НЕЛІНІЙНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ

У попередній главі були розглянуті нелінійні узагальнення статичних рівнянь Леонтьєва. Однак обмеження тільки статикою не дозволяє вирішувати ряд важливих задач, зв'язаних з еволюцією економічних систем. Зокрема, залишаються відкритими питання про стійкість положень рівноваги системи.

Дана глава присвячена розгляду нелінійних узагальнень динамічних рівнянь Леонтьєва. При цьому враховується досвід складання нелінійних статичних рівнянь. Одержувані нелінійні динамічні рівняння дозволяють вирішувати ряд складних задач про еволюціонування економічних систем у залежності від умов їхнього існування.

У силу складності нелінійних динамічних рівнянь їхнє рішення виконується, як правило, чисельними методами з використанням апарата фазової площини, що значно полегшує дослідження одержуваних результатів.

Ряд важливих питань, у той же час, розв’язується й аналітичними методами. Зокрема, це стосується питань дослідження характеру особливих точок.

Найбільше докладно розглядаються задачі для односекторної і двосекторної економічних систем.

4.1 Односекторна економічна система

Використаємо досвід, накопичений у попередній главі, для побудови нелінійних динамічних моделей. У лінійному випадку перехід від статичних до динамічних рівнянь відбувався за рахунок додавання складових, що відбивають ріст обсягів виробництва в секторах за рахунок вкладення інвестицій. При цьому передбачалося, що швидкість росту обсягу виробництва в тім чи іншому секторі пропорційна обсягу вкладених інвестицій.

Приймемо такого ж припущення і тут, зберігаючи нелінійності тільки тих же видів, що й у статиці. Відповідно до цього, рівняння (3.1.4) перетвориться до рівняння:

$$x - w(x) = \nu \frac{dx}{dt} + y(x) \tag{4.1.1}$$

У відповідності зі зробленими тільки що припущеннями похідна dx/dt входить у рівняння лінійним образом. Це дозволяє легко розв’язати рівняння відносно похідної:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu}\left[x - w(x) - y(x)\right] \qquad (4.1.2)$$

що необхідно для його рішення яким-небудь чисельним методом, наприклад, методом Рунге-Кутти.

Рівняння (4.1.2) можна узагальнити, роблячи природні в динамічному випадку припущення про залежність виробничих витрат w і вільного залишку y не тільки від обсягу виробництва x, але і від часу t. Також може бути заданою функцією часу і коефіцієнт фондомісткості ν. У підсумку замість (4.1.2) одержуємо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu(t)}\left[x - w(t,x) - y(t,x)\right] \qquad (4.1.3)$$

Це рівняння також нескладне розв’язується чисельним методом.

Однак наочність рішення як для рівняння (4.1.2), так і для рівняння (4.1.3) різко підвищується, якщо використовувати чисельний метод інтегрування разом з методом фазової площини.

Продемонструємо таке сполучення на частковому прикладі квадратичних залежностей для w і y (3.1.5). У цьому випадку рівняння (4.1.2) прийме вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu}\left[-(a_0 + b_0) + (1 - a_1 - b_1)x - (a_2 + b_2)x^2\right] \qquad (4.1.4)$$

Рівняння (4.1.4) можна розглядати як алгебраїчне рівняння, що зв'язує швидкість зміни обсягу виробництва $\dot{x} = dx/dt$ з величиною цього обсягу x. Відповідна крива на фазовій площині $x,\ \dot{x}$ має, у даному випадку, вид параболи. На рис. 4.1.1 фазова площина $x,\ \dot{x}$ зображена разом із площиною $x,\ t$. При цьому, для зручності спільного розгляду, в обох випадках вісь x спрямована нагору. У силу цього вісь $\dot{x}$ на фазовій площині спрямована горизонтально вліво, а парабола має горизонтальну вісь.

Розглянемо докладніше властивості цієї параболи. Вона може перетинати вісь x у двох точках, бути дотичною до цієї осі в одній точці чи не перетинати осі. Для знаходження точок перетинання вирішимо спочатку статичне рівняння, що відповідає постійному обсягу виробництва $x = \text{const}$. У цьому випадку буде: $\dot{x} = dx/dt = 0$ і ми знову приходимо до рівняння (3.1.7), корені якого знаходяться по формулах (3.1.8). При досить малих значеннях величин a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 маємо два дійсних корені x_1, x_2. Отже, парабола перетинає вісь x у двох точках (рис. 12).

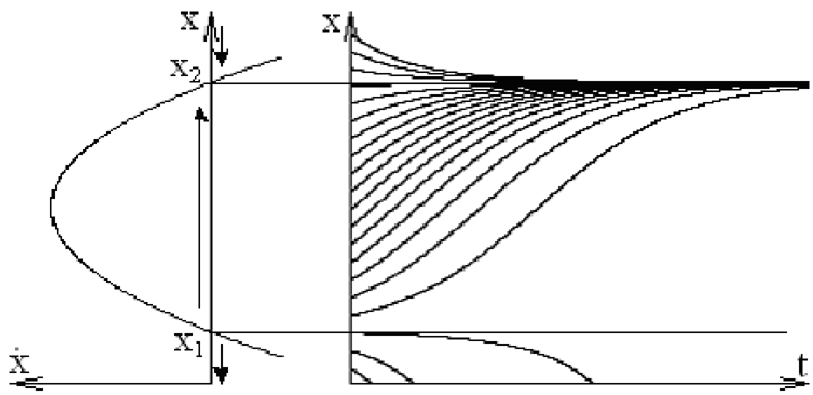

Рис. 12

Звернемо увагу на те, що при $x < x_1$ значення швидкості від’ємне: $\dot{x} < 0$. Отже, величина x убуває. У проміжку $x_1 < x < x_2$ швидкість додатна; величина x зростає. При $x > x_2$ швидкість знову від’ємна; величина x убуває. Відповідні зони на рисунку 12 відзначені стрілочками, спрямованими вниз чи нагору. Результати чисельного інтегрування рівняння (4.1.4), проведеного для ряду початкових значень x, зображені в графічному виді праворуч від фазової площини. Відповідні криві поводяться саме так, як випливає з тільки що проробленого аналізу фазової площини.

