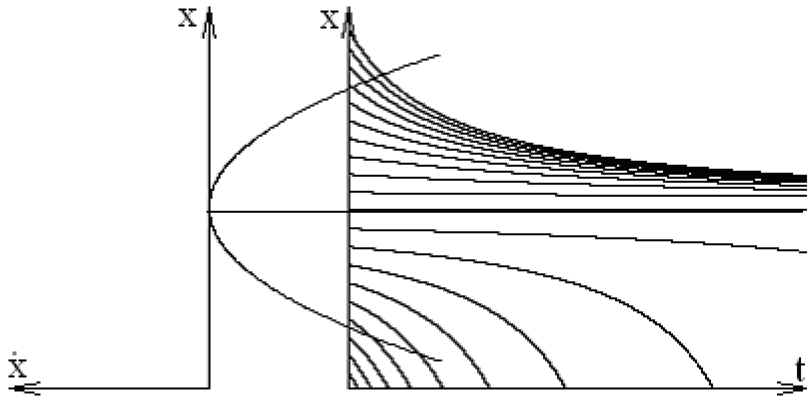

Рис. 14

Збільшуючи величини a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 далі, ми приходимо до ситуації відсутності дійсних коренів, що відповідає відсутності положень рівноваги (рис. 15). У цьому випадку можливо тільки убування величини x при будь-яких початкових умовах.

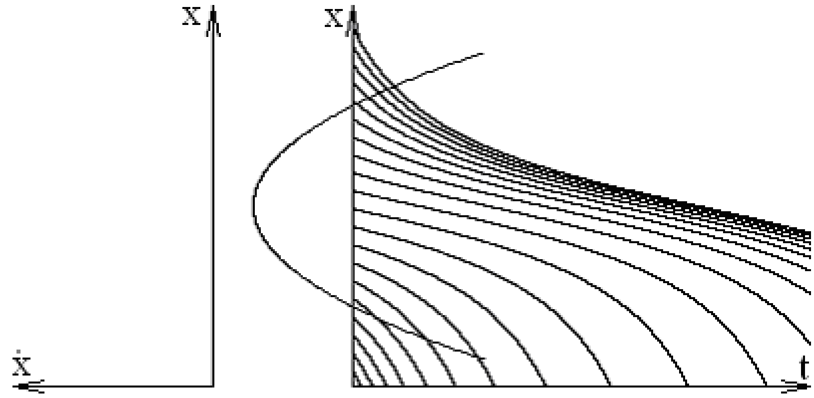

Рис. 15

Ми розглянули досить докладно тільки приклад квадратичних залежностей величин w і y від x. Нескладно вивчити і будь-який інший випадок, користаючись тими ж самими методами. В усіх випадках розгляд фазової площини x, $\dot{x}$ значно полегшує розуміння картини, одержуваної за допомогою чисельного інтегрування нелінійного диференціального рівняння.

4.2 Аналітичне дослідження стійкості положень рівноваги односекторної системи

У попередньому параграфі ми торкнулися питання про стійкість станів рівноваги односекторної економічної системи. Однак це питання розглядалося там тільки на основі розгляду графіків, отриманих за допомогою чисельного інтегрування динамічного рівняння, а також фазових кривих. Цей підхід має істотні недоліки. Чисельне інтегрування рівнянь є, при багаторазовому застосуванні з використанням великого набору початкових умов, досить громіздкою справою. Крім того, воно завжди дає тільки якийсь частковий варіант рішення, що відповідає конкретному набору параметрів (коефіцієнтів) рівняння.

Для того, щоб одержати досить надійні загальні результати, що спираються не тільки на розгляді часткових картинок, застосуємо аналітичний метод. Розглянемо знову рівняння (4.1.2). Нехай x^* – якесь положення рівноваги, тобто величина обсягу виробництва, що задовольняє статичному рівнянню:

$$x^* - w(x^*) - y(x^*) = 0 \tag{4.2.1}$$

Перенесемо початок координат у точку x^* на осі x, виконавши заміну перемінної:

$$x = x^* + z \tag{4.2.2}$$

Розкладемо функції $w = w(x)$ й $y = y(x)$ у ряди Тейлора в околі точки x^*, утримуючи тільки лінійні доданки:

$$w \approx w(x^*) + w'(x^*)z, \ \ y \approx y(x^*) + y'(x^*)z \tag{4.2.3}$$

Тут штрихом позначається, як звичайно, похідна по x. Підставимо (4.2.2) і (4.2.3) у рівняння (4.1.2):

$$\nu \frac{dz}{dt} = x^* + z - w(x^*) - w'(x^*)z - y(x^*) - y'(x^*)z \tag{4.2.4}$$

Відкидаючи доданки, рівні в сумі нулю в силу (4.2.1), одержуємо:

$$\frac{dz}{dt} = kz, \ \ k = \frac{1 - w'(x^*) - y'(x^*)}{\nu} \tag{4.2.5}$$

Рішення цього рівняння буде:

$$z = z_0 e^{kt}, \tag{4.2.6}$$

де z_0 – початкове значення z.

Для величини x одержуємо:

$$x = x^* + z_0 e^{kt} \tag{4.2.7}$$

При $k > 0$ рішення (4.2.6) дає експонентне наростання величини z з видаленням від рівноважного стану x^*. Отже, у цьому випадку даний стан буде хитливим.

При $k < 0$ величина z з часом прагне до нуля, тобто система повертається до стану x^*, що є, у цьому випадку, стійким.

Наприклад, при квадратичних залежностях для w і y (3.1.5) маємо:

$$w'(x^*) = a_1 + 2a_2 x^*, \ y' = b_1 + 2b_2 x^* \tag{4.2.8}$$

і

$$k = \frac{1 - a_1 - 2a_2 x^* - b_1 - 2b_2 x^*}{\nu} \tag{4.2.9}$$

При малому значенні кореня x^*, близькому до нуля, величина k буде додатною, а положення рівноваги хитливим. Ми бачили в попередньому параграфі, що дійсно, перший корінь відповідає хитливому стану рівноваги.

При більшому значення кореня x^* величина k стає від'ємною, а положення рівноваги стійким. Це також узгоджується з результатами попереднього параграфа.

4.3 Двосекторна економічна система

У двосекторному випадку зробимо так само, як в односекторному. За основу візьмемо нелінійні статичні рівняння (3.2.5), додавши в них динамічні складові такого ж виду, як у лінійному випадку. У підсумку одержимо:

$$\begin{aligned} x_1 - w_{11}(x_1, x_2) - w_{12}(x_1, x_2) &= \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + y_1(x_1, x_2) \\ x_2 - w_{21}(x_1, x_2) - w_{22}(x_1, x_2) &= \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + y_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

чи:

$$x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2) = \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} \qquad (4.3.2)$$
$$x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) - y_2(x_1,\ x_2) = \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt}$$

Як і в односекторному випадку, можливе узагальнення системи рівнянь (4.3.2) на випадок залежності вхідних у цю систему функцій від часу t:

$$x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2,\ t) - w_{12}(x_1,\ x_2,\ t) - y_1(x_1,\ x_2,\ t) = \nu_{11}(t)\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}(t)\frac{dx_2}{dt} \qquad (4.3.3)$$
$$x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2,\ t) - w_{22}(x_1,\ x_2,\ t) - y_2(x_1,\ x_2,\ t) = \nu_{21}(t)\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}(t)\frac{dx_2}{dt}$$

Рішення обох систем двох нелінійних диференціальних рівнянь (4.3.2) і (4.3.3) істотно залежить від значення визначника: $e_0 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}$, що відігравав важливу роль і в лінійному випадку. Якщо цей визначник не дорівнює нулю, то перетворюємо (4.3.2) до виду:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{e_0}\{\nu_{22}[x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2)] - \qquad (4.3.4)$$
$$- \nu_{12}[x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) - y_2(x_1,\ x_2)]\}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{e_0}\{\nu_{11}[x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) - y_2(x_1,\ x_2)] -$$
$$- \nu_{21}[x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2)]\}$$

Аналогічно можна перетворити і систему (4.3.3).

Ці випадки відповідають тому, що час окупності інвестицій у той самий сектор залежить від джерела фінансування, що відбивається в нерівності між собою коефіцієнтів фондомісткості:

$$\nu_{11} \neq \nu_{21} \text{ і (чи) } \nu_{12} \neq \nu_{22} \qquad (4.3.5)$$

Рівняння (4.3.4) можна вирішувати чисельним методом, але для аналізу результатів, що виходять, корисно заздалегідь знати статичні рішення, тобто рішення, що відповідають постійним значенням величин x_1, x_2 і задовольняють рівнянням (3.2.5).

Розглянемо конкретні приклади, використовуючи уже вивчені в статичному випадку залежності (3.2.6) і (3.2.7). У цьому випадку рівняння (4.3.4) приймуть вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{e_0}\{\nu_{22}\left[x_1 - a_{11,0} - a_{11,1}x_1 - a_{11,2}x_1^2 - a_{12}x_2 - b_{1,0} - b_{1,1}x_1 - b_{1,2}x_1^2\right] - \qquad (4.3.6)$$

$$-\nu_{12}\left[x_2 - a_{21}x_1 - a_{22,0} - a_{22,1}x_2 - a_{22,2}x_2^2 - b_{2,0} - b_{2,1}x_2 - b_{2,2}x_2^2\right]\Big\}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{e_0}\Big\{\nu_{11}\left[x_2 - a_{21}x_1 - a_{22,0} - a_{22,1}x_2 - a_{22,2}x_2^2 - b_0 - b_{2,1}x_2 - b_{2,2}x_2^2\right] -$$

$$-\nu_{21}\left[x_1 - a_{11,0} - a_{11,1}x_1 - a_{11,2}x_1^2 - a_{12}x_2 - b_{1,0} - b_{1,1}x_1 - b_{1,2}x_1^2\right]\Big\}$$

Статичні рішення цих рівнянь зображені графічно на рис. 3.2.1, 3.2.2 і 3.2.3. З цих рисунків видно, що таких рішень може бути чотири, два чи жодного. Так само як в односекторному випадку, розглянемо великий набір початкових умов для того, щоб одержати повне представлення про вид фазової площини у всім різноманітті можливостей. Особливий інтерес представляють околи положень рівноваги. Ці положення є особливими точками на фазовій площині. Вид цих особливих точок істотно залежить від параметрів системи.

На рисунку 16 зображений випадок з чотирма особливими точками за умови $e_0 > 0$. Особлива точка 1 має такий же характер, як єдина особлива точка в лінійному випадку (рис. 4). Це хитливий вузол. Починаючи зміну системи поблизу цього вузла ми надалі віддаляємося від нього й у більшості випадків це видалення приводить до від'ємних значень однієї з величин x_1 чи x_2, тобто до збитковості відповідного сектора.

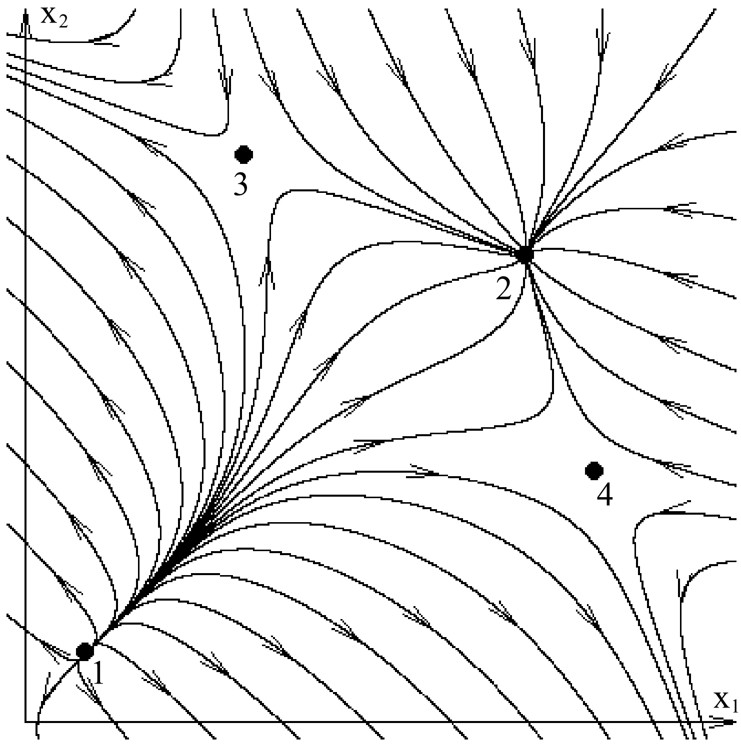

Рис.16

Однак існує дуже маленький діапазон початкових значень, що приводить до одночасного росту x_1, x_2 з наближенням до особливої точки 2, що є стійким вузлом. Нагадаємо, що в лінійному випадку існував єдиний напрямок, що приводить до одночасно росту x_1 і x_2. У даному випадку мається деякий діапазон відповідних напрямків, однак цей діапазон настільки вузький, що поводження системи поблизу особливої точки 1 можна вважати таким, що практично не відрізняється від лінійного аналога.

Істотна відмінність від лінійного випадку полягає в тім, що там ріст x_1 і x_2 (у тім єдиному випадку, коли він був можливий одночасно) був необмеженим, а тут такий ріст обмежений наближенням до точки 2.

З'являються також дві особливі точки 3 і 4 типи сідло. Проходячи повз ці особливі точки, фазові криві або відхиляються убік точки 2, або ідуть у бік збитковості одного із секторів.

У цілому можна сказати, що дана система здатна скоріше до деградації, чим до розвитку, оскільки наближення до стійкої особливої точки 2 можливо, як правило, за умови убування x_1 і x_2. Як ми вже показували в лінійному випадку, це відповідає тому, що обоє сектора краще засвоюють інвестиції друг від друга, чим власні інвестиції.

Розглянемо тепер випадок $e_0 < 0$, що відповідає протилежному варіанту, а саме кращому засвоєнню обома секторами власних інвестицій, чим інвестицій друг від друга.

Відповідний результат зображений графічно на рисунку 17. Тепер точки 1 і 2 перетворилися в сідла, а точки 3 і 4 – у стійкі фокуси. Починаючи з відносно малих значень x_1 і x_2 система переходить до значно більших значень цих величин, наближаючись до одного з стійких фокусів.

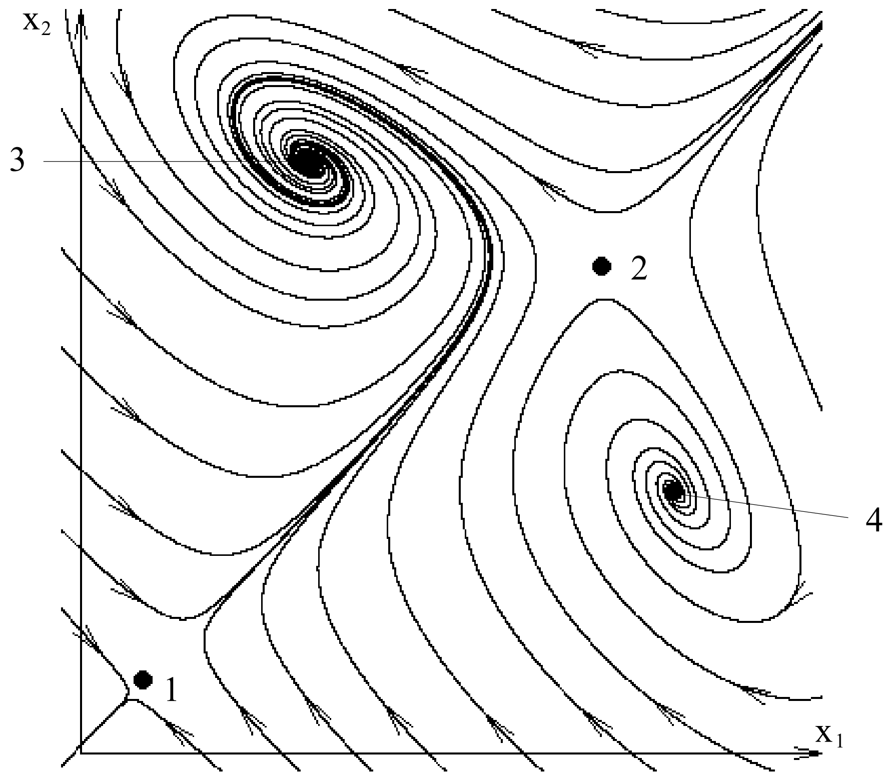

Рис. 17

Принципове розходження з попереднім варіантом полягає в тім, що тепер ріст величин x_1 і x_2 можливий для дуже великого діапазону початкових значень, у той час як зменшення x_1 і x_2 до від'ємних значень можливо тільки при початкових даних, обираних в околі початку координат.

Розглянемо тепер випадки двох особливих точок, тобто станів рівноваги системи. На рисунку 18 зображена фазова площина, що відповідає випадку $e_0 > 0$. Особлива точка 1 є хитливим вузлом, а особлива точка 2 – сідлом.

При будь-яких початкових умовах одна з x_1 чи величин x_2 з часом приймає від'ємне значення.

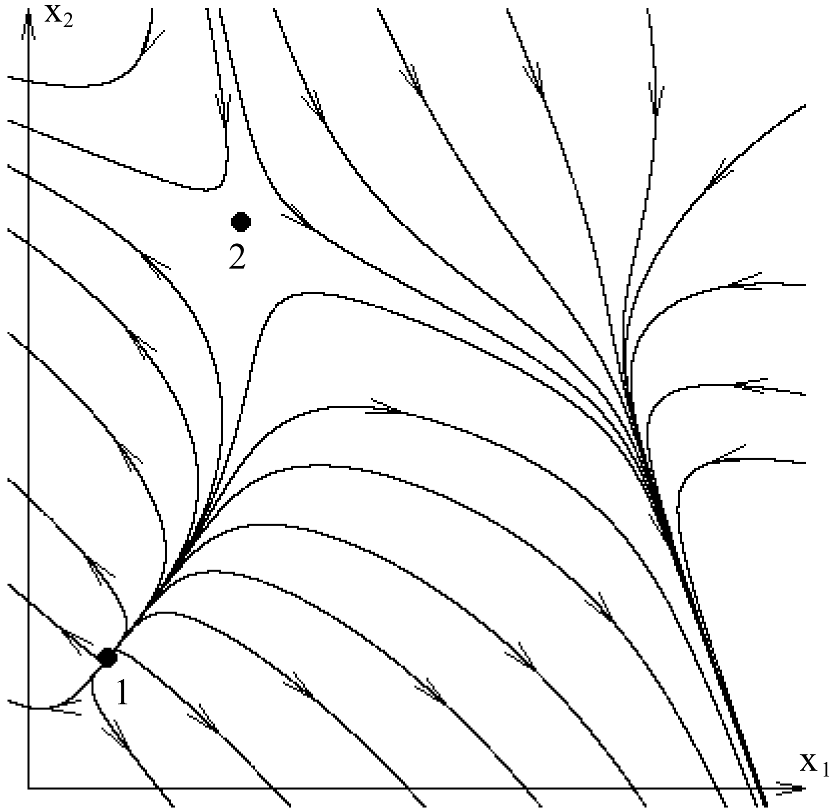

Рис. 18

Фазова площина, що відповідає випадку $e_0 < 0$, зображена на рисунку 19. Тепер особлива точка 1 є сідлом, а точка 2 – стійким фокусом. Існує дуже великий діапазон початкових значень x_1 і x_2, що приводить до подальшого росту цих значень і їхньої стабілізації поблизу точки 2.

