ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЕОНТЬЄВА

У попередній главі розглядалися статичні рівняння Леонтьєва. Ці рівняння дозволяють описувати стан економічної системи тільки у випадку його незмінності в часі.

Ця глава присвячена розгляду динамічних рівнянь, що дозволяють вивчити розвиток економічної системи (чи її деградацію) у залежності від діяльності системи в попередні моменти часу.

У той час, як статичні задачі описувалися за допомогою алгебраїчних рівнянь, динамічні задачі, природним чином, описуються за допомогою диференціальних рівнянь. Однак і в цьому випадку приводяться алгоритми, що дозволяють, вичерпним чином, вирішувати відповідні задачі за допомогою комп'ютера.

Як і в статичному випадку, розглядаються економічні системи з різною кількістю секторів і ті задачі, що можуть бути розглянуті за допомогою відповідних динамічних рівнянь.

4.1 Односекторна економічна система. Виведення динамічного рівняння

У попередній главі вивчалися статичні задачі. Це означає, що розглядалося тільки так зване просте відтворення, коли обсяги продукції, що випускається, залишаються незмінними у часі. Таке функціонування характерне або для економічної системи, що досягла насичення, або для системи з недосконалими технологіями. В останньому випадку виробничі витрати настільки великі, що вільних залишків вистачає тільки на прожитковий мінімум.

При поліпшенні технологічних процесів виробничі витрати знижуються і вільні залишки можуть забезпечити вже не тільки потреби життєзабезпечення людей, зайнятих у виробництві, але і вкладання частини засобів у розширення виробництва.

Звернемо увагу на наступне. В даний час вважається, що для розширення виробництва обов'язково потрібні якісь зовнішні інвестиції. Але це зовсім не обов'язково і так було не завжди. Наприклад, знаменитий автомобільний магнат Генрі Форд починав із сараю на фермі, де він своїми руками будував свої перші автомобілі і поступово, винятково за рахунок вкладання власних засобів, розширив виробництво до розмірів гігантської промислової імперії.

Ми будемо розглядати саме таку ситуацію розширення за рахунок використання частини вільного залишку. Розглянемо знову рівняння (1.1.2) і виконаємо заміну:

$$y \rightarrow y + y' \tag{4.1.1}$$

Тут y' – обсяг інвестицій, а величина y, розташована в правій частині (4.1.1), задає новий обсяг вільних засобів (природно, менший, ніж колишній обсяг, зазначений у лівій частині).

Розглянемо докладніше величину y'. Інвестиції викликають приріст обсягу виробництва. Припустимо, що швидкість цього росту пропорційна обсягу інвестицій y'. Оскільки швидкість зміни величини x у часі задається похідною dx/dt, то одержуємо:

$$y' = \nu \frac{dx}{dt} \tag{4.1.2}$$

Коефіцієнт пропорційності ν називається коефіцієнтом фондомісткості. Він дорівнює тому обсягу інвестицій, що необхідний для підтримки одиничної швидкості приросту валової продукції. Нехай, наприклад, обсяг продукції виміряється в тисячах доларів, а характерним масштабом часу є рік. Тоді величина $\nu = 0.1$ показує, що для забезпечення приросту 1000 $/рік необхідний обсяг інвестицій:

$$y' = 0.1 \cdot 1000 = 100\ \$ \tag{4.1.3}$$

Інакше кажучи, рівність коефіцієнта фондомісткості величині 0.1 показує, що для річного збільшення обсягу виробництва на одиницю виміру, рівну в даному випадку 1000$, потрібно вкласти десяту частку цієї одиниці, тобто 100$.

Одиницею виміру коефіцієнта фондомісткості є час. Тому його можна також розглядати, як час повної окупності інвестицій. Наприклад, та ж величина $\nu = 0.1$ означає, що окупність інвестицій досягається за час, рівний однієї десятої року.

Остаточно, підставляючи (4.1.2) у (4.1.1) і результат у (4.1.2) одержуємо:

$$x - ax = \nu \frac{dx}{dt} + y \qquad (4.1.4)$$

Це і є динамічне рівняння Леонтьєва для односекторної економічної системи.

4.2. Розв’язок динамічного рівняння для односекторного випадку

Перейдемо до рішення задач на основі рівняння (4.1.4). Тут, як і в статичному випадку, основними є дві задачі.

Перша. При заданому x знайти y. Істотна відмінність від статики є в тім, що тепер x задається не як число, а як функція часу:

$$x = x(t) \qquad (4.2.1)$$

Тому і y знаходиться також як функція часу. Відповідно до (4.1.4) маємо:

$$y = y(t) = (1 - a)x(t) - \nu \frac{dx}{dt} \qquad (4.2.2)$$

Таким чином, при відомих темпах зміни обсягів виробництва, заданих функцією (4.2.1), ми знаходимо темпи зміни росту вільного залишку.