Розгляд графіків, зображених на рисунку 12, дозволяє зробити висновок про нестійкість положення рівноваги, що відповідає першому кореню x_1. Малі відхилення від цього положення рівноваги надалі наростають. Друге положення рівноваги, що відповідає кореню x_2, навпаки, стійке. При малих відхиленнях від цього положення система прагне повернутися назад у нього.

Таким чином, ми бачимо, що метод фазової площини, у даному випадку, дозволяє завбачити якісну картину інтегральних кривих на площині x, t, а також дає цим кривим чітке економічне значення.

Зокрема, добре видно, що в даному випадку існує зона економічного росту; причому цей ріст обмежений значенням x_2. Такий результат істотно відрізняється від лінійного випадку, коли ріст обсягу виробництва носив експонентний характер і не мав ніяких обмежень.

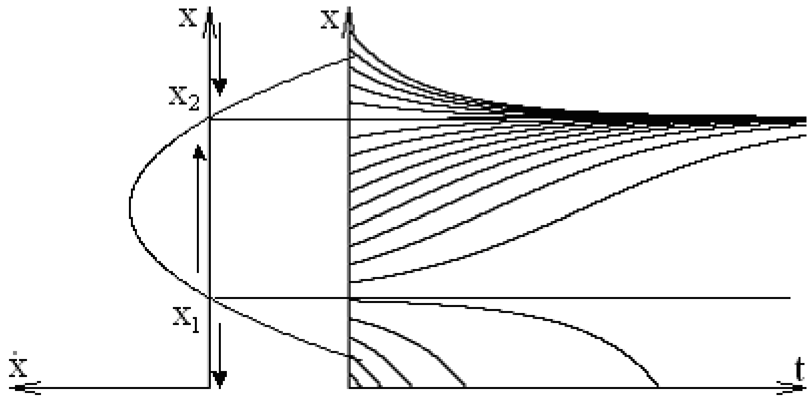

Рис. 13

З ростом величин a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 корені x_1, x_2 зближаються між собою (рис. 13), але доти, поки вони залишаються дійсними, картина в цілому якісно не змінюється.

При подальшому росту величин a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 настає момент, коли корені зливаються (рис. 14). Тепер уже зона росту величини x відсутня, але зберігається положення рівноваги, що відповідає кратному кореню.

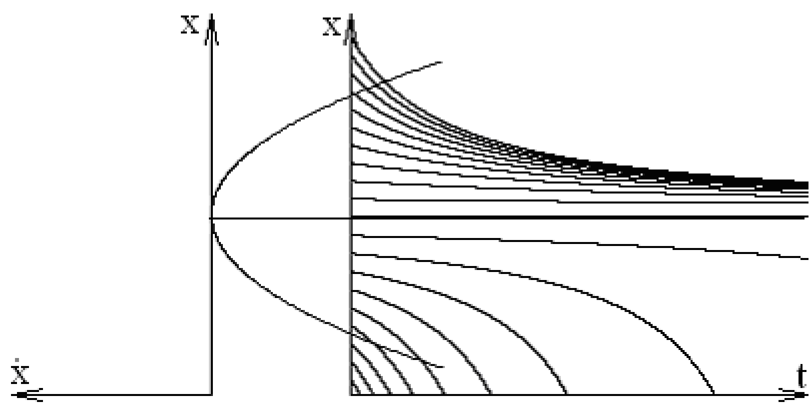

Рис. 14

Збільшуючи величини a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 далі, ми приходимо до ситуації відсутності дійсних коренів, що відповідає відсутності положень рівноваги (рис. 15). У цьому випадку можливо тільки убування величини x при будь-яких початкових умовах.

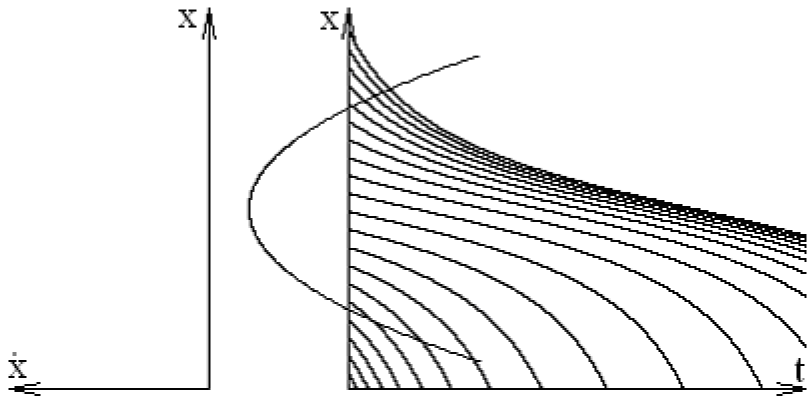

Рис. 15

Ми розглянули досить докладно тільки приклад квадратичних залежностей величин w і y від x. Нескладно вивчити і будь-який інший випадок, користаючись тими ж самими методами. В усіх випадках розгляд фазової площини $x, \dot{x}$ значно полегшує розуміння картини, одержуваної за допомогою чисельного інтегрування нелінійного диференціального рівняння.