Таким чином, і в цьому випадку кращим є значення $e_0 < 0$, що відповідає переважному використанню власних інвестицій, а лише потім – із сусіднього сектора.

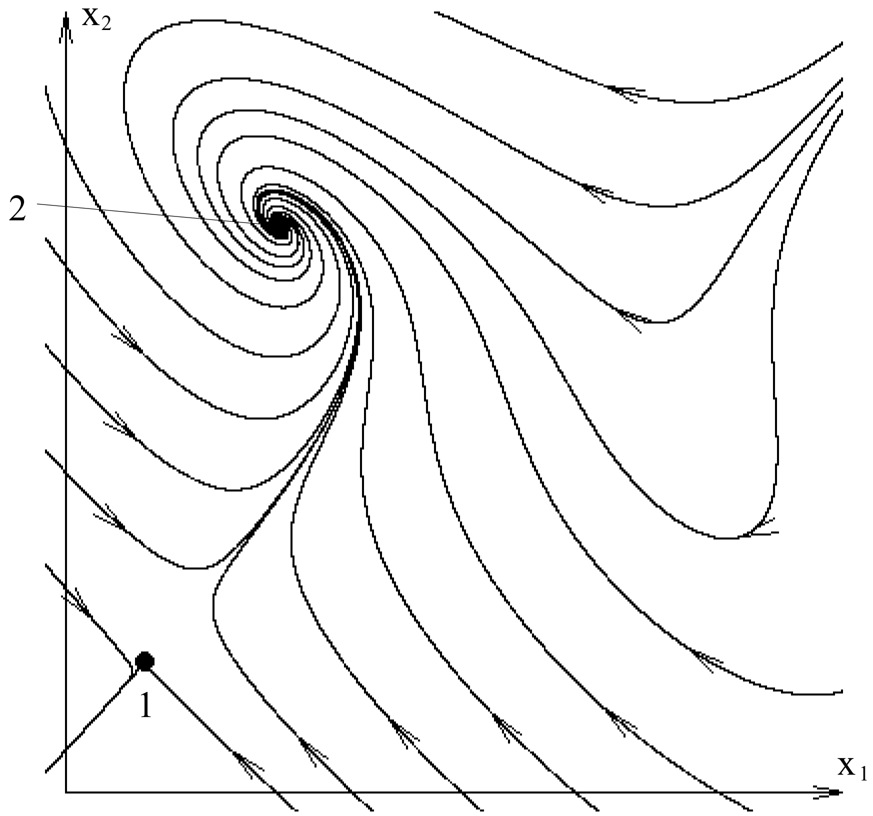

Рис. 19

Нарешті, у випадку відсутності станів рівноваги системи як при $e_0 > 0$, так і при $e_0 < 0$ ми маємо тільки убування величин x_1 і x_2 при будь-яких початкових умовах. Відповідні фазові площини зображені на рисунках 20 і 21.

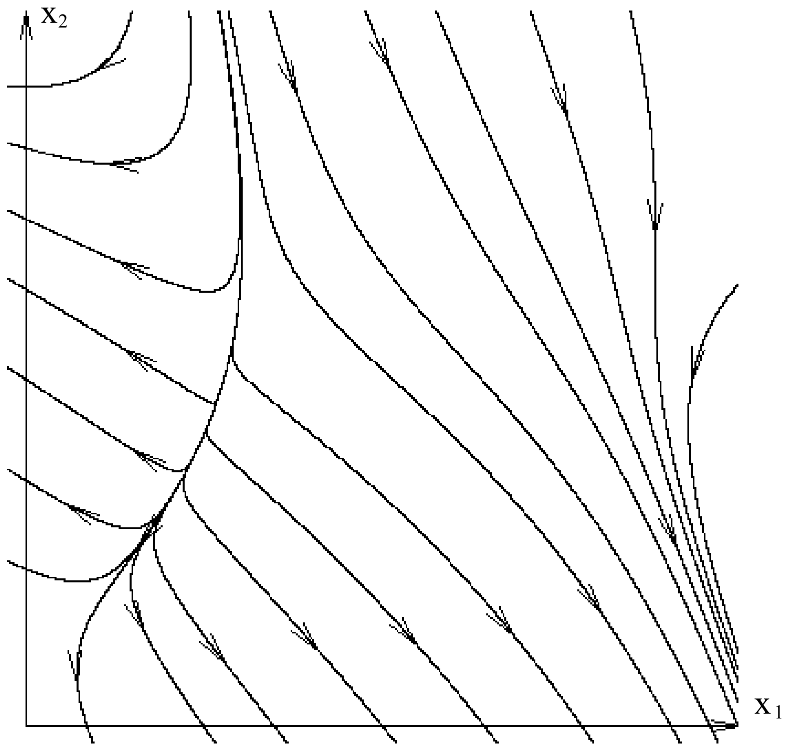

Рис.20

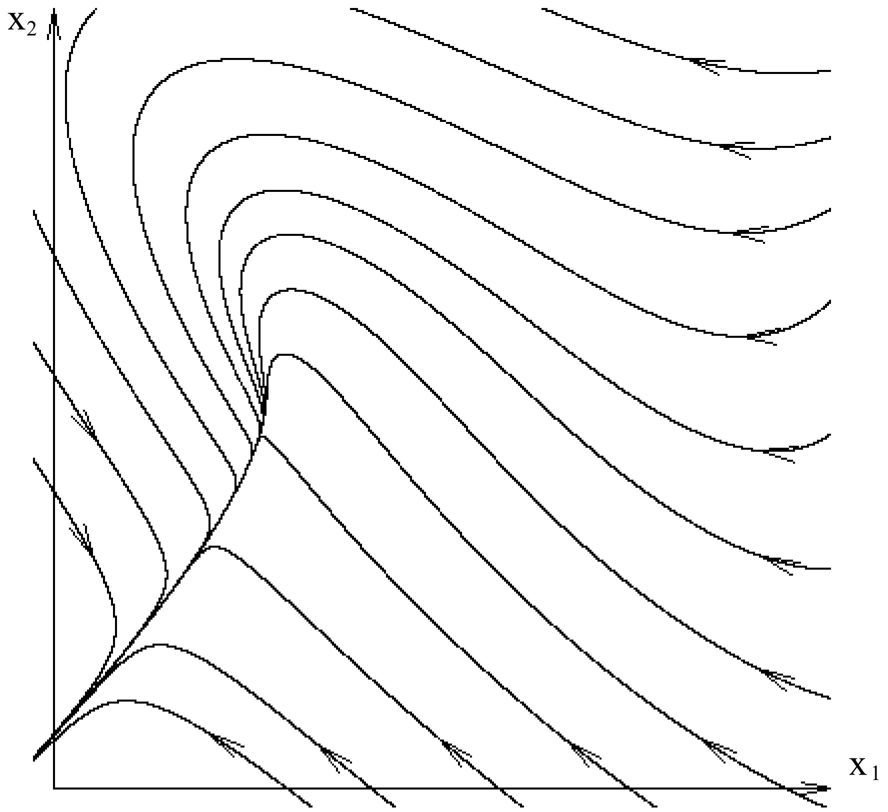

Рис. 21

Ми розглянули тільки декілька найбільш типових варіантів рішень системи нелінійних динамічних рівнянь (4.3.6). Зрозуміло, що у нелінійному випадку мається нескінченна розмаїтість різних варіантів, відмінних від розглянутих.

4.4 Особливий випадок розв'язку нелінійних рівнянь

Якщо час окупності інвестицій у той самий сектор не залежить від джерела фінансування, тобто справедливі рівності:

$$\nu_{11} = \nu_{21} = \nu_1,\ \nu_{12} = \nu_{22} = \nu_2\ , \qquad (4.4.1)$$

те $e_0 = 0$ і рівняння (4.3.2) приймуть вид:

$$x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2) = \nu_1 \frac{dx_1}{dt} + \nu_2 \frac{dx_2}{dt} \qquad (4.4.2)$$

$$x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) - y_2(x_1,\ x_2) = \nu_1 \frac{dx_1}{dt} + \nu_2 \frac{dx_2}{dt}$$

У цьому випадку неможливо розв’язати рівняння (4.4.2) відносно похідних. Однак ми можемо зробити так само, як у лінійному випадку, замінивши друге з рівнянь на різницю першого і другого рівняння:

$$x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2) = \nu_1 \frac{dx_1}{dt} + \nu_2 \frac{dx_2}{dt} \quad (4.4.3)$$
$$x_1 - x_2 - w_{11}(x_1,\ x_2) + w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) + w_{22}(x_1,\ x_2) -$$
$$- y_1(x_1,\ x_2) + y_2(x_1,\ x_2) = 0$$

Друге з рівнянь (4.4.3) задає якусь криву на фазовій площині $x_1,\ x_2$, тобто визначає зв'язок між величинами x_1 і x_2:

$$F(x_1,\ x_2) = 0 \quad (4.4.4)$$

Припустимо, що ми розв’язали співвідношення (4.4.4) відносно x_1:

$$x_1 = f(x_2) \quad (4.4.5)$$

Тоді можна записати:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{df}{dx_2}\frac{dx_2}{dt} \quad (4.4.6)$$

Підставляючи (4.4.5) і (4.4.6) у перше з рівнянь (4.4.3), одержуємо:

$$f(x_2) - w_{11}[f(x_2),\ x_2] - w_{12}[f(x_2),\ x_2] - y_1[f(x_2),\ x_2] = \quad (4.4.7)$$
$$= \nu_1 \frac{df}{dx_2}\frac{dx_2}{dt} + \nu_2 \frac{dx_2}{dt} = \left(\nu_1 \frac{df}{dx_2} + \nu_2\right)\frac{dx_2}{dt}, \text{ чи}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{(\nu_1\, df/dx_2 + \nu_2)}\{f(x_2) - w_{11}[f(x_2),\ x_2] - w_{12}[f(x_2),\ x_2] - y_1[f(x_2),\ x_2]\} \quad (4.4.8)$$

Таким чином, ми приходимо до одного диференціального рівняння щодо однієї шуканої функції $x_2 = x_2(t)$. Вирішуючи це рівняння яким-небудь чисельним методом, знаходимо, за допомогою (4.4.5), залежність $x_1 = x_1(t)$.

Перейдемо до конкретних прикладів. Підставляючи в (4.4.3) залежності (3.2.6) і (3.2.7), одержуємо рівняння:

$$-a_{11,0} - b_{1,0} + (1 - a_{11,1} - b_{1,1})x_1 - (a_{11,2} + b_{1,2})x_1^2 - a_{12}x_2 = \nu_1 \frac{dx_1}{dt} + \nu_2 \frac{dx_2}{dt} \quad (4.4.9)$$

$$-a_{22,0}-b_{2,0}+\left(1-a_{22,1}-b_{2,1}\right)x_2-\left(a_{22,2}+b_{2,2}\right)x_2^2-a_{21}x_1=\nu_1\frac{dx_1}{dt}+\nu_2\frac{dx_2}{dt}$$

Віднімаючи з першого рівняння друге і записуючи результат замість другого рівняння, маємо:

$$-a_{11,0}-b_{1,0}+\left(1-a_{11,1}-b_{1,1}\right)x_1-\left(a_{11,2}+b_{1,2}\right)x_1^2-a_{12}x_2=\nu_1\frac{dx_1}{dt}+\nu_2\frac{dx_2}{dt} \quad (4.4.10)$$
$$a_{22,0}+b_{2,0}-a_{11,0}-b_{1,0}+\left(1+a_{21}-a_{11,1}-b_{1,1}\right)x_1-\left(1+a_{12}-a_{22,1}-b_{2,1}\right)x_2-$$
$$-\left(a_{11,2}+b_{1,2}\right)x_1^2+\left(a_{22,2}+b_{2,2}\right)x_2^2=0$$

Записане на другому місці в (4.4.10) статичне рівняння задає криві на площині x_1, x_2. На рисунках 22-24 приведені зображення цих кривих (жирні лінії) разом із кривими, аналогічними приведеними на рисунках 12-14 (тонкі лінії) і статичним задачам, що їм відповідають.

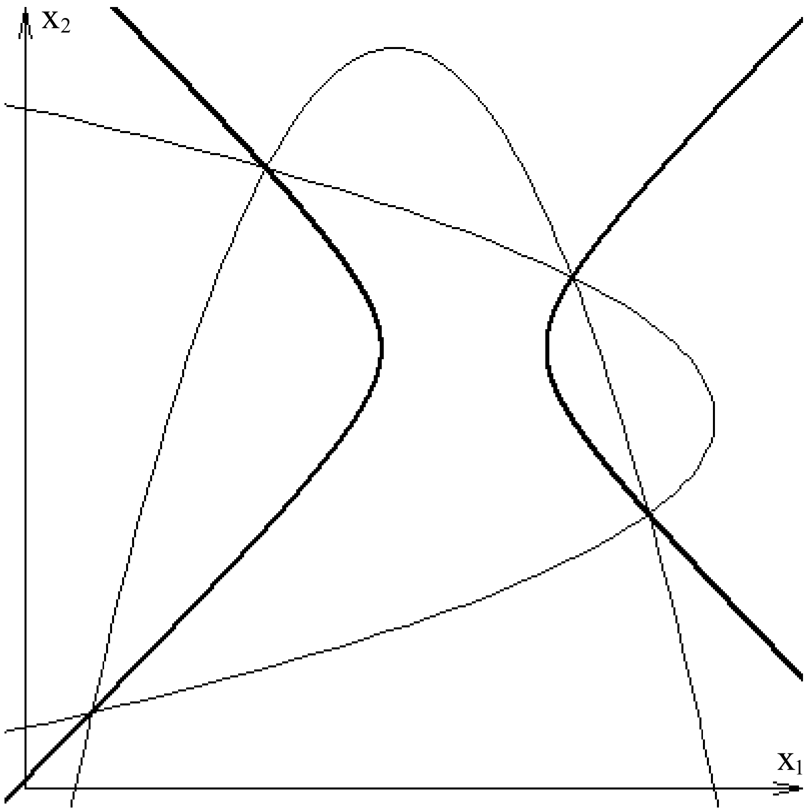

Рис. 22

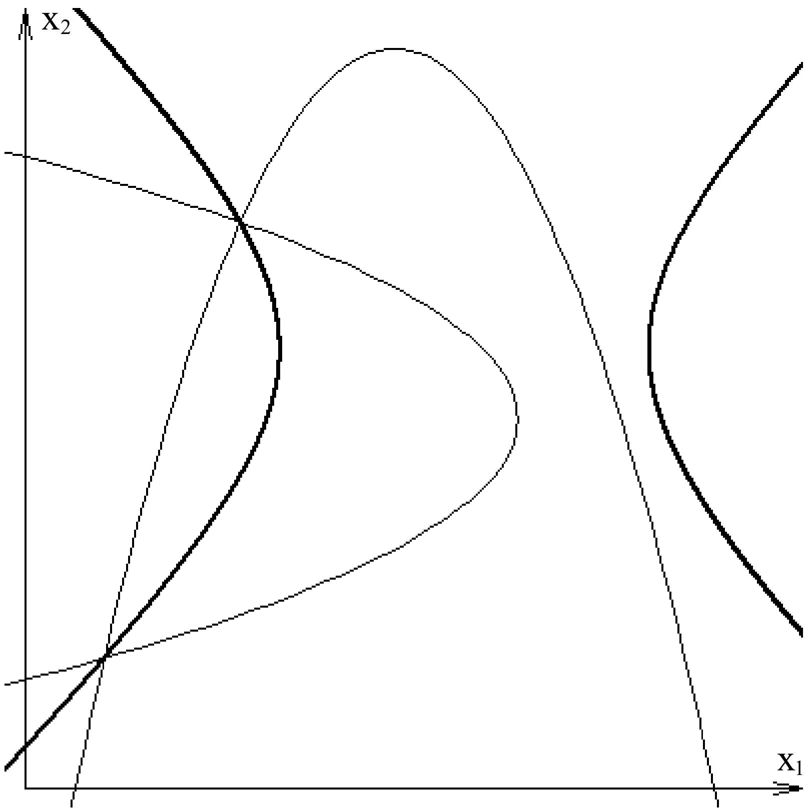

Рис. 23

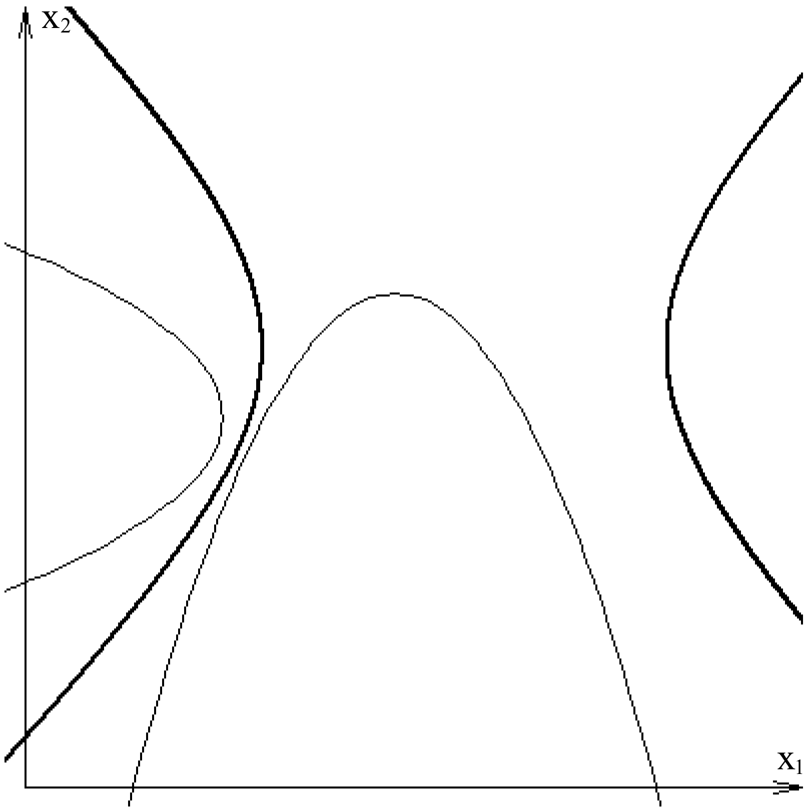

Рис. 24

Ми бачимо, що в тих випадках, коли існують чотири положення рівноваги системи (що відповідають точкам перетинання тонких ліній), знову побудовані криві проходять через ці положення рівноваги.

При наявності тільки двох положень рівноваги одна з ліній проходить через ці два положення, а інша – ні.

Для пошуку залежності виду (4.4.5) перетворимо друге з рівнянь (4.4.10) до виду:

$$ax_1^2 - bx_1 + c = 0, \tag{4.4.11}$$

де:

$$a = a_{11,2} + b_{1,2}, \quad b = 1 + a_{21} - a_{11,1} - b_{1,1} \tag{4.4.12}$$

$$c = a_{11,0} + b_{1,0} - a_{22,0} - b_{2,0} + (1 + a_{12} - a_{22,1} - b_{2,1})x_2 - (a_{22,2} + b_{2,2})x_2^2$$

Вирішуючи квадратне рівняння (4.4.11) відносно x_1 при заданому x_2 одержуємо:

$$x_1 = f(x_2) = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.4.13}$$

Двом різним знакам перед радикалом у (4.4.13) відповідають дві гілки кривих, зображених на рис. 4.4.1..4.4.3.