Друга. Знаходження, на основі рішення диференціального рівняння (4.1.4), залежності (4.2.1). Розглянемо рішення зазначеного рівняння. Обмежимося, у даному параграфі, найпростішим випадком постійних величин a, ν і y. Розглянемо економічний зміст зазначених припущень.

Сталість виробничого коефіцієнта a означає, що відносний обсяг виробничих витрат не змінюється в часі. Це можливо при стабільному функціонуванні устаткування, коли витрати на його обслуговування і ремонт не змінюються в часі. Крім того, повинні бути стабільними ціни на сировину і комплектуючі і т.д.

Сталість коефіцієнта фондомісткості ν поз в’язана, насамперед, з таким фактором, як політична стабільність. Справді, інвестор, що вклав засоби в розширення виробництва й очікує їхньої окупності через час ν, а потім і одержання прибутку, вправі розраховувати, що за даний час не відбудуться такі події, що зможуть поставити під сумнів можливість подальшого розвитку виробництва, а також права власності інвестора.

Нарешті, розглянемо вимогу сталості вільного залишку y. Нагадаємо, що ми плануємо розширення виробництва; отже, і збільшення прибутку. Але при цьому, у рамках зроблених припущень, весь приріст прибутку йде на подальше розширення виробництва, а особисті витрати, що саме і виходять за рахунок вільного залишку, залишаються незмінними. Таке тверде обмеження характерне для початкової стадії розвитку; воно необхідно для підтримки найвищих темпів розвитку.

Перейдемо безпосередньо до рішення рівняння (4.1.4) з урахуванням зроблених припущень. Спочатку знайдемо стаціонарне рішення $x^* = \mathrm{const}$, тобто той обсяг виробництва, при якому спостерігається баланс доходів і витрат і, як наслідок, незмінність обсягу виробництва. Оскільки похідна від константи дорівнює нулю, то ми приходимо до звичайного статичного рівняння:

$$(1 - a)x^* = y \tag{4.2.3}$$

з рішенням:

$$x^* = \frac{y}{1 - a} \tag{4.2.4}$$

Далі виконаємо заміну:

$$x = x^* + z \tag{4.2.5}$$

Це означає перенос початку відліку на осі x у точку x^*. Підставляючи (4.2.5) у (4.1.4) і з огляду на рівність:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} \tag{4.2.6}$$

одержуємо:

$$x^* + z - a(x^* + z) = \nu\frac{dz}{dt} + y \tag{4.2.7}$$

У силу рівності (4.2.3) перший і третій доданки в правій частині рівняння (4.2.7) скорочуються з другим доданком у його лівій частині. У підсумку одержуємо наступне однорідне рівняння:

$$bz = \nu \frac{dz}{dt}, \; b = 1 - a \tag{4.2.8}$$

Це найпростіше диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами; його рішення має вид:

$$z = z_0 e^{kt}, \quad k = \frac{b}{\nu} \tag{4.2.9}$$

Величина z_0 задає початкове значення z у момент часу $t_0 = 0$. Від'ємні значення z_0 відповідають початковим значенням x, меншим чим x^*, додатні – більшим, ніж x^*. Для величини x у підсумку одержуємо:

$$x = x^* + z_0 e^{kt} \tag{4.2.10}$$

Розглянемо докладніше значення величини z_0. Відповідно до (2.1.2), (4.2.9) і (4.2.10) обсяг інвестицій, вкладених у початковий момент часу $t_0 = 0$, дорівнює:

$$y'(0) = \nu \frac{dx}{dt}(0) = \nu z_0 k = z_0 b \tag{4.2.11}$$

Звідси:

$$z_0 = \frac{y'(0)}{b} = \frac{y'(0)}{1 - a} \tag{4.2.12}$$

Таким чином, величина z_0 дорівнює початковому обсягу інвестицій, поділеному на b.