З (4.4.13) одержуємо:

$$\frac{df}{dx_2} = \mp \frac{1 + a_{12} - a_{22,1} - b_{2,1} - 2(a_{22,2} + b_{2,2})x_2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{4.4.14}$$

З урахуванням (4.4.6), (4.4.12)..(4.4.14) перше з рівнянь (4.4.10) здобуває вигляду:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-a_{11,0} - b_{1,0} + (1 - a_{11,1} - b_{1,1})f(x_2) - (a_{11,2} + b_{1,2})f^2(x_2) - a_{12}x_2}{\nu_1 \, df/dx_2 + \nu_2} \tag{4.4.15}$$

Вирішуючи це рівняння чисельним методом, знаходимо залежність $x_2 = x_2(t)$, а потім, за допомогою (4.4.13), залежність $x_1 = x_1(t)$. З їхньою допомогою можна побудувати і фазові криві на площині x_1, x_2. Їхньою відмінністю від кривих, приведених на рис. 4.4.1..4.4.3 (жирні лінії) буде те, що тепер ми можемо уявити собі характер руху по кривих. На рисунку 25 приведені відповідні результати для випадку чотирьох положень рівноваги системи з зображенням цих положень і напрямків руху по фазових кривих, що вказуються стрілочками.

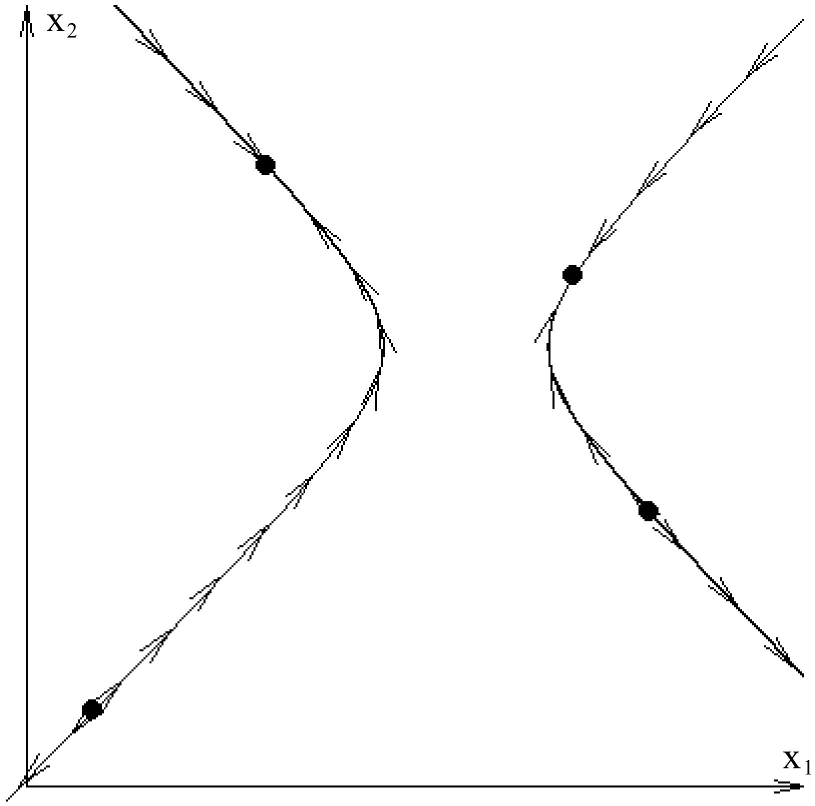

Рис. 25

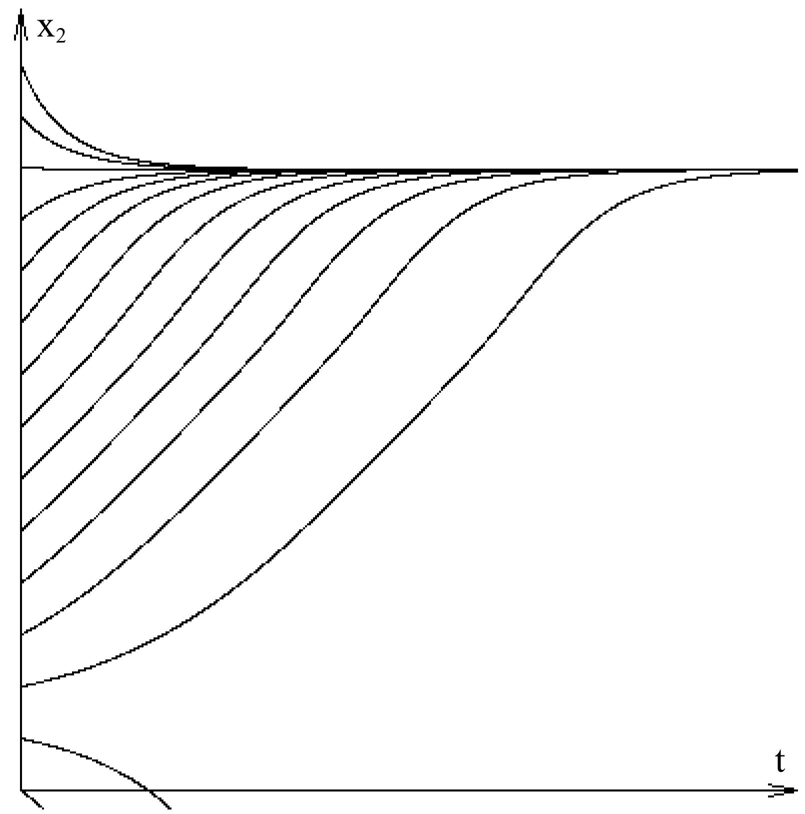

Рис. 26

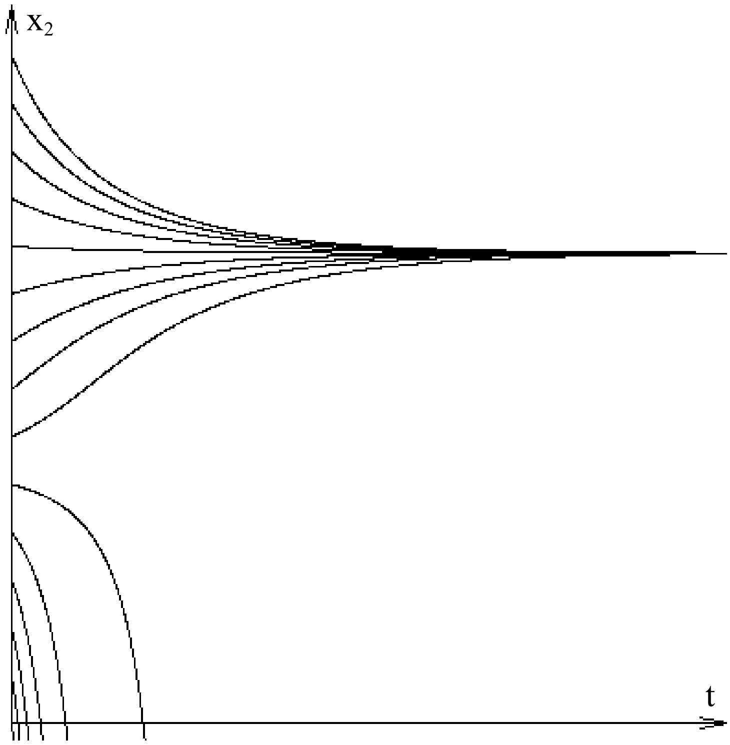

Рис. 27

Ми бачимо, що в проміжку між положеннями рівноваги спостерігається ріст величини x_2, а вище і нижче цих положень – зменшення цієї величини. На фазовій площині відсутній час; тому на рисунках 25-29окремо приведені графіки залежностей $x_2 = x_2(t)$ і $x_1 = x_1(t)$.

Графіки на рисунку 25 відповідають лівій фазовій кривій рисунку 26, а графіки на рисунку 27– правій фазовій кривій; в обох випадках відображаються залежності $x_2 = x_2(t)$.

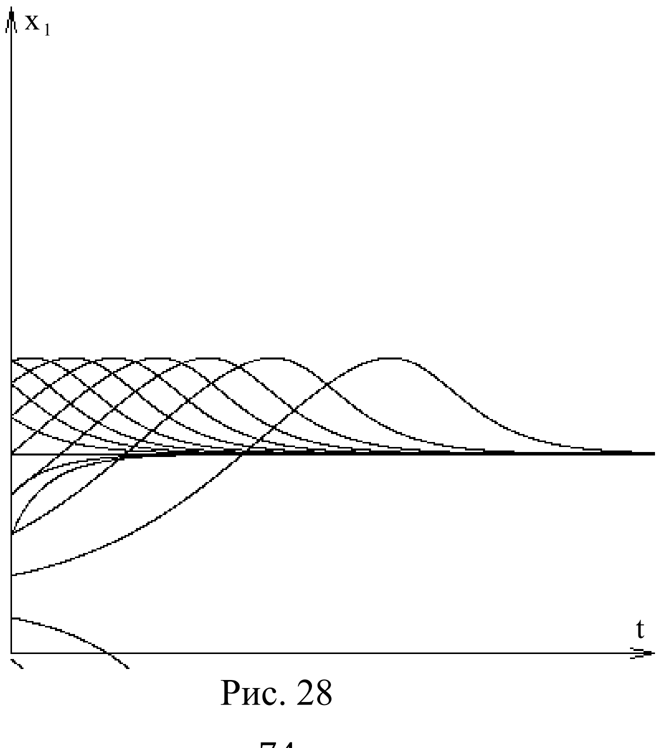

Рис. 28

Аналогічно, на рисунку 28 наведений графік залежностей $x_1 = x_1(t)$, що відповідають лівій фазовій кривій рисунку 25, а на рисунку 29– залежностей, що відповідають правій фазовій кривій.

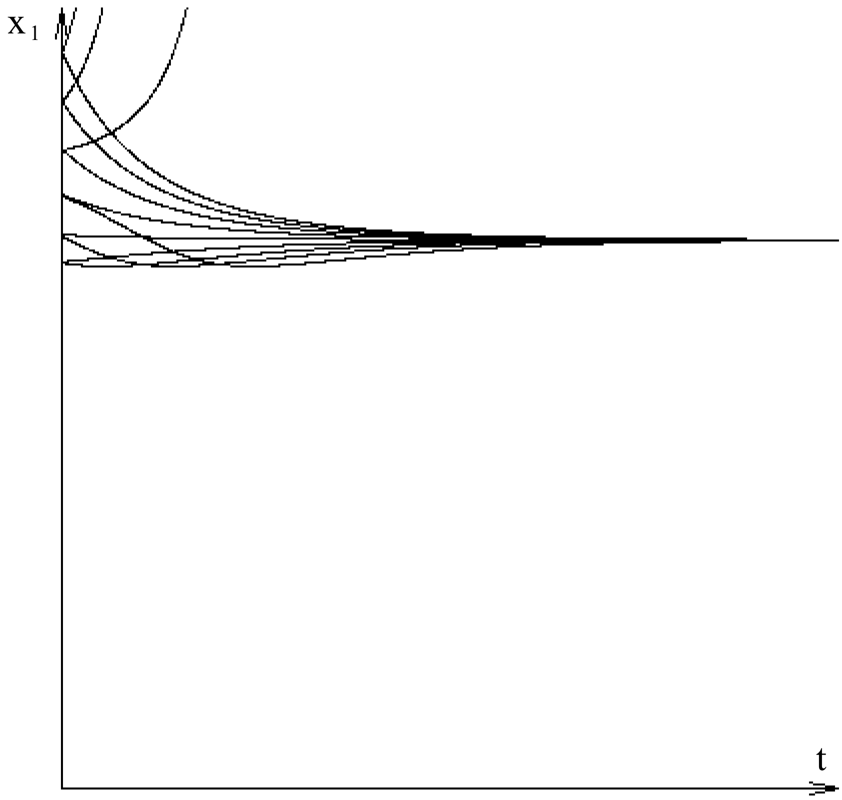

Рис. 29

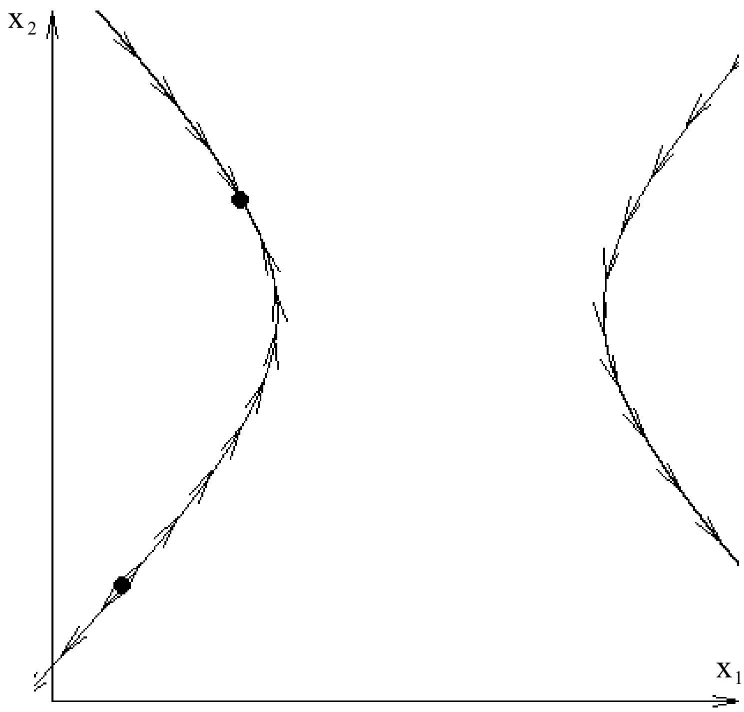

Рис. 30

На рис. 30 зображена фазова площина для випадку двох положень рівноваги системи. Обоє ці положення розташовані на лівій фазовій кривій. На ділянці між ними спостерігається ріст величини x_2. Поза цією ділянкою – зменшення. На правій фазовій кривій, де відсутні положення рівноваги, спостерігається тільки убування x_2.

На рисунку 31 зображені графіки залежностей $x_2 = x_2(t)$, що відповідають, у цьому випадку, лівої фазової кривої.

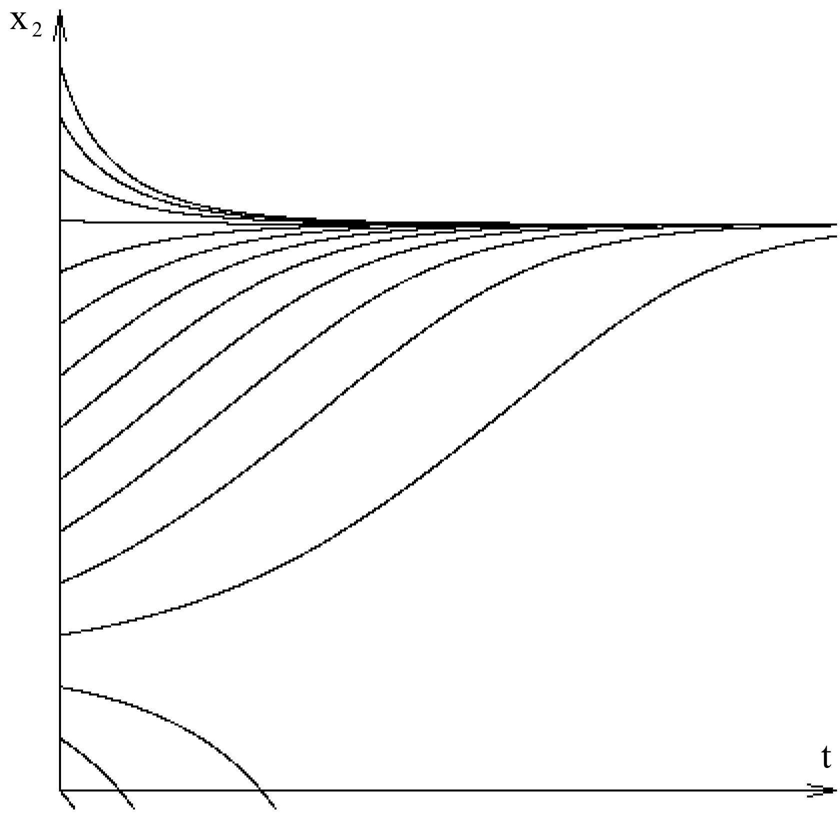

Рис. 31

На рисунку 32 зображені аналогічні залежності, що відповідають правої фазової кривої.

На рисунку 33 зображені залежності $x_1 = x_1(t)$, що відповідають лівої фазової кривої, а на рисунку 34, аналогічні залежності, що відповідають правій фазовій кривій.

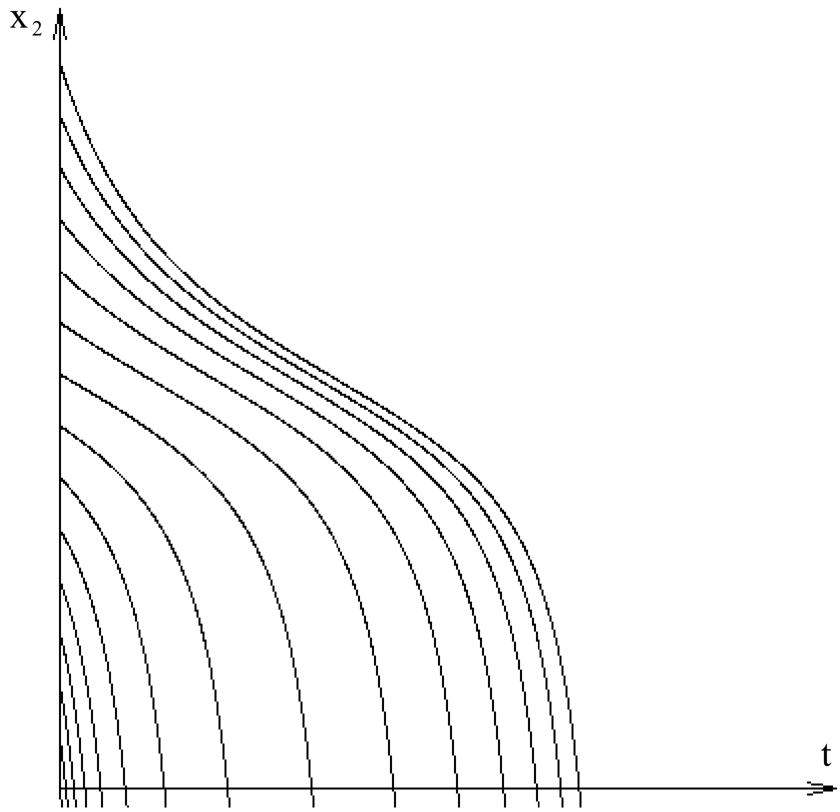

Рис. 32

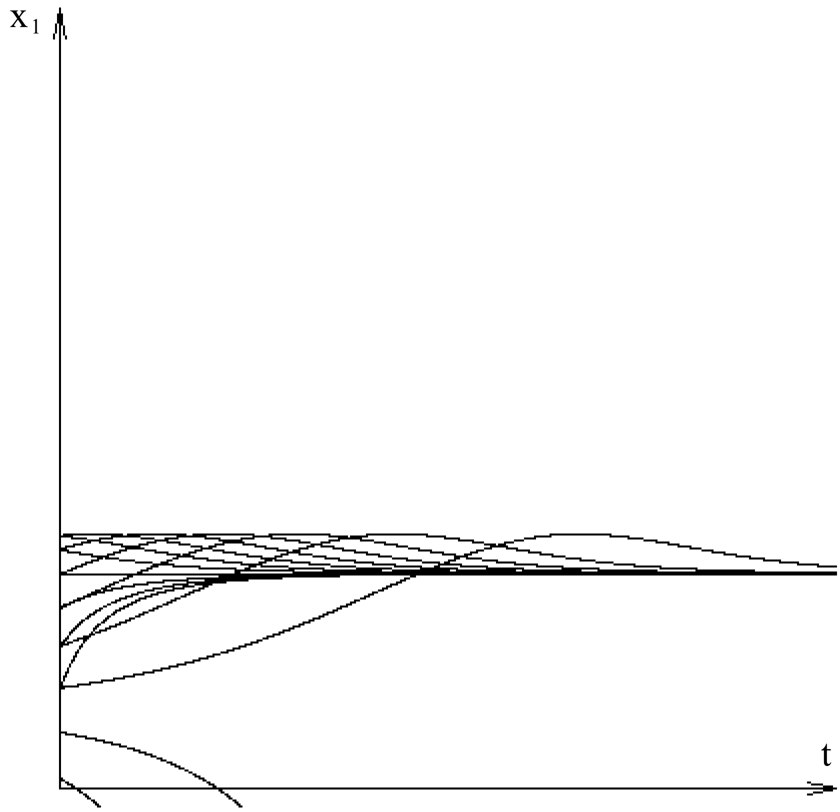

Рис. 33

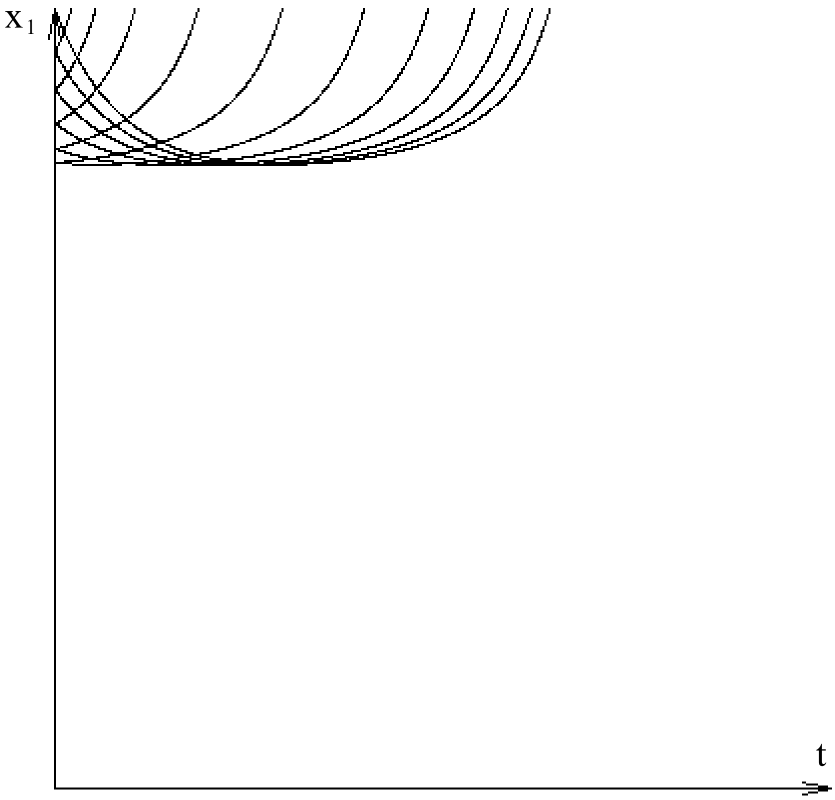

Рис. 34

Нарешті, на рисунку 35 зображена фазова площина для випадку системи, що не має положень рівноваги. У цьому випадку на обох фазових кривих спостерігається тільки убування величини x_2.

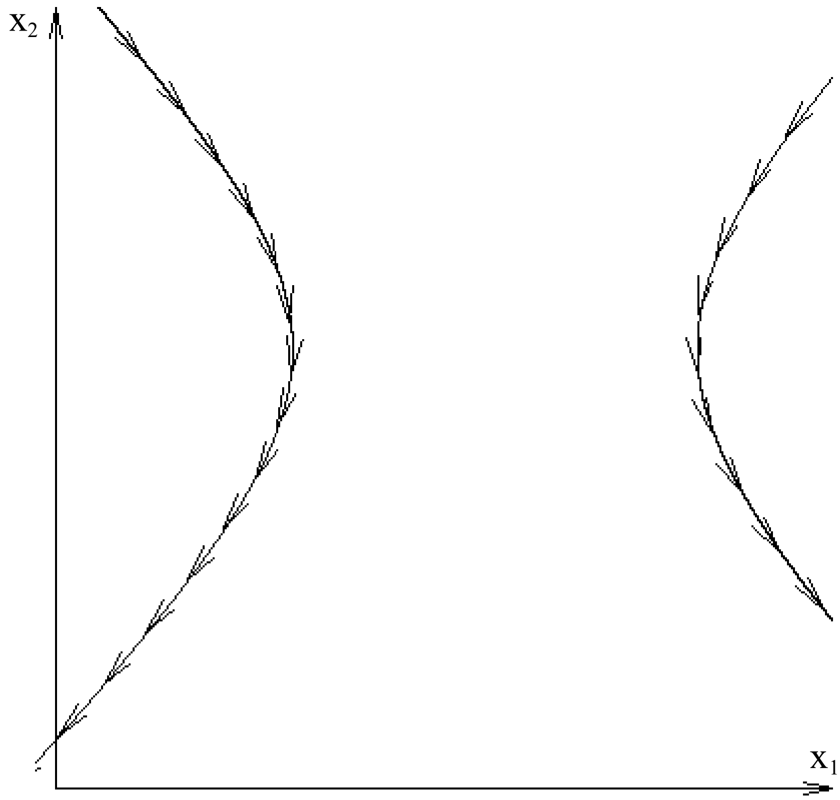

Рис. 35

На рисунку 36 зображені графіки залежностей $x_2 = x_2(t)$, що відповідають лівій фазовій кривій, а на рисунку 37– правій кривій.

Аналогічно, на рисунку 37 зображені графіки залежностей $x_1 = x_1(t)$, що відповідають лівій фазовій кривій, а на рисунку 39– правій кривій.

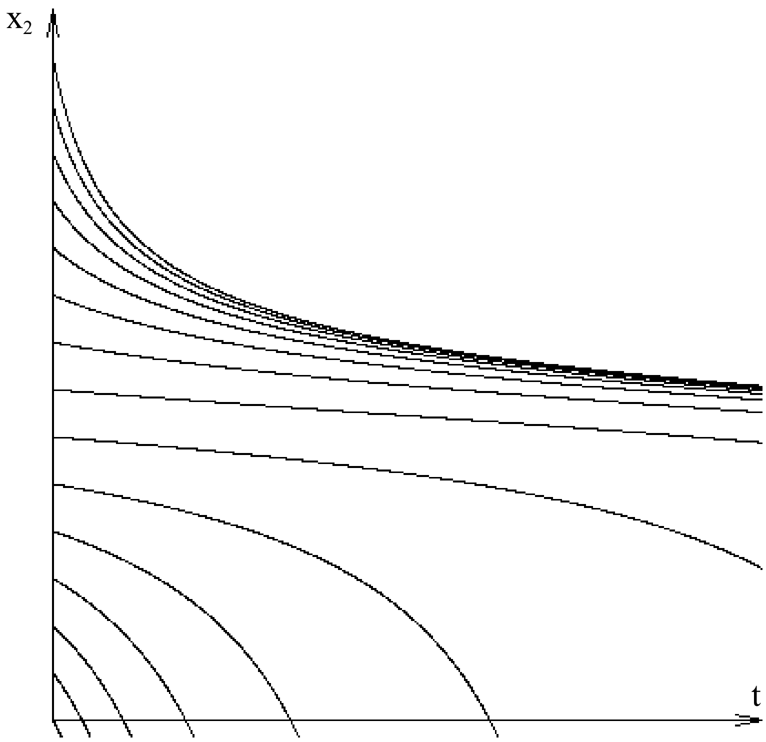

Рис. 36

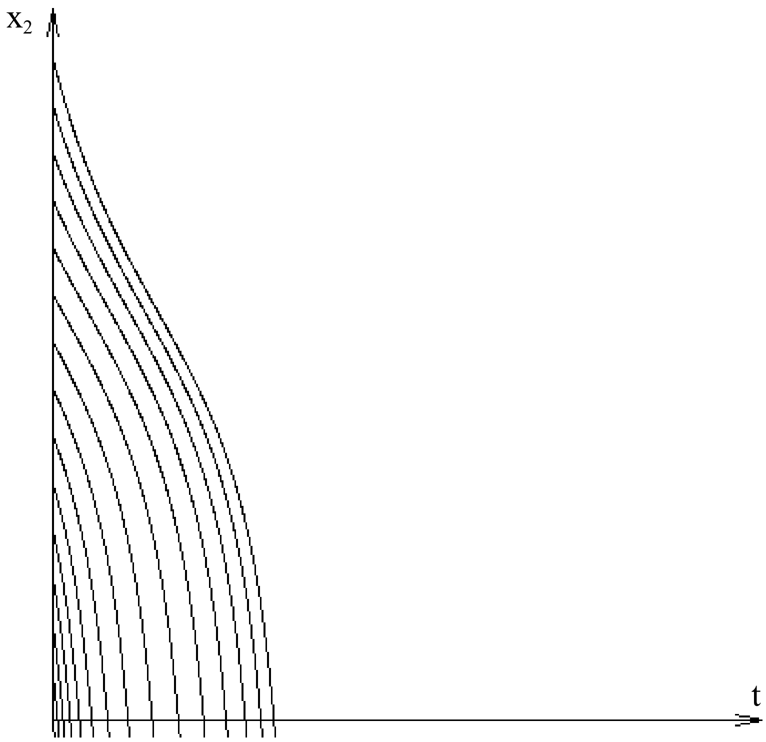

Рис. 37

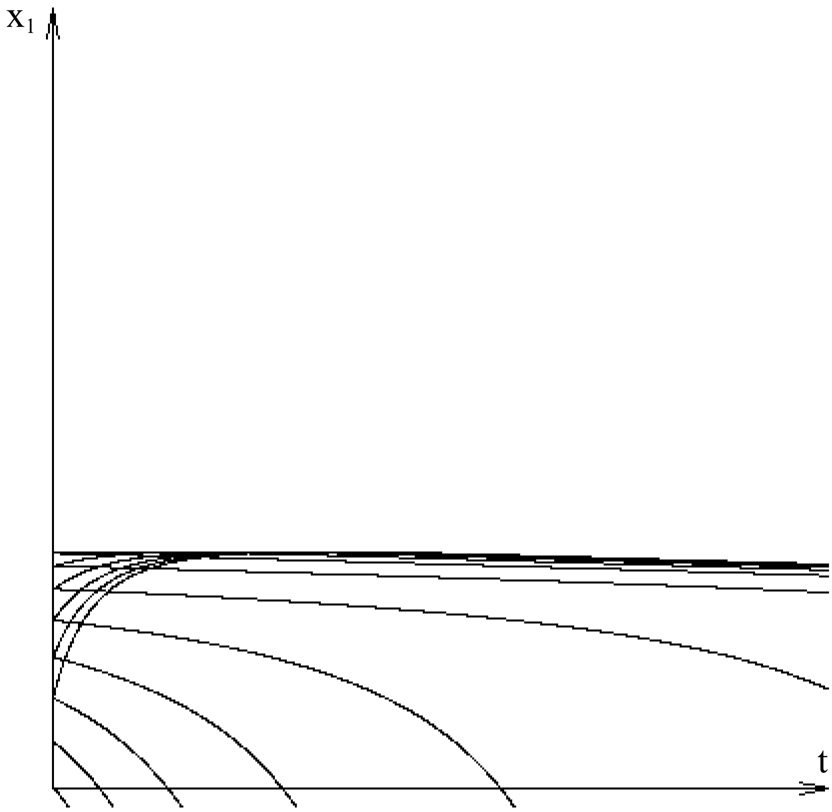

Рис. 38

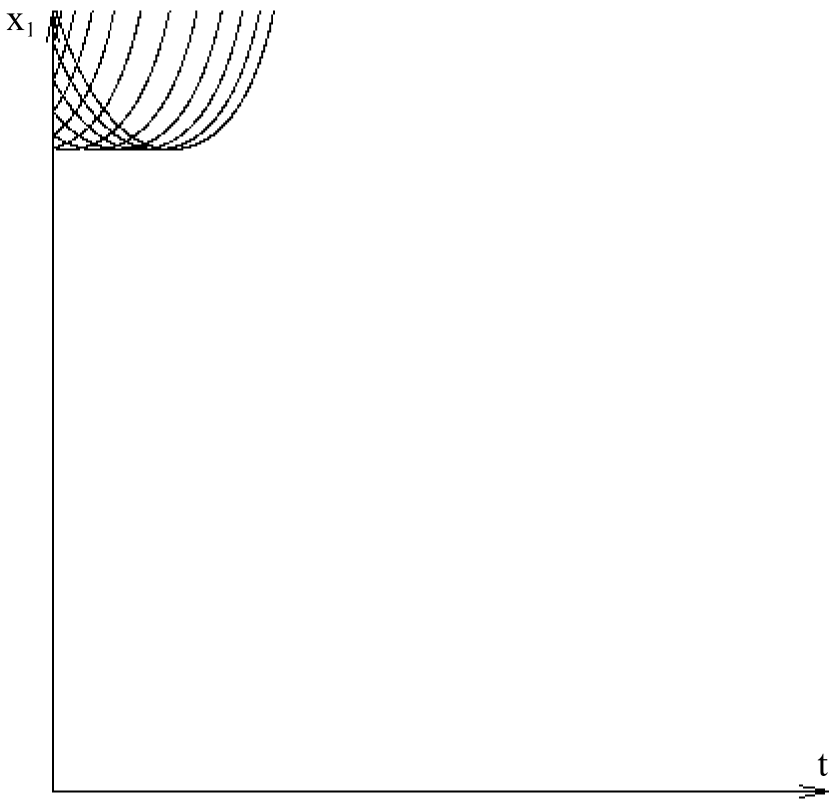

Рис. 39

Розглянута тільки частина можливих результатів, але і вона показує різноманіття варіантів поводження нелінійної системи при досліджуваних характеристиках коефіцієнтів фондомісткості.

4.5 Аналітичне дослідження особливих точок у двосекторному випадку

Чисельне інтегрування нелінійних динамічних рівнянь виду (4.3.2) привело, у конкретних випадках, до фазових площин (рис. 16-19), на яких важливу роль грають особливі точки. Однак характер цих особливих точок визначався тільки для тих окремих випадків, для яких проводилися розрахунки. У силу цього отримані результати не носять загального характеру.

Використовуючи аналітичні методи, ми можемо дати повну характеристику всім можливим видам особливих точок і їх впливу на поводження досліджуваних економічних систем.

Нехай відомо якесь положення рівноваги системи $\left(x_1^*,\ x_2^*\right)$, тобто значення величин $x_1,\ x_2$, що задовольняють статичним рівнянням:

$$\begin{aligned} x_1^* - w_{11}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - w_{12}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - y_1\left(x_1^*,\ x_2^*\right) = 0 \\ x_2^* - w_{21}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - w_{22}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - y_2\left(x_1^*,\ x_2^*\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Перенесемо початок координат на площині x_1, x_2 в положення $\left(x_1^*,\ x_2^*\right)$ за допомогою замін:

$$x_1 = x_1^* + z_1,\ x_2 = x_2^* + z_2 \ \Rightarrow\ z_1 = x_1 - x_1^*,\ z_2 = x_2 - x_2^* \tag{4.5.2}$$

Врахуємо наступні співвідношення:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt},\quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dz_2}{dt}, \tag{4.5.3}$$

і розкладемо усі функції, що входять у рівняння (4.3.2), у ряди Тейлора в околі точки $\left(x_1^*,\ x_2^*\right)$ з утриманням тільки лінійних доданків:

$$\begin{aligned} w_{11} &\approx w_{11}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) + w_{11,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 + w_{11,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 \\ w_{12} &\approx w_{12}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) + w_{12,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 + w_{12,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 \\ y_1 &\approx y_1\left(x_1^*,\ x_2^*\right) + y_{1,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 + y_{1,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 \\ w_{21} &\approx w_{21}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) + w_{21,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 + w_{21,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 \\ w_{22} &\approx w_{22}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) + w_{22,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 + w_{22,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 \\ y_2 &\approx y_2\left(x_1^*,\ x_2^*\right) + y_{2,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 + y_{2,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Тут нижній індекс 1 чи 2 після коми означає похідну по відповідній координаті x_1 чи x_2.

Підставляючи (4.5.3) і (4.5.4) у (4.3.2), одержуємо:

$$\begin{aligned}
&x_1^* + z_1 - w_{11}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - w_{11,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 - w_{11,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 - \\
&- w_{12}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - w_{12,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 - w_{12,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 - \\
&- y_1\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - y_{1,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 - y_{1,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 = \nu_{11}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dz_2}{dt} \\
&x_2^* + z_2 - w_{21}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - w_{21,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 - w_{21,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 - \\
&- w_{22}\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - w_{22,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 - w_{22,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 - \\
&- y_2\left(x_1^*,\ x_2^*\right) - y_{2,1}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_1 - y_{2,2}\left(x_1^*,\ x_2^*\right)z_2 = \nu_{21}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dz_2}{dt}
\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Відкидаючи в (4.5.5) ті що складові, що, у силу (4.5.1), обертаються в сумі в нуль, приходимо до системи лінійних рівнянь, що описують малу околицю положення рівноваги:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^*\right)z_1 - \left(w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right)z_2 = \nu_{11}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dz_2}{dt} \\
&-\left(w_{21,1}^* + w_{22,1}^* + y_{2,1}^*\right)z_1 + \left(1 - w_{21,2}^* - w_{22,2}^* - y_{2,2}^*\right)z_2 = \nu_{21}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dz_2}{dt}
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Тут, для стислості запису, зірочкою зверху позначено, що відповідні функції обчислюються в точці $\left(x_1^*,\ x_2^*\right)$.