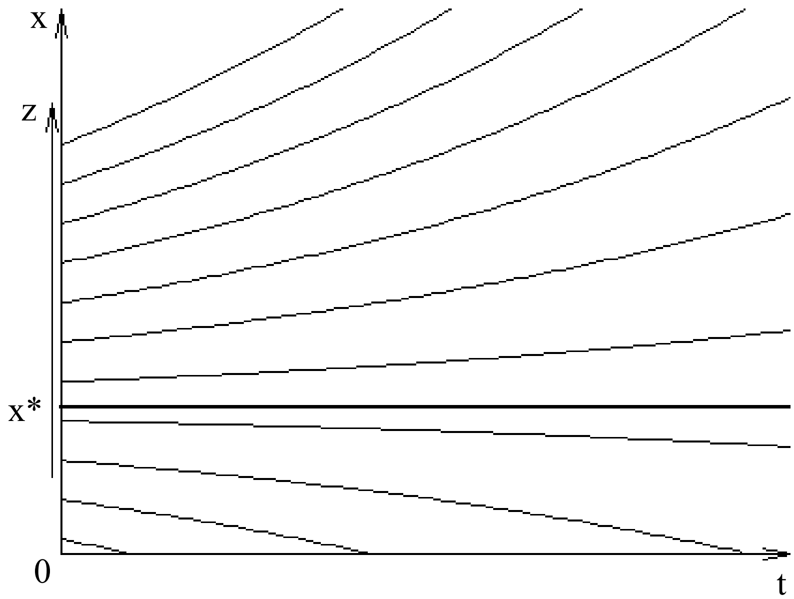

Рис. 1

Графіки, що відповідають виразу (4.2.10), побудовані для ряду значень величини z_0, приведені на рисунку 1. Проаналізуємо результати. Ми бачимо, що стан рівноваги x^* системи є хитливим, оскільки будь-яке початкове відхилення від цього стану згодом зростає. Сама по собі ця нестійкість ні хороша і ні погана; усе залежить від того, яку задачу ми вирішуємо.

У сучасних країнах з розвитою ринковою економікою її нестійкість сприймається як істотний недолік, оскільки вона вже неодноразово приводила до важких криз. Тому з нестійкістю борються різними законодавчими й адміністративними мірами.

У випадку країни зі слаборозвиненою економікою нестійкість може сприйматися як благо, оскільки дозволяє сподіватися, при відповідних умовах, на швидкий розвиток. Однак такий розвиток буде відбуватися тільки тоді, коли початкове положення знаходиться вище рівноважного положення x^*. Якщо ж із самого початку опинитися нижче цього положення, то можна швидким способом знищити економіку.

Звернемо увагу на те, що експонентний характер росту обсягу виробництва x прямо пов'язаний з умовою сталості вільного залишку y і викликаний тим, що, при постійному вільному залишку, весь приріст обсягу виробництва йде тільки на подальше розширення виробництва

Приведені на рис. 2.2.1 графіки відносяться до випадку прибуткової економічної системи, що відповідає нерівностям $a<1$ і $b=1-a>0$. У випадку нерентабельної системи, коли виробничий коефіцієнт більше одиниці: $a>1$, як ми знаємо, додатному значенню x відповідає від'ємний вільний залишок y. У цьому випадку буде $b=1-a<0$ і $k=\nu/b<0$. Тоді графіки залежностей $x = x(t)$ (4.2.10) приймають вид, зображений на рисунку 2.

У цьому випадку стан рівноваги системи є стійким. При будь-яких відхиленнях від цього стану система прагне повернутися в нього. Нагадаємо, однак, що ми розглядаємо збиткову систему, що існує за рахунок дотацій. Отже, її стійкість означає, що вона стабільно збиткова і пручається спробам вивести її зі збиткового стану!

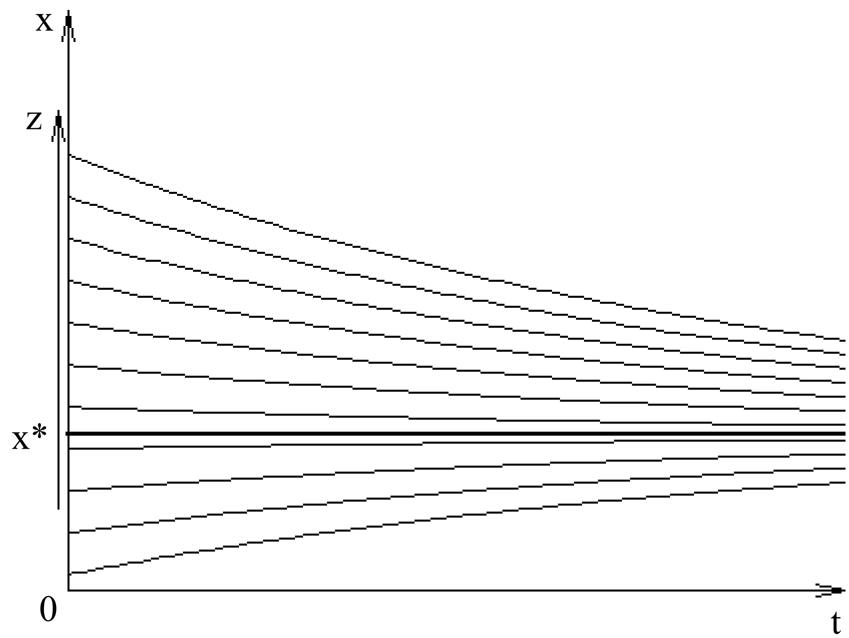

Рис. 2

Ми розглянули тільки найпростіший випадок постійних параметрів системи, одержавши вже в цьому випадку досить цікаві результати. Розгляд перемінних параметрів складніше і буде виконано далі.