Переходимо до рішення рівнянь (4.5.6), розшукуючи шукані функції у виді:

$$z_1 = A_1 e^{kt},\ z_2 = A_2 e^{kt} \tag{4.5.7}$$

Підставляючи (4.5.7) у (4.5.6) і скорочуючи загальний множник e^{kt} одержуємо систему алгебраїчних рівнянь щодо величин $A_1,\ A_2$:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* - \nu_{11}k\right)A_1 - \left(w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^* + \nu_{12}k\right)A_2 = 0 \\
&-\left(w_{21,1}^* + w_{22,1}^* + y_{2,1}^* + \nu_{21}k\right)A_1 + \left(1 - w_{21,2}^* - w_{22,2}^* - y_{2,2}^* - \nu_{22}k\right)A_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Умовою існування нетривіального ненульового рішення цієї системи рівнянь буде рівність нулю її визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(1 - w^*_{11,1} - w^*_{12,1} - y^*_{1,1} - \nu_{11}k\right) & -\left(w^*_{11,2} + w^*_{12,2} + y^*_{1,2} + \nu_{12}k\right) \\ -\left(w^*_{21,1} + w^*_{22,1} + y^*_{2,1} + \nu_{21}k\right) & \left(1 - w^*_{21,2} - w^*_{22,2} - y^*_{2,2} - \nu_{22}k\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5.9)$$

Розкриваючи цей визначник і приводячи подібні по однакових степенях величини k, приходимо до характеристичного рівняння:

$$e_0 k^2 - e_1 k + e_2 = 0 \quad (4.5.10)$$

$$e_0 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}$$

$$e_1 = \left(1 - w^*_{11,1} - w^*_{12,1} - y^*_{1,1}\right)\nu_{22} + \left(1 - w^*_{21,2} - w^*_{22,2} - y^*_{2,2}\right)\nu_{11} + \\ + \left(w^*_{21,1} + w^*_{22,1} + y^*_{2,1}\right)\nu_{12} + \left(w^*_{11,2} + w^*_{12,2} + y^*_{1,2}\right)\nu_{21}$$

$$e_2 = \left(1 - w^*_{11,1} - w^*_{12,1} - y^*_{1,1}\right)\left(1 - w^*_{21,2} - w^*_{22,2} - y^*_{2,2}\right) - \\ - \left(w^*_{21,1} + w^*_{22,1} + y^*_{2,1}\right)\left(w^*_{11,2} + w^*_{12,2} + y^*_{1,2}\right)$$

Вирішуючи це квадратне рівняння, одержуємо два корені, що можуть бути як дійсними, так і комплексними сполученими. Вид цих коренів і визначає характер особливої точки – положення рівноваги. Нагадаємо відповідні зведення.

Якщо обидва корені дійсні й одного знака, то маємо особливу точку типу вузол. При додатних коренях вузол хитливий (наприклад, точка 1 на рисунку 16), а при від'ємних коренях – стійкий (точка 2 на рисунку 16).

Якщо знаки коренів протилежні, то маємо хитливу особливу точку типу сідло (наприклад, точки 3 і 4 на рисунку 16).

При комплексних коренях маємо особливу точку типу фокус. Фокус може бути стійким при від'ємній дійсній частині (наприклад, точки 3 і 4 на рисунку 17), а може бути хитливим при додатній дійсній частині. Відповідних прикладів на раніше зображених малюнках не мається, але вони цілком реальні.

Підводячи підсумки, можна сказати, що аналітичне дослідження вигідно відрізняється від чисельного тем, що ми одержуємо результати у виді формул, що дозволяють вивчити внесок усіх вихідних параметрів системи в результат, а також одержати повну класифікацію всіх можливих варіантів.

4.6 Дослідження положень рівноваги в особливому випадку

Проаналізуємо особливі точки, виходячи з рівнянь (4.4.3). Нехай знову дане положення рівноваги, тобто пара значень $\left(x^*_1,\ x^*_2\right)$, що задовольняють рівнянням (4.5.1). Знову виконаємо заміну (4.5.2) і розкладання (4.5.4). Підстановка (4.5.3) і (4.5.4) у (4.4.3) дає:

$$x^*_1 + z_1 - w^*_{11} - w^*_{11,1}z_1 - w^*_{11,2}z_2 - w^*_{12} - w^*_{12,1}z_1 - w^*_{12,2}z_2 - \quad (4.6.1)$$

$$-y_1^* - y_{1,1}^* z_1 - y_{1,2}^* z_2 = \nu_1 \frac{dz_1}{dt} + \nu_2 \frac{dz_2}{dt}$$
$$x_1^* + z_1 - x_2^* - z_2 - w_{11}^* - w_{11,1}^* z_1 - w_{11,2}^* z_2 + w_{21}^* + w_{21,1}^* z_1 + w_{21,2}^* z_2 -$$
$$- w_{12}^* - w_{12,1}^* z_1 - w_{12,2}^* z_2 + w_{22}^* + w_{22,1}^* z_1 + w_{22,2}^* z_2 - y_1^* - y_{1,1}^* z_1 - y_{1,2}^* z_2 +$$
$$+ y_2^* + y_{2,1}^* z_1 + y_{2,2}^* z_2 = 0$$

Тут, як і раніше, зірочка над позначенням функції показує, що функція обчислена для значень аргументів $\left(x_1^*,\ x_2^*\right)$.

Відкидаємо в (4.6.1) ті доданки, що дають у сумі нуль у силу рівнянь (4.5.1), приходячи до лінійних однорідних рівнянь:

$$\left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^*\right) z_1 - \left(w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right) z_2 = \nu_1 \frac{dz_1}{dt} + \nu_2 \frac{dz_2}{dt} \quad (4.6.2)$$
$$\left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* + w_{21,1}^* + w_{22,1}^* + y_{2,1}^*\right) z_1 -$$
$$- \left(1 - w_{21,2}^* - w_{22,2}^* - y_{2,2}^* + w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right) z_2 = 0$$

Розшукуємо рішення цих рівнянь у виді (4.5.7). Підставляючи (4.5.7) у (4.6.2) і скорочуючи на e^{kt}, одержуємо алгебраїчні рівняння відносно $A_1,\ A_2$:

$$\left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* - \nu_1 k\right) A_1 - \left(w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^* + \nu_2 k\right) A_2 = 0 \quad (4.6.3)$$
$$\left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* + w_{21,1}^* + w_{22,1}^* + y_{2,1}^*\right) A_1 -$$
$$- \left(1 - w_{21,2}^* - w_{22,2}^* - y_{2,2}^* + w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right) A_2 = 0$$

Дорівнюємо до нуля визначник цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* - \nu_1 k\right) & -\left(w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^* + \nu_2 k\right) \\ \left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* + w_{21,1}^* + w_{22,1}^* + y_{2,1}^*\right) & -\left(1 - w_{21,2}^* - w_{22,2}^* - y_{2,2}^* + w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right) \end{vmatrix} = 0$$

одержуючи характеристичне рівняння:

$$c_0 k + c_1 = 0 \quad (4.6.4)$$
$$c_0 = \nu_1 \left(1 - w_{21,2}^* - w_{22,2}^* - y_{2,2}^* + w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right) +$$
$$+ \nu_2 \left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* + w_{21,1}^* + w_{22,2}^* + y_{2,1}^*\right)$$
$$c_1 = \left(w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right)\left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^* + w_{21,1}^* + w_{22,2}^* + y_{2,1}^*\right) -$$
$$- \left(1 - w_{11,1}^* - w_{12,1}^* - y_{1,1}^*\right)\left(1 - w_{21,2}^* - w_{22,2}^* - y_{2,2}^* + w_{11,2}^* + w_{12,2}^* + y_{1,2}^*\right)$$

з рішенням:

$$k = -\frac{c_1}{c_0} \tag{4.6.5}$$

Додатному значенню кореня відповідає хитке положення рівноваги (наприклад, два нижніх положення рівноваги на рис. 4.4.1), від'ємному – стійке (наприклад, два верхніх положення рівноваги на тім же рисунку).

Висновки. Розглянуті нелінійні економічні моделі дозволили виявити ряд принципово нових явищ, що не висвітлюються в лінійних моделях.

Показано, на прикладах одно- і двосекторних економічних систем, способи переходу цих систем з хитливого стану рівноваги в стійке. Досліджені випадки зміни кількості станів рівноваги аж до їхнього повного зникнення і ті наслідки, що випливають з цього для режимів еволюціонування економічних систем.

Нелінійні економічні моделі дозволили вивчити вплив способів взаємного інвестування секторів на результати еволюції системи. Показано, що зовні малоістотні зміни режимів інвестування можуть привести до принципової зміни динаміки систем аж до зміни режимів еволюції від росту до руйнування.

У цілому виявлена важлива роль врахування нелінійних ефектів при дослідженні поводження економічних систем.

4.7 Питання для контролю

1. Опишіть різні загальні випадки динамічних нелінійних рівнянь для односекторної економічної системи.

2. Опишіть частковий варіант динамічного нелінійного рівняння для односекторної економічної системи в квадратичному випадку.

3. Опишіть різні випадки динаміки нелінійної односекторної економічної системи, досліджені чисельним методом з використанням фазової площини.

4. Опишіть аналітичний спосіб вивчення стійкості положень рівноваги нелінійної односекторної економічної системи.

5. Опишіть загальні підходи при складанні нелінійних динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи.

6. Уточнить вид нелінійних динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи у випадку квадратичних залежностей для параметрів.

7. Опишіть спосіб чисельного інтегрування нелінійних динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи з використанням методу фазової площини.

8. Опишіть вплив режимів взаємного інвестування секторів на способи еволюціонування двосекторної економічної системи.

9. Опишіть особливий випадок рішення нелінійних динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи.

10. Опишіть результати чисельного інтегрування нелінійних динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи в особливому випадку.

11. Опишіть метод аналітичного дослідження особливих точок на фазовій площині в загальному випадку нелінійної двосекторної економічної системи.

12. Опишіть метод аналітичного дослідження особливих точок на фазовій площині в особливому випадку нелінійної двосекторної економічної системи.

4.8 Теми лабораторних робіт

1. Складіть програму, що дозволяє, за допомогою чисельного інтегрування нелінійного динамічного рівняння, досліджувати еволюцію односекторної економічної системи. Чисельне інтегрування сполучати з використанням методу фазової площини.

2. Виконати дослідження різних режимів еволюціонування односекторної економічної системи за допомогою складеної в першій лабораторній роботі програми.

3. Скласти програму, що дозволяє, за допомогою чисельного інтегрування нелінійних динамічних рівнянь, досліджувати еволюцію двосекторної економічної системи. Результати чисельного інтегрування зображувати графічно на фазовій площині.

4. Виконати дослідження різних режимів еволюціонування двосекторної економічної системи за допомогою складеної в третій лабораторній роботі програми.

РОЗДІЛ 5 ДИСКРЕТНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ

У попередніх главах за основу при описі динаміки економічних систем прийнятий апарат диференціальних рівнянь, як добре розвинутий у математичному відношенні і дозволяє упевнено реалізовувати як етап складання моделі, так і етап розв'язку рівнянь і аналізу результатів рішення.

У той же час, відомо, що економічні процеси носять принципово дискретний характер. Платежі відбуваються через кінцеві проміжки часу і кінцевими сумами. Доход тієї чи іншої економічної системи – підприємства, держави – обчислюється також через кінцеві проміжки часу і кінцевими сумами. Усе це дозволяє затверджувати, що континуальні моделі, що спираються на апарат диференціальних рівнянь, є в даному випадку свідомо наближеними, що згладжують реальні дискретні процеси.

Дана глава присвячена питанням складання дискретних економічних моделей і аналізу сценаріїв розвитку на базі цих моделей.

Дискретні моделі дозволяють врахувати ряд питань більш точно, чим континуальні; у той же час їхня реалізація на комп'ютері більш проста і природна, чим у континуальному випадку.

5.1 Динаміка Ферхюльста

Почнемо не з економічної, а з екологічної моделі [10]. Це зв'язано з тим, що екологічні й економічні моделі мають схожу форму, як це було показано в курсі системного аналізу, а також з тим, що саме в екологічних моделях уже мається досвід ефективного використання дискретних моделей.

Модель росту популяції. Нехай x_0 – початкова чисельність популяції, а x_n – її чисельність через n років. Коефіцієнтом приросту R називають відносна зміна чисельності за рік:

$$R=(x_{n+1}-x_n)/x_n. \tag{5.1.1}$$

Якщо ця величина – константа *r*, то закон, керуючий динамікою, має вид:

$$x_{n+1}=f(x_n)=(1+r)x_n \tag{5.1.2}$$

Через n років чисельність популяції буде дорівнює $x_n=(1+r)^n x_0$. Для того щоб обмежити цей експонентний ріст, Ферхюльст змусив коефіцієнт приросту R мінятися разом зі зміною чисельності популяції. Вважаючи, що чисельність популяції, що заповнює дану екологічну нішу, не може бути більше деякого максимального значення X (яке можна покласти рівним 1), він припустив, що залежний від розмірів популяції коефіцієнт приросту R пропорційний величині $1–x_n$, тобто поклав $R=r(1–x_n)$; константу r ми будемо називати параметром росту. Таким чином, коли $x_n<1$, чисельність популяції як і раніше росте, але лише доти, поки не буде досягнуте значення $x_n=1$, при якому ріст припиняється.

Закон, що керує динамікою, тепер буде виглядати так:

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1+r)x_n - rx_n^2 \tag{5.1.3}$$

Для x_0 маються два значення, при яких чисельність популяцій не змінюється: $x_0=0$ і $x_0=1$. Коли $x_0=0$, популяція попросту відсутня із самого початку, а в цьому випадку взагалі ніякий ріст неможливий. Однак якщо початкова чисельність хоч трохи відмінна від нуля, $0<x_0<1$, то при $r>0$ на наступний рік вона зростає: $x_1=x_0+rx_0$. Отже, стан рівноваги $x_0=0$ є хитливим. Послідовні значення x_0, x_1, x_2…ростуть доти, поки вони успішно не досягнуть значення 1. Для того, щоб визначити характер стійкості стану рівноваги $x_0=1$, простежимо, як змінюються в часі малі відхилення $\delta_n=x_n–1$. Виконуючи лінеаризацію (5.1.3), знайдемо:

$$\delta_{n+1}=(1–r)\delta_n\,, \tag{5.1.4}$$

відкіля видно, що по абсолютній величині δ_{n+1} менше, ніж δ_n, коли $0<r<2$.

Почнемо з випадку малих значень $r<1$. На рис. 5.1.1 приведений графік залежності $x = x(t)$ для випадку $r = 0{,}2$.

Ми бачимо, що він нічим принципово не відрізняється від аналогічного графіка в континуальному випадку. Хоча тут ми маємо ламану, а не криву, вона мало відрізняється від класичної S-подібної кривої Ферхюльста.

Подібний характер графіків зберігається з ростом r доти, поки r<1. Наприклад, на рисунку 40 приведений графік x=x(t), що відповідає значенню r=0,8.

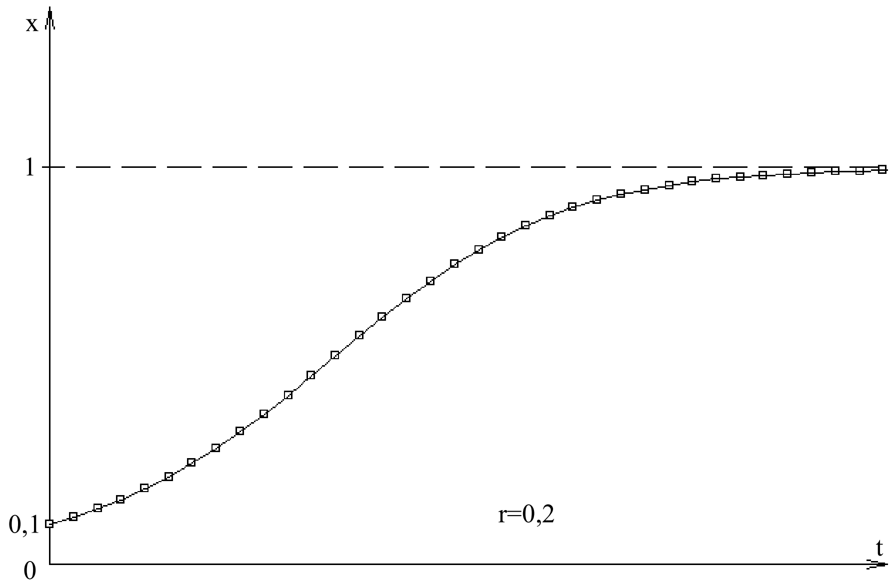

Рис. 40

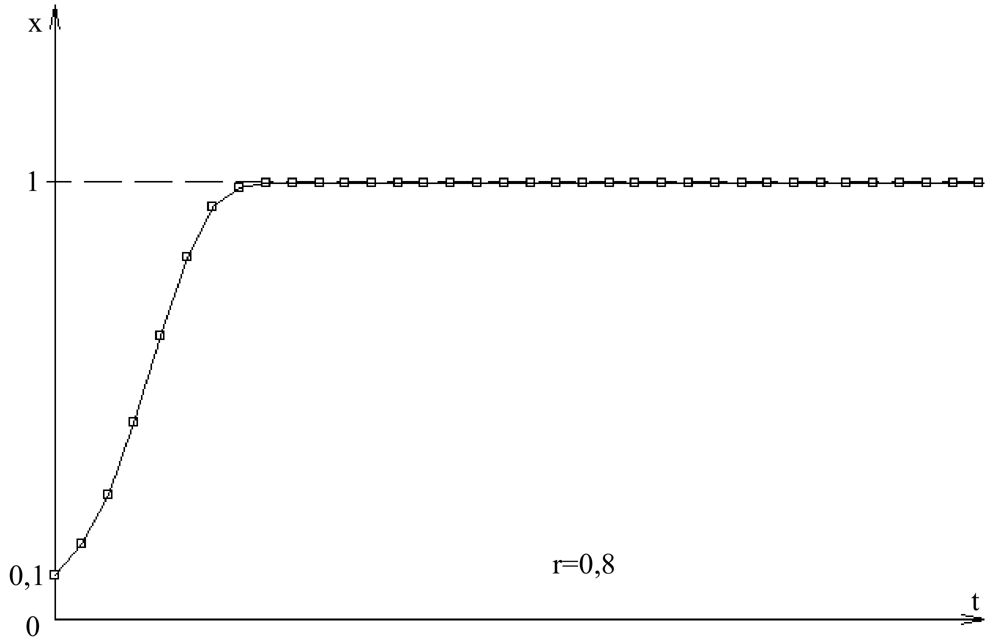

Рис. 41

Таким чином, у даних випадках дискретна модель дає якісно ті ж результати, що і континуальна.

Ситуація значно змінюється при r>1. На рисунку 41 приведений графік, що відповідає r=1,8. Величина x спочатку росте, оскільки вона помітно менше 1. Але на третьому кроці її значення вже трохи вище зазначеного рівня. Починаючи з цього моменту, відхилення убувають по абсолютній величині відповідно до (5.1.4), $\delta_{n+1}=-0.8\delta_n$, і процес наближається до потрібного кінцевого стану x=1.

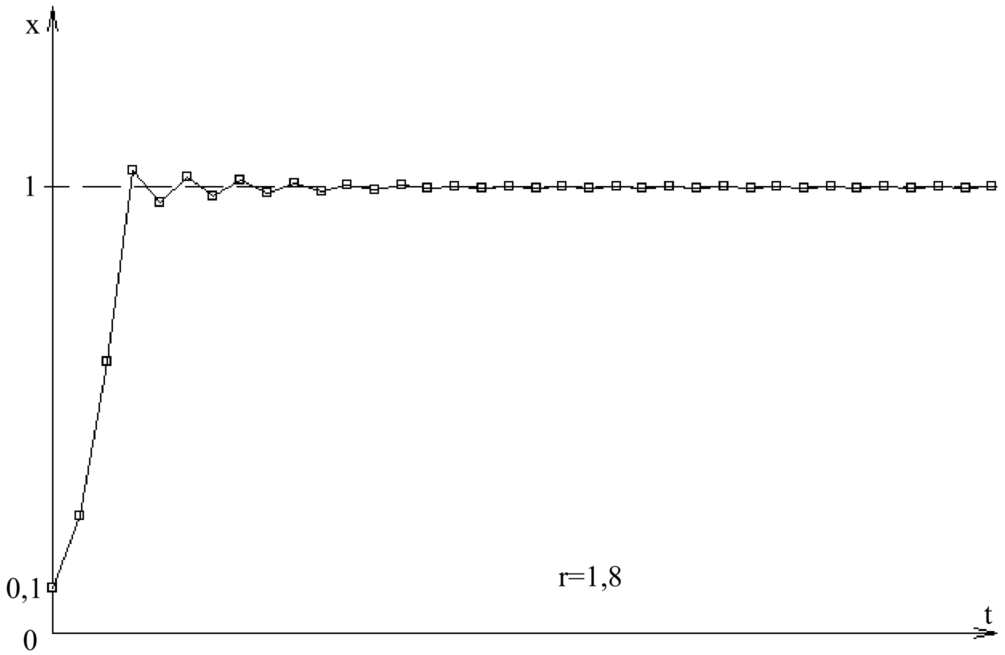

Рис. 42

Однак при $r>2$ співвідношення (5.1.4) передвіщає ріст відхилень δ_n, і ми дійдемо висновку, що стан рівноваги $x=1$ тепер уже хитливим. Щоб продовжити дослідження, проведемо експеримент, результати якого представлені на рисунку 42. Графік показує, що при $r=2,3$ процес зрештою починає періодично осцилювати між двома рівнями. Це наводить на думку розглянути першу ітерацію співвідношення (5.1.3), $x_{n+2}=f(f(x_n))= =f^2(x_n)$, і досліджувати стійкість нерухомих точок відображення f^2. Вони виявляються стійкими доти, поки $r<\sqrt{6}=2.449$.

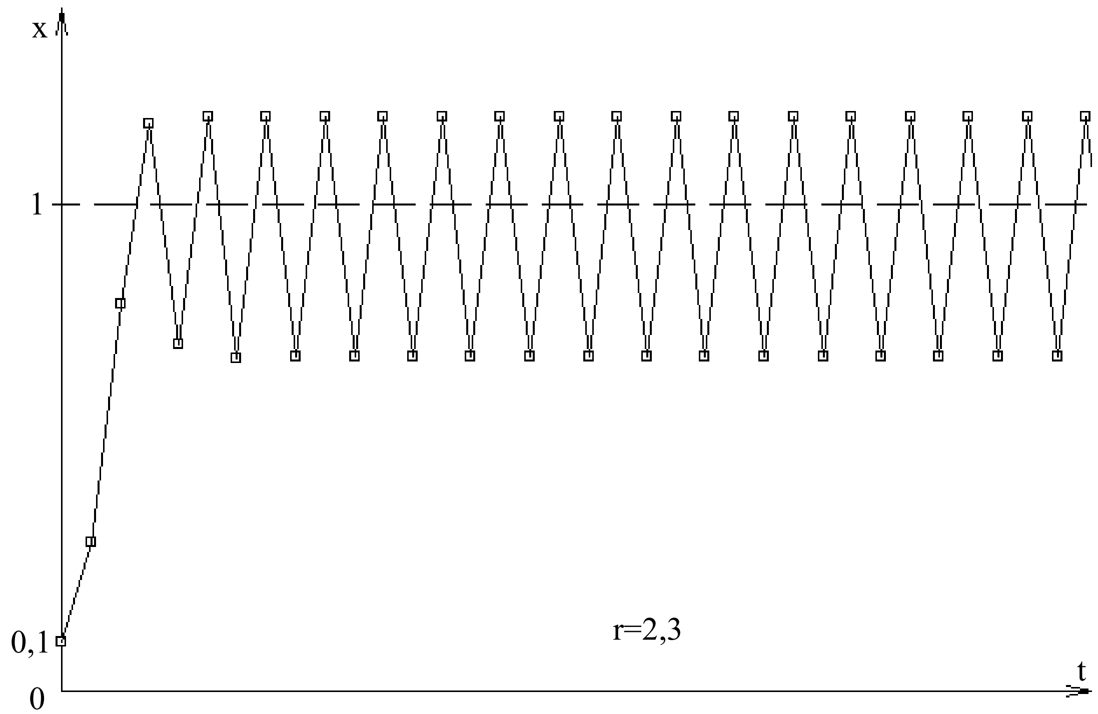

Рис. 43

Перехід від порядку до хаосу. З ростом r аналіз співвідношення (5.1.3) усе більш ускладнюється. Для $r=2.5$ вид ламаної на рисунку 43 дозволяє зробити висновок, що в цьому випадку процес приходить до стійких періодичних коливань з періодом 4.

У подальших експериментах виявляється послідовне подвоєння періоду коливань при всі ближче розташованих друг до друга значеннях r. Нарешті, при $r=2.570$ процес узагалі перестає бути періодичним. Тепер він увесь час стрибає біля нескінченного числа значень так, що поводження процесу, незважаючи на його повну споконвічну детермінованість, практично неможливо прогнозувати на великі періоди часу. Подібне поводження звичайне називають *хаотичним*. Прикладом може служити послідовність, показана на рисунку 44, яка отримана при $r=3.0$.

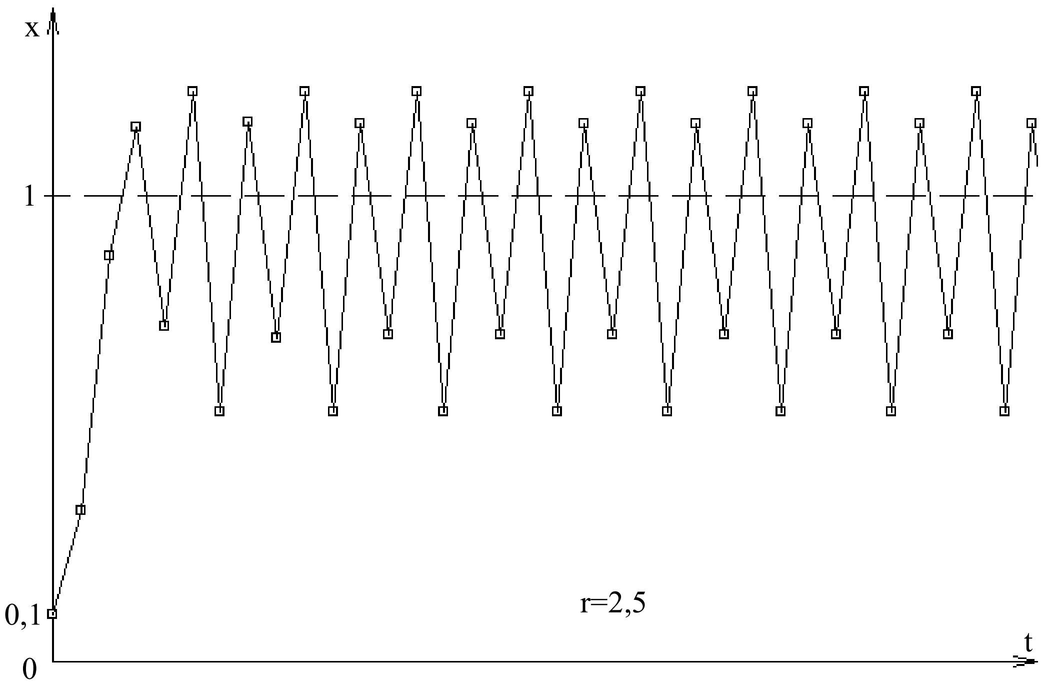

Рис. 44

Якщо r_n – значення параметра росту, що відповідає n-й біфуркації (тобто моменту, коли коливання періоду 2^n утрачають стійкість і стійкими стають коливання періоду 2^{n+1}), то виявляється, що відношення довжин наступних друг за другом інтервалів:

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \qquad (5.1.2.1)$$

до значення:

$$\delta_n \to \delta = 4.669\ldots\ldots, \text{коли } n \to \infty \qquad (5.1.2.2)$$

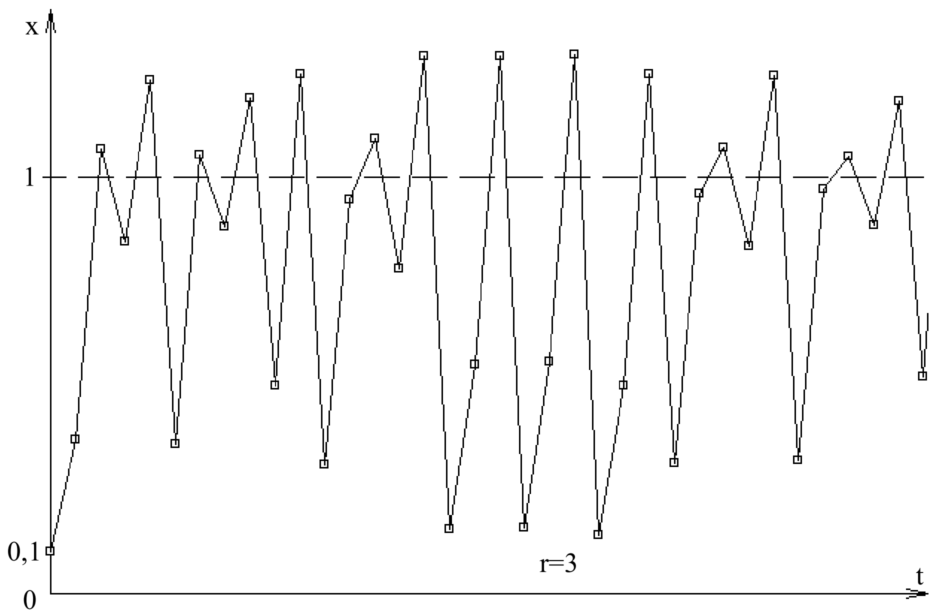

Рис. 45

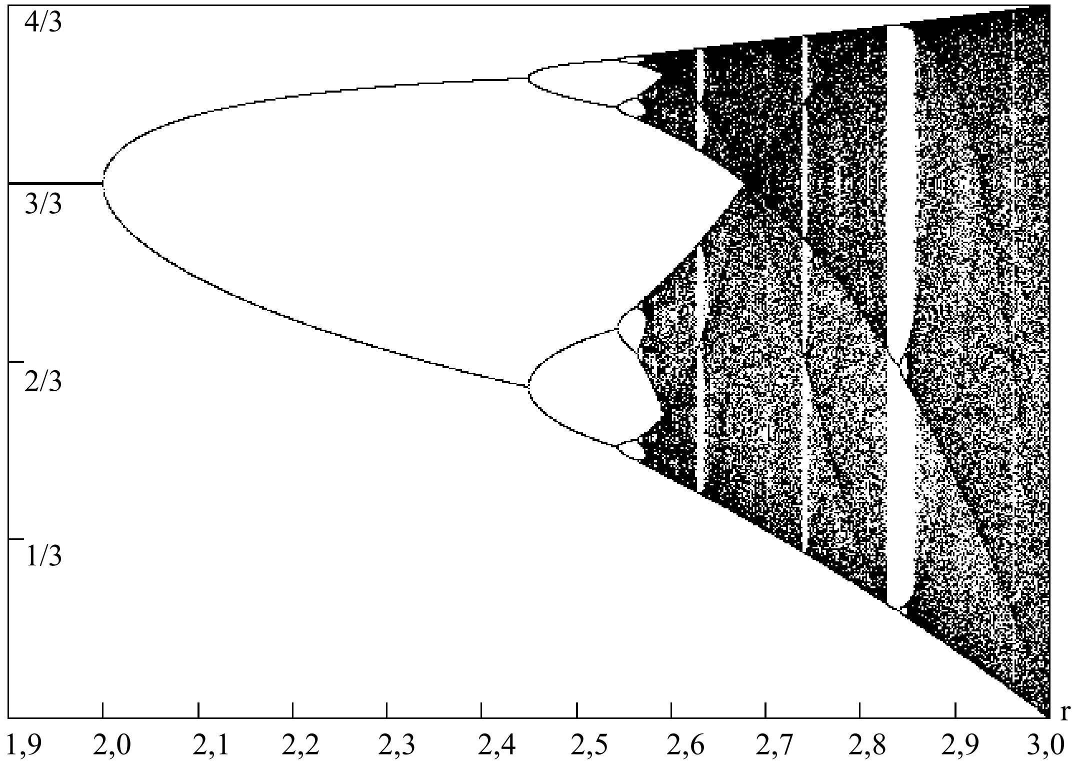

Рис. 46

На випадку процесу Ферхюльста можна одержати представлення про всі можливі типи поводження. Тут виявиться корисною *бифуркаційна діаграма* на рисунку 46, що відбиває залежність динаміки від параметра r. Для кожного значення r перші 5000 ітерацій були залишені "у тіні", щоб процес устиг ввійти у свій *атрактор* (який характеризує асимптотичне поводження, що не включає особливості перехідного періоду), а наступні 120 ітерацій були нанесені на діаграму для того, щоб показати природу цього атрактора. Він складається з однієї точки при $r<2$, із двох точок при $2<r<\sqrt{6}$, потім з 4, 8, 16,…точок аж до області хаосу, де точки атрактора можуть заповнювати цілі смуги.

Підводячи підсумок проведеному дослідженню варто підкреслити, що навіть у такому, здавалося б, простому і добре вивченому в континуальному варіанті випадку як динаміка окремо узятої популяції з урахуванням смертності дискретна модель не тільки значно спрощує обчислення, але і дозволяє виявити деякі характерні явища, що принципово неможливо знайти в континуальному випадку. При цьому важливо, що такі явища носять об'єктивний характер, а не є математичною вигадкою.

Континуальна модель згладжує стрибки процесу, роблячи усереднення результатів для великих проміжків часу. Однак у процесі функціонування популяції бувають явища, що у принципі неможливо згладити. Наприклад, риби мечуть ікру у величезних кількостях, однак більшість мальок, що з'явилися, незабаром гине. Таким чином, за один цикл спостерігається спочатку великий стрибок росту популяції, а потім не менш великий стрибок убування. Подібні явища усереднити не можна.

Таким чином, ми побачили вірогідність дискретної моделі і її актуальність, як для теоретичних, так і для практичних цілей.

5.2 Графічне моделювання односекторної економічної системи

Розглянемо більш докладно, чим раніше, процес моделювання односекторної економічної системи. З цією метою почнемо з графічної моделі.

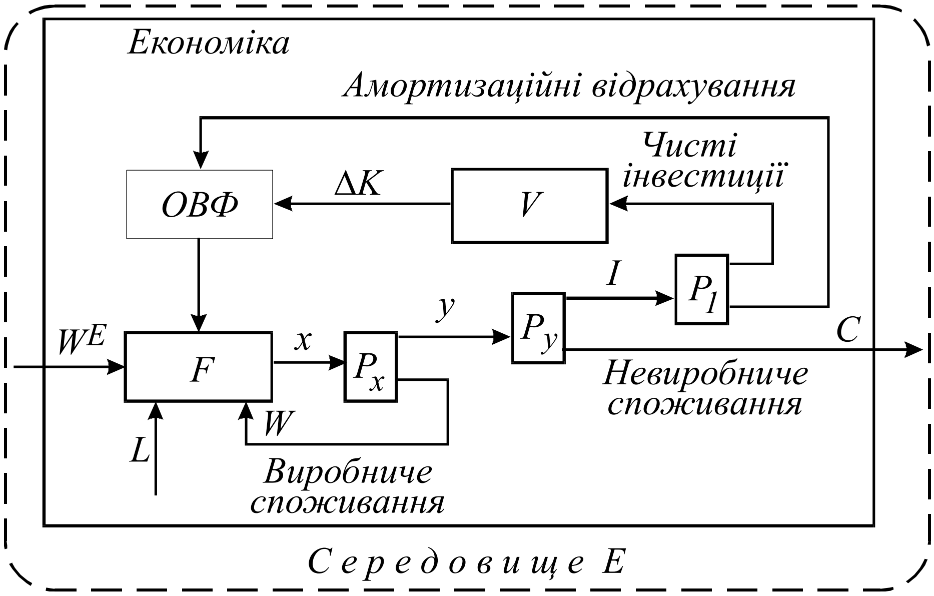

Рис. 47

На рисунку 47 зображені фактори, що характеризують виробничий процес: праця L; виробничі засоби, тобто основні виробничі фонди (ОВФ), чи виробничий капітал K; предмети праці, що складаються з природних ресурсів W^E, і предмети праці W, повернуті у виробництво як частина валового продукту x.

Валовий продукт x розподіляється в блоці розподілу P_x на частину W, що йде на виробниче споживання, і кінцевий продукт y. У свою чергу, кінцевий продукт розділяється в блоці розподілу P_y на валові капіталовкладення (інвестиції) I і на невиробниче споживання C. Інвестиції I розділяються на амортизаційні відрахування A і чисті інвестиції I_1, що йдуть на розширення ОВФ (блок P_1).

У найпростішій односекторній моделі робляться припущення, що валові інвестиції в тому ж році цілком витрачаються на приріст ОВФ і на амортизацію. У дискретному випадку цей зв'язок має вид:

$$I_t = q\Delta K_t + A_t, \qquad (5.2.1)$$

де $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$ – приріст виробничого капіталу в році t, q – коефіцієнт пропорційності (параметр моделі), $A_t = \mu K_t$ – амортизаційні відрахування, μ – коефіцієнт амортизації, K_t – виробничий капітал (ОВФ) у році t.

У випадку безперервного часу аналогом цього рівняння є:

$$I(t) = q\frac{dK(t)}{dt} + \mu K(t) \qquad (5.2.2)$$

Звідси можна вивести рівняння руху капіталу (фондів):

$$K'(t) = \frac{dK(t)}{dt} = \frac{1}{q}\left(I(t) - \mu K(t)\right). \qquad (5.2.3)$$

Приєднуючи рівняння зв'язку, одержуємо односекторну динамічну макромодель у дискретному варіанті:

$$x_t = W_t + q\Delta K_t + \mu K_t + C_t, \qquad (5.2.4)$$

тому що $x_t = W_t + y_t$, $y_t = I_t + C_t$.

Якщо вважати виробничі витрати W пропорційними випуску валової продукції x:

$$W = ax, \qquad (5.2.5)$$

те дискретна односекторна динамічна модель економіки здобуває вид

$$x_t = ax_t + q\Delta K_t + \mu K_t + C_t, \qquad (5.2.6)$$

чи

$$\Delta K_t = \frac{1}{q}\left[(1-a)x_t - \mu K_t - C_t\right]. \qquad (5.2.7)$$

У безперервному варіанті ця модель має вид:

$$K'(t) = \frac{1}{q}\left[(1-a)x(t) - \mu K(t) - C(t)\right]. \qquad (5.2.8)$$

Іноді використовують спрощені варіанти односекторної динамічної макромоделі.

5.3 Відкрита односекторна динамічна модель Леонтьєва

Вважається, що усі валові інвестиції спрямовані на введення в дію нових ОВФ (основний виробничий капітал не зношується), причому приріст випуску продукції $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ пропорційний інвестиціям,

$$I_t = \nu \Delta x_t \tag{5.3.1}$$

Тоді з рівняння (5.2.1), з огляду на (5.2.5), (5.2.9), одержуємо модель Леонтьєва

$$x_t = a x_t + \nu \Delta x_t + C_t . \tag{5.3.2}$$

У безперервному варіанті з аналогічних розумінь ця модель має вид:

$$x(t) = ax(t) + \nu \frac{dx(t)}{dt} + C(t) \tag{5.3.3}$$

5.4 Двосекторна динамічна макроекономічна модель

Нехай тепер економіка зображується двома галузями чи секторами господарства, кожна з який випускає валову продукцію X^1, X^2, використовуючи працю, засоби і предмети праці. Далі, продукція кожної їхніх чи галузей секторів розподіляється в блоках розподілу P_{X^1}, P_{X^2} (рис. 48) на кінцеві продукти галузей Y^1, Y^2 і виробничі споживання W^1, W^2:

$$X^i = W^i + Y^i, \quad i = 1,2. \tag{5.4.1}$$

Однак у двосекторній моделі проміжний продукт W^i, i=1,2 витрачається на виробництво не тільки у своїй галузі, але й іншої, причому відповідне розподіл відбувається в блоках P_{W^1}, P_{W^2}:

$$W^i = W^i_i + W^i_j, \quad i, j = 1,2, \quad i \neq j. \tag{5.4.2}$$

Якщо міжгалузеві потоки W^i_j пропорційні продукції X^j j-ї галузі, $W^i_j = a_{ij} X^j$, де a_{ij} – норма витрат продукції i-ї галузі на одиницю продукції j-ї галузі, то розподіл валової продукції, як і у випадку статичної моделі Леонтьєва має вид:

$$X^1 = a_{11} X^1 + a_{12} X^2 + Y^1, \tag{5.4.3}$$

$$X^2 = a_{21}X^1 + a_{22}X^2 + Y^2.$$

Отже, блоки розподілу P_{W^1}, P_{W^2} створюють підсистему міжгалузевих зв'язків. Двосекторна модель міжгалузевого балансу зображена на рисунку 48.

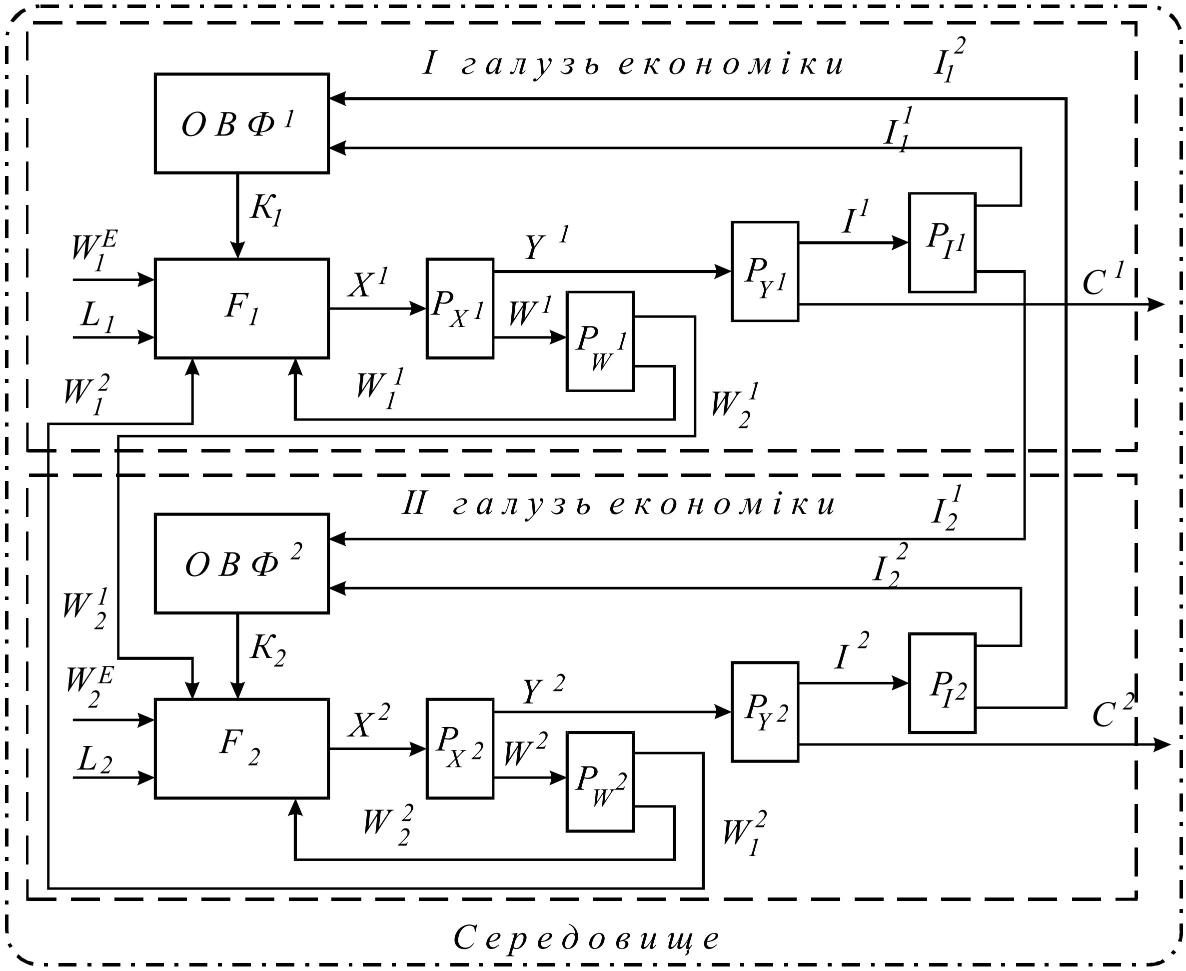

Рис. 48

Поділ кінцевих продуктів Y^i, i=1,2 галузей на інвестиції I^i і невиробниче споживання C^i виробляється в блоках розподілу P_Y^i, $i = 1,2$:

$$Y^i = I^i + C^i, \ i = 1,2. \tag{5.4.4}$$

Якщо для спрощення моделі вважати, що відсутні амортизаційні відрахування, то наступна витрата I^i виробляється в блоках P_I^i за схемою $I^i = I_i^i + I_j^i, \ i, j = 1,2, \ i \neq j.$ При інвестиціях, пропорційних приросту валової продукції,

$$I_j^i = \nu_{ij} \Delta X^j, \ i, j = 1,2. \tag{5.4.5}$$

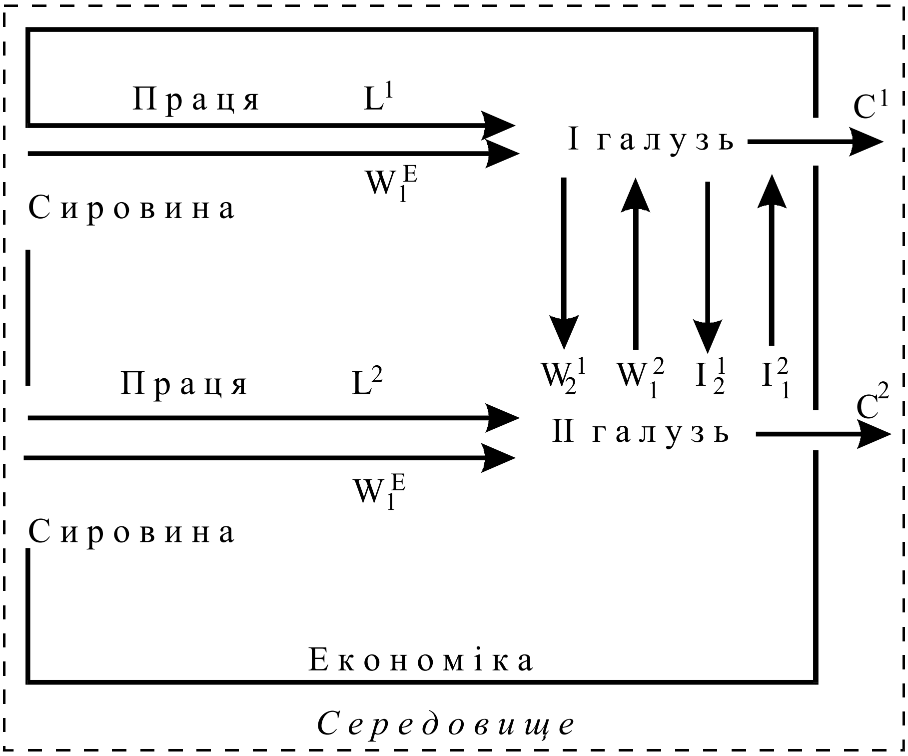

Рис. 49

Підставляючи в (5.4.3) формули (5.4.4), (5.4.5), одержуємо двосекторну динамічну модель для дискретного часу:

$$\begin{aligned}X_t^1 &= a_{11}X_t^1 + a_{12}X_t^2 + \nu_{11}\Delta X_t^1 + \nu_{12}\Delta X_t^2 + C_t^1,\\ X_t^2 &= a_{21}X_t^1 + a_{22}X_t^2 + \nu_{21}\Delta X_t^1 + \nu_{22}\Delta X_t^2 + C_t^2\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Використовуючи подібні розуміння, можна одержати аналогічну двосекторну динамічну модель для безперервного часу. Вона буде мати вид:

$$X^1(t) = a_{11}X^1(t) + a_{12}X^2(t) + \nu_{11}\frac{dX^1(t)}{dt} + \nu_{12}\frac{dX^2(t)}{dt} + C^1(t), \tag{5.4.7}$$

$$X^2(t) = a_{21}X^1(t) + a_{22}X^2(t) + \nu_{21}\frac{dX^1(t)}{dt} + \nu_{22}\frac{dX^2(t)}{dt} + C^2(t).$$

5.5 Розв’язок задач на основі дискретної моделі для односекторної економіки

Розглянемо наступне диференціальне рівняння, що описує динаміку односекторної економічної системи

$$(1-a)x = \nu\frac{dx}{dt} + y \tag{5.5.1}$$

Тут x - валовий продукт; a - виробничий коефіцієнт; ν - коефіцієнт фондомісткості; y - вільний залишок. Розглянемо рішення цього рівняння при постійних значеннях величин a, ν, y, x.

Спочатку розглядається статичне рівняння:

$$(1-a)x = y, \qquad (5.5.2$$

що відповідає постійному значенню x. Звідси отримуємо:

$$x^* = \frac{y}{1-a} \tag{5.5.3}$$

Далі переносимо початок відліку на осі x в положення рівноваги системи, виконуючи заміну:

$$x = x^* + z \tag{5.5.4}$$

Враховуючи рівність:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}, \tag{5.5.5}$$

справедливе при постійному значенні x*, отримуємо:

$$(1-a)(x^* + z) = (1-a)x^* + (1-a)z = \nu\frac{dz}{dt} + y \tag{5.5.6}$$

Відкидаючи доданки, що скорочуються в силу, отримуємо однорідне рівняння:

$$kz = \frac{dz}{dt}, \quad k = \frac{1-a}{\nu} \tag{5.5.7}$$

Рішення цього рівняння буде:

$$z = z_0 e^{kt}, \tag{5.5.8}$$

де □ - початкове значення величини z. Підстановка (5.5.8) в (5.5.4) дає:

$$x = x^* + z_0 e^{kt} \tag{5.5.9}$$

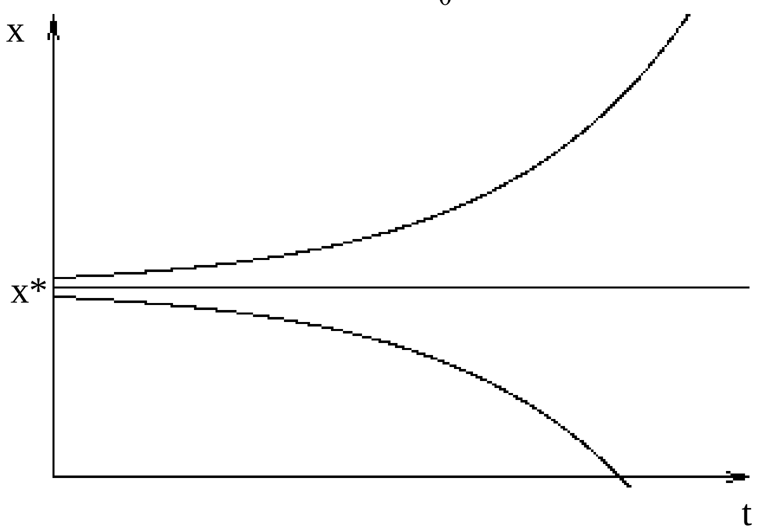

Рис. 50

На рисунку 50 наведені приклади відповідних графіків. Ми бачимо, що положення рівноваги є нестійким. Будь-яке відхилення від нього надалі наростає.

Перейдемо тепер до дискретної моделі, замінивши диференціальне рівняння (5.5.1) скінченно-різницевим

$$(1-a)x_i = \nu\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} + y_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t_i, \quad (i = 0,1,...) \qquad (5.5.10)$$

З точки зору теорії диференціальних рівнянь рівняння (5.5.10) є наближеним по відношенню до рівняння (5.5.1). Проте з точки зору економіки це не так. Реальні економічні процеси є дискретними. Платежі виконуються скінченими сумами Δx і через скінченні проміжки часу Δt. Тому тут, при правильному підборі параметрів, точним є якраз рівняння (5.5.10).

Рівняння (5.5.1) виходить шляхом згладжування реальних дискретних економічних процесів. Такий підхід, пов'язаний із згладжуванням, добре відомий в класичній механіці, для вирішення завдань якої і був уперше створений апарат диференціальних рівнянь. У механіці суцільного середовища (рідини, пружного тіла) він називається феноменологічним. Проте скачки в суцільних середовищах, що вивчаються механікою, частенько дуже малі, а кількість цих стрибків дуже велика; тому їх згладжування в механіці в більшості випадків виправдане. Проте далеко не завжди виправдано автоматичне перенесення математичного апарату механіки в економічні завдання, оскільки тут дискретність процесів, що вивчаються, виражена набагато сильніше, ніж в механіці.

Існує точка зору, що застосування математичного апарату диференціальних рівнянь в економіці доцільно внаслідок того, що дискретні моделі створюються тільки для чисельної реалізації на комп'ютерах, а диференціальні рівняння дозволяють, у ряді випадків, отримувати аналітичні рішення.

Проте, по-перше, аналітичні рішення диференціальних рівнянь вдається отримати тільки в порівняно невеликій кількості випадків і для відносно простих завдань.

По-друге, дискретні рівняння також дозволяють отримувати аналітичні рішення приблизно в тих же випадках, що і аналогічні диференціальні рівняння.

Продемонструємо це на прикладі рівняння (5.5.10). Знову знаходимо стан рівноваги системи по формулі (3) і виконуємо заміну (5.5.4). В результаті отримуємо наступне рівняння:

$$\Delta z_i = z_{i+1} - z_i = kz_i\Delta t_i \quad (i = 0,1,...) \qquad (5.5.11)$$

Звідси:

$$z_{t+1} = m_i z_t, \quad m_i = 1 + k\Delta t_i \quad (i = 0,1,...) \qquad (5.5.12)$$

Ми бачимо, що при постійному кроці за часом Δt_i величина z_i змінюється за законом геометричної прогресії зі знаменником m. В результаті отримуємо:

$$z_i = z_0 m^i \quad (0 = 0,1,...) \tag{5.5.13}$$

Із (5.5.4) маємо:

$$x_i = x^* + z_0 m^i, \quad t_i = i\Delta t \quad (i = 0,1,...) \tag{5.5.14}$$

Таким чином, в дискретному випадку також отримано аналітичне рішення. Відповідний ступінчастий графік приведений на рисунку 51.

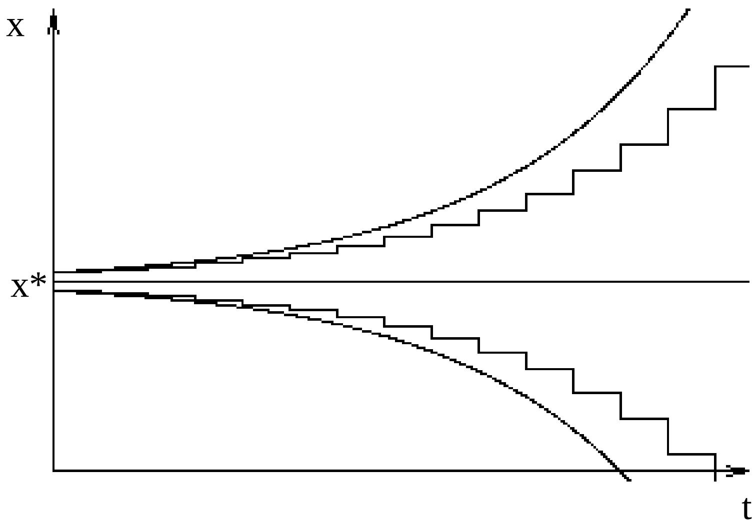

Рис. 51

На цьому ж графіку приведені і колишні результати, отримані за допомогою рішення диференціального рівняння (5.5.1). Порівняємо результати, отримані двома методами. З класичних позицій чисельної інтеграції диференціальних рівнянь ми використовували, в дискретному варіанті, так званий метод Ейлера, який відрізняється порівняно низькою точністю і швидким накопиченням погрішності. Ми бачимо, що ступінчасті графіки, що відповідають цьому методу, швидко зникають від гладких кривих, отриманих за допомогою точного рішення диференціального рівняння.

Проте при оцінці тих же результатів з позицій вирішуваної економічної задачі ми приходимо до протилежних виводів. Ступінчасті графіки відповідають реальному економічному процесу, який є дискретним за своєю природою. У цьому сенсі вони є точними. Гладкі ж графіки отримані в результаті процедури згладжування реального дискретного процесу і дають, у результаті, наближені результати. Чим більше крок зміни часу Δt, тим більше відрізняються континуальні результати, що ідеалізуються, від точних дискретних результатів.

Проте відмічені в лінійному випадку відмінності в результатах, отриманих за допомогою континуальних і дискретних моделей є тільки кількісними. Якісно результати співпадають. Принципова відмінність між континуальними і дискретними моделями з'являється в нелінійних випадках. На прикладі екологічного завдання про динаміку популяції за наявності смертності показано, що дискретна модель приводить до результатів, якісно схожих з результатами на основі континуальної моделі, тільки у разі відносно плавного розвитку популяції. При збільшенні коефіцієнта народжуваності виникають якісні відмінності між двома видами моделей. Континуальна модель завжди дає рішення, що плавно змінюється. В той же час у рамках дискретної моделі вдається вивчити стрибкоподібні зміни об'єму популяції, що відповідають реальним екологічним явищам, наприклад, появі великого об'єму потомства з наступним його швидким вимиранням.

Економічні процеси також, частенько, протікають нелінійно. Лінійні рівняння (5.5.1) і (5.5.10) допускають модернізацію з метою опису нелінійних економічних явищ. Деякі нелінійні узагальнення динамічних рівнянь Леонтьєва викладені в [12]. Виконаємо в (5.5.1) наступні заміни:

$$ax \to a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad y \to b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \qquad (5.5.15)$$

отримуючи:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu}\left[-(a_0 + b_0) + (1 - a_1 - b_1)x - (a_2 + b_2)x^2\right] \qquad (5.5.16)$$

Нелінійні доданки в правій частині рівняння (5.5.16) можуть відповідати наявності якихось економічних умов, що обмежують зростання валового продукту x, наприклад, насиченню ринку збуту, прогресивному оподаткуванню і так далі. Знайдемо стани рівноваги системи, що відповідає умові, вирішуючи статичне рівняння:

$$(a_2 + b_2)x^2 - (1 - a_1 - b_1)x + a_0 + b_0 = 0 \qquad (5.5.17)$$

Це квадратне рівняння має два корені:

$$x_{1,2} = \frac{1 - a_1 - b_1 \pm \sqrt{(1 - a_1 - b_1)^2 - 4(a_2 + b_2)(a_0 + b_0)}}{2(a_2 + b_2)} \qquad (5.5.18)$$

Якщо корені дійсні, то ми маємо два різні стани рівноваги. На рисунку 52 наведений графік залежності x, отриманий за допомогою рішення рівняння (5.5.16) чисельним методом Рунге-Кутти і що відповідає еволюції системи від меншого значення x_2. до більшого значення x_1.

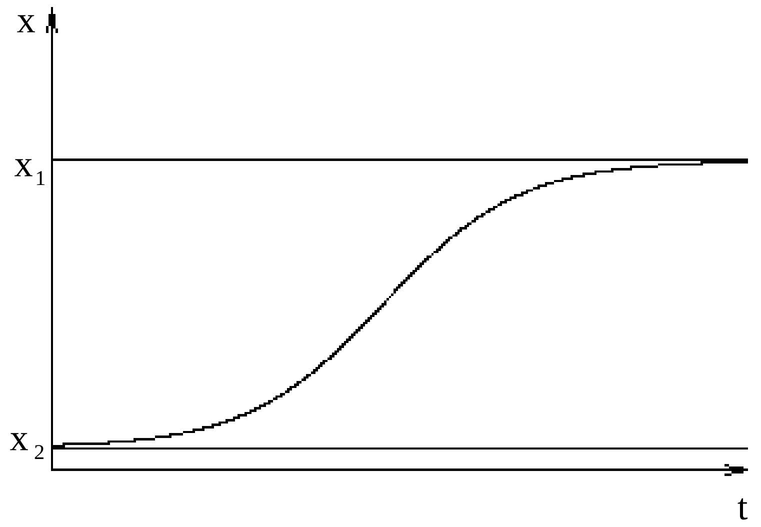

Рис. 52

Ми отримали класичну S – подібну логістичну криву Ферхюльста.

Перейдемо до дискретної моделі, замінюючи диференціальне рівняння (5.5.16) на скінчено - різницеве:

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = \frac{1}{\nu}\left[-\left(a_0 + b_0\right) + \left(1 - a_1 - b_1\right)x_i - \left(a_2 + b_2\right)x_i^2\right] \qquad (5.5.19)$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t_i \quad \left(i = 0,1,...\right)$$

При постійному кроці за часом маємо:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{\nu}\left[-\left(a_0 + b_0\right) + \left(1 - a_1 - b_1\right)x_i - \left(a_0 + b_0\right)x_i^2\right] \qquad (5.5.20)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad \left(i = 0,1,...\right)$$

За таких же умов, як в континуальному випадку, отримуємо результати, зображені графічно на рисунку 53.

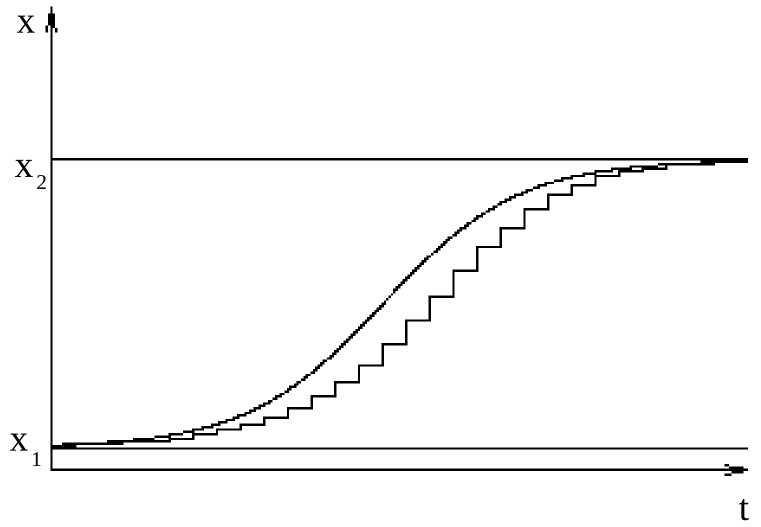

Рис. 53

Ми внось видимий кількісна відмінність дискретних результатів від континуальних за наявності якісної подібності.

Роль коефіцієнта народжуваності в економіці грає величина, зворотна коефіцієнту фондомісткості. Чим менше коефіцієнт фондомісткості, тим швидше росте величина валового продукту x. При цьому в континуальному випадку не виникає ніяких принципово нових ефектів. Логістична крива швидше переходить від значення x_1 до значення x_2, зберігаючи свій якісний характер.

Інакше йде справа в дискретному випадку. На малюнках наведених нижче зображений ряд графіків, відповідних поступовому убуванню коефіцієнта фондомісткості.

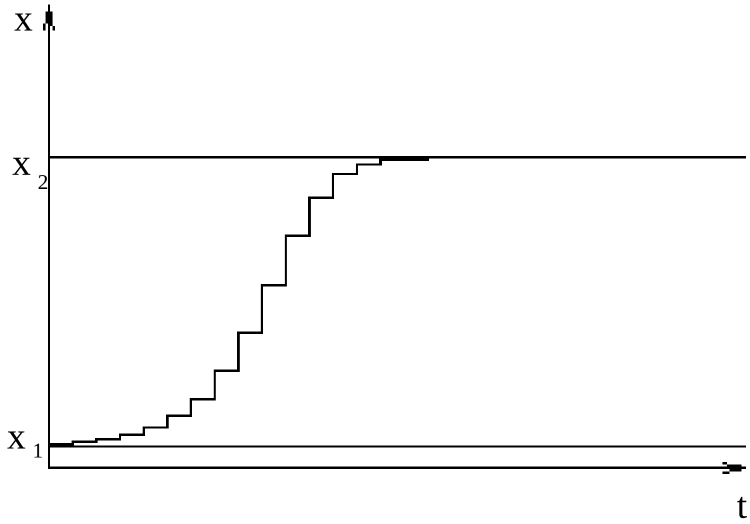

Рис. 54

Спочатку ми маємо звичну логістичну криву в дискретному варіанті.

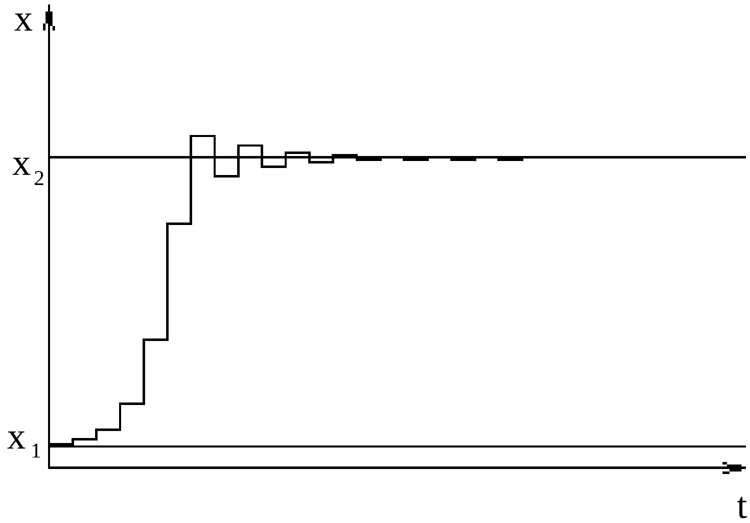

Рис. 55

Проте при подальшому зменшенні x_1 характер ламаної якісно змінюється. Вона починає здійснювати коливання поблизу положення рівноваги x_2. Спочатку ці коливання носять затухаючий характер.

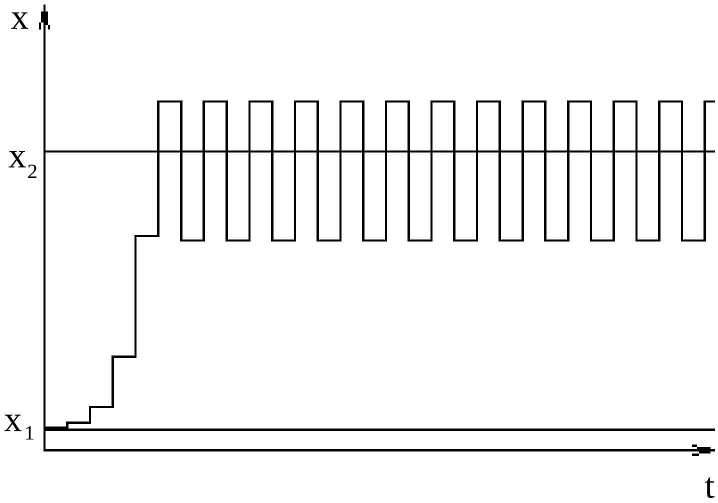

Рис. 56

Проте потім коливання починають відбуватися між двома постійними значеннями x.

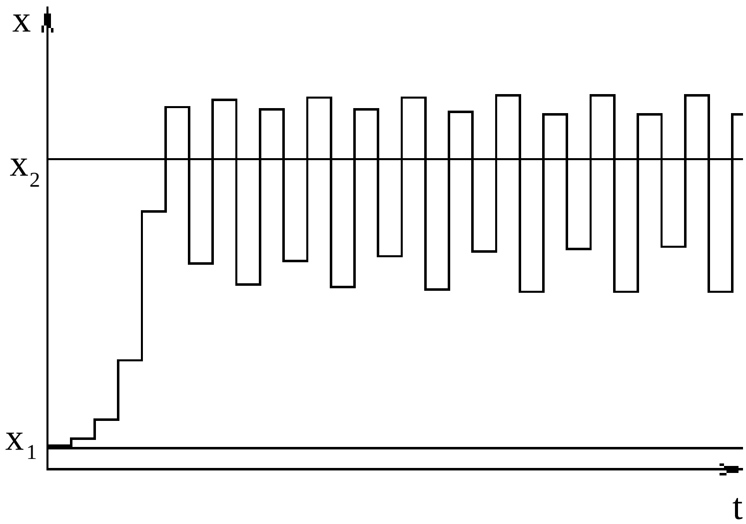

Рис. 57

Далі величина x починає коливатися між чотирьох постійних значень; далі між вісьмома, шістнадцятьма і так далі. Досягши досить малого значення коефіцієнта фондомісткості коливання x набувають хаотичного характеру.

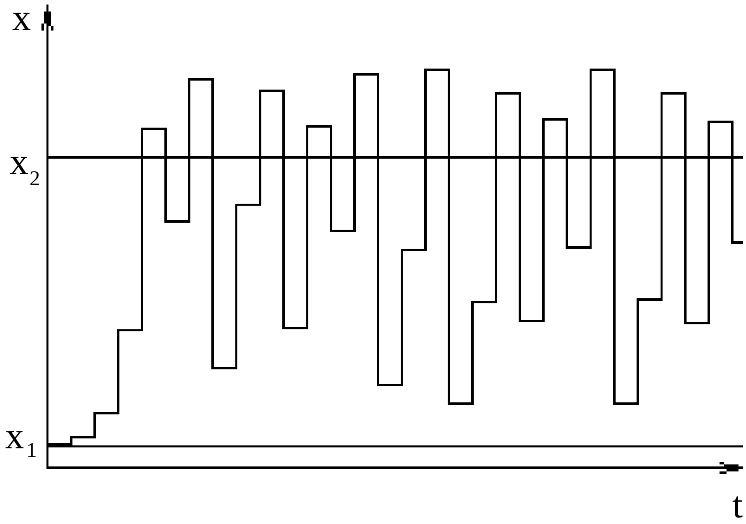

Рис. 58

Усі ці результати якісно повністю відповідають результатам, приведеним в [10].

Підкреслимо головну їх особливість. Самі по собі коливальні і стрибкоподібні процеси не рідкість в економіці. Проте їх вивчення за допомогою математичного апарату диференціальних рівнянь дуже складне. Зазвичай доводиться використовувати зміну параметрів диференціальних рівнянь з використанням яких-небудь випадкових процесів.

В той же час дискретний підхід дозволяє отримати такі результати просто і природно. При цьому модель залишається детермінованою. Інакше кажучи, результат чергового стрибка однозначно визначається станом системи на попередньому кроці. Це дозволяє використовувати дискретні моделі для прогнозування процесів, які зовні виглядають випадковими, але насправді такими не є.

Звернемо увагу ще на одну деталь. У сучасній науці досить великою популярністю користується так звана теорія катастроф. Під катастрофою розуміють досить велику стрибкоподібну зміну деякої функції при малій зміні аргументу. З цієї точки зору процеси, зображені графічно на мал. 6.9 можна сприймати як послідовності катастроф.

Континуальна математика вивчає катастрофи за допомогою досить складного апарату. У дискретній математиці катастрофи можна описати за допомогою простих детермінованих моделей.

Висновки. Ми розглянули методи побудови дискретних економічних моделей, що мають більшу вірогідність, у порівнянні з континуальними, і в той же час більш зручних для реалізації на комп'ютерах.

Уже перші спроби рішення задач за допомогою таких моделей показали можливість виявлення, з їхньою допомогою, таких явищ, які неможливо виявити за допомогою континуальних моделей.

Відзначимо, що дискретні економічні моделі в даний час майже не застосовуються на практиці, наприклад, з метою прогнозування розвитку тієї чи іншої економічної системи. Таким чином, даний спецкурс присвячений не стільки викладу відомих матеріалів у даній області, скільки націлюванню на перспективні наукові дослідження.

5.6 Питання для контролю

1. Чому при описі економічних задач дискретні моделі можуть виявитися більш переважними, ніж континуальні?
2. Яка аналогія між економічними й екологічними задачами? Чому досвід вивчення екологічних задач корисний при рішенні задач економіки?
3. Які незвичайні ефекти виникають при розмноженні популяції з великим коефіцієнтом народжуваності?
4. У чому полягає перехід від порядку до хаосу в динаміку популяції?
5. Що таке біфуркаційна діаграма?
6. Опишіть графічну модель односекторної економічної системи.
7. Що таке відкрита односекторна динамічна модель Леонтьєва?
8. Які властивості замкнутої односекторної моделі Леонтьєва?
9. Що таке модель з відомим споживанням?
10. Дайте графічний опис двосекторної динамічної моделі.
11. Як виконується рішення лінійної задачі на основі дискретної моделі для односекторної економічної системи?
12. Як виконується рішення нелінійної задачі на основі дискретної моделі для односекторної економічної системи?

5.7 Теми лабораторних робіт

1. Складіть комп’ютерну програму для рішення дискретного екологічного рівняння при довільних значеннях коефіцієнта народжуваності.
2. Складіть комп’ютерну програму для побудови біфуркаційної діаграми.
3. Складіть комп’ютерну програму для рішення дискретного рівняння, що описує динаміку односекторної економічної системи.
4. Використовуючи програму, складену в третій лабораторній роботі, виконайте аналіз різних сценаріїв розвитку односекторної економічної системи.

ВИСНОВОК

Підводячи підсумок даному посібнику, можна зробити наступний головний висновок. У сучасній економіці є об'єктивна потреба в розробці нових математичних моделей, що дозволяють враховувати особливості перехідних режимів в економіці. Сучасний математичний апарат дозволяє як створювати такі моделі, так і програмувати їх на комп'ютері.

У результаті такого програмування з'являється можливість прогнозувати наслідки прийнятих політичних і економічних рішень шляхом так званого програвання сценаріїв розвитку на комп'ютері.

Таким чином, замість прямого експериментування на реальній економіці, що найчастіше приводить до важких наслідків, доцільніше спочатку вивчати ситуацію шляхом програвання її на комп'ютері.

Даний курс не претендує на вичерпне опис зазначених питань. Його головна роль – показати принципову можливість використання в економіці досить складного сучасного математичного апарату.

Практичне використання такої можливості повинне реалізовуватися при спільній роботі замовника (політика, менеджера, економіста) і математика-програміста. Тільки в такій спільній роботі можливе одержання реальних практичних результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.
2. Базылев Б.Ю., Саенко Е.Р., Шамровский А.Д. Нелинейные обобщения динамических уравнений Леонтьєва для двухсекторной экономики. Радіоелектроніка, Інформатика, Управління 1(3). Запоріжжя, 2000.
3. Ващенко В.С., Ройтман А.Б., Шамровський О.Д. Проблеми інвестування в Україні. Матеріали доповідей V Міжнародного конгресу українських економістів: Україна в XXI столітті: концепції та моделі економічного розвитку. 2000.
4. Ивахненко А.Г. Непрерывность и дискретность. К.: Наук. думка, 1990.
5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
6. Маленво Э. Статистические методы эконометрии: В 2 вып. М.: Статистика, 1975. Вып. 1; 1976, Вып 2.
7. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
8. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
9. Оптнер С.Л. Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. М.: Сов. радио, 1969.
10. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. М. «Мир», 1993. 176 с.
11. Питерс Т., Уотермен Р. В поисках эффективного управления (опыт лучших компаний). М.: Наука, 1986.
12. Пономаренко О.І., Пономаренко В.О. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. К. “Либідь”, 1995. 240 с.
13. Пределы роста/ Д.Х. Медоуз, Д.Л. Медоуз, Й Рендерс, В Беренс III. М.: Изд-во МГУ, 1991.
14. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
15. Самуельсон П. Економіка. Львів: Світ, 1993.
16. Стерлинг А.Р., Тулин И.В. Стратегия планирования в промышленных корпорациях США. М.: Наука, 1990.
17. Цыгичко В.Н. Руководителю о принятии решений. М.: Фининсы и статистика, 1991.
18. Шамровський О.Д. Сравнение континуальных и дискретных моделей для односекторных экономических систем / О.Д. Шамровський, С.В. Солодухін // Науковий журнал «Вісник Київського національного університету технології та дизайну» № 5 (67). Київ – КНУТД, 2012 р. – С. 280-286.
19. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.

Підписано до друку 11.04.2013р. Формат 60х84 1/32. Папір офсетний. Умовн. друк. арк. 5. Наклад 50 прим. Замовлення № 48/13-Б

Запорізька державна інженерна академія Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 2958 від 03.09.2007 р.

Віддруковано друкарнею Запорізької державної інженерної академії з оригінал-макету авторів

69006, м. Запоріжжя, пр. Леніна, 226 ЗДІА, тел. 2238-240