Двосекторна економічна система. Динамічні рівняння

Перейдемо до рівнянь для двосекторної економічної системи. У статичних рівняннях (1.2.9) у правих частинах зазначені вільні залишки, частину яких можна направити на розширення виробництва. Врахуємо при цьому, що засоби, отримані в одному із секторів, можуть бути спрямовані для інвестицій в обох секторів. У зв'язку з цим величину y_1 заміняємо на:

$$y_1 \to y_1 + y_1' + y_1'' \tag{6.3.1}$$

Тут y_1' – інвестиції в перший сектор, а y_1'' – інвестиції в другий сектор економічної системи. Величина y_1 в правій частині задає новий (менший, чим раніше) обсяг вільних засобів. Припустимо, що швидкість росту валового продукту в першому секторі dx_1/dt пропорційна y_1':

$$y_1' = \nu_{11} \frac{dx_1}{dt} \ , \tag{6.3.2}$$

а швидкість росту валового продукту dx_2/dt в другому секторі пропорційна y_1'':

$$y_1'' = \nu_{12} \frac{dx_2}{dt} \tag{6.3.3}$$

Аналогічно, величину y_2 заміняємо на:

$$y_2 \to y_2 + y_2' + y_2'' \tag{6.3.4}$$

і вважаємо величину y_2' пропорційною dx_1/dt:

$$y_2' = \nu_{21} \frac{dx_1}{dt} \ , \tag{6.3.5}$$

а y_2'' – пропорційною dx_2/dt:

$$y_2'' = \nu_{22} \frac{dx_2}{dt} \tag{6.3.6}$$

Коефіцієнти пропорційності $\nu_{11}, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{22}$ і тут називаються коефіцієнтами фондомісткості. До них відноситься всі те, що було сказано про коефіцієнт фондомісткості у випадку односекторної економічної системи, однак тут необхідно зробити деякі зауваження. Коефіцієнти ν_{11} і ν_{21} задають фондомісткості першого сектора економічної системи. Тому можна було б очікувати їхньої рівності між собою. Так і було б при умовах однакових умов збереження і надходження інвестицій у перший сектор як з нього самого, так і з другого сектора. Однак цілком можливо, що ці умови можуть досить сильно відрізнятися. Тому, у загальному випадку, будемо вважати коефіцієнти ν_{11} і ν_{21} різними. Те ж саме відноситься і до величин ν_{12} і ν_{22}, що характеризують інвестиції в другий сектор економічної системи.

Підставляючи (6.3.2) і (6.3.3) у (6.3.1), а (6.3.5) і (6.3.6) у (6.3.4), а потім (6.3.1) і (6.3.4) у (1.2.9) одержуємо систему динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи:

$$(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + y_1 \qquad (6.3.7)$$
$$-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + y_2$$

2.4 Розв'язок динамічних рівнянь для двосекторної економічної системи

Для двосекторного динамічного випадку вирішуються ті ж дві головні задачі, що й у попередніх випадках.

Перша. При заданих залежностях:

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t) \qquad (6.4.1)$$

знайти вільні залишки, задані як функції часу. Ця задача вирішується безпосередньо, за допомогою перетворення (6.3.7) до виду:

$$y_1(t) = (1-a_{11})x_1(t) - a_{12}x_2(t) - \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} - \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} \qquad (6.4.2)$$
$$y_2(t) = -a_{21}x_1(t) + (1-a_{22})x_2(t) - \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} - \nu_{22}\frac{dx_2}{dt}$$

Друга. Знаходження, за допомогою рішення диференціальних рівнянь (6.3.7), залежностей (6.4.1). Розглянемо це рішення. Як і в односекторному випадку, обмежимося спочатку випадком постійних параметрів системи. Економічний зміст цього такої ж, як і раніше. Повторимо коротко його опис.

Сталість виробничих коефіцієнтів $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ означає, що відносний обсяг виробничих витрат не змінюється в часі. Це можливо при стабільному функціонуванні устаткування, коли витрати на його обслуговування і ремонт не змінюються в часі. Крім того, повинні бути стабільними ціни на сировину і комплектуючі і т.д.

Сталість коефіцієнтів фондомісткості $\nu_{11}, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{22}$ зв'язана, насамперед, з таким фактором, як політична стабільність. Інвестори, що вклали засоби в розширення виробництва й чекають їхньої окупності, а потім і одержання прибутку, вправі розраховувати, що в доступному для огляду майбутньому не відбудуться такі події, що зможуть поставити під сумнів можливість подальшого розвитку виробництва, а також права власності інвестора.

Вимога сталості вільних залишків y_1, y_2 означає, що весь приріст прибутку в обох секторах йде на подальше розширення виробництва, а невиробничі витрати залишаються незмінними. Таке тверде обмеження характерне для початкової стадії розвитку; воно необхідно для підтримки найвищих темпів розвитку.

З урахуванням зроблених припущень відшукуємо спочатку стаціонарне рішення, що відповідає постійним значенням x_1^* і x_2^*. Похідні від констант дорівнюють нулю і динамічні рівняння перетворюються в статичні:

$$\begin{aligned}(1-a_{11})x_1^* - a_{12}x_2^* &= y_1 \\ -a_{21}x_1^* + (1-a_{22})x_2^* &= y_2\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Їхнє рішення, відповідно до (1.2.12), буде:

$$x_1^* = \frac{y_1(1-a_{22}) + y_2 a_{12}}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}, \; x_2^* = \frac{y_1 a_{21} + y_2(1-a_{11})}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}} \tag{6.4.4}$$

Це рішення задає особливу точку на фазовій площині x_1, x_2. Перенесемо початок координат у цю точку (рис. 3), виконавши заміну:

$$x_1 = x_1^* + z_1, \; x_2 = x_2^* + z_2 \tag{6.4.5}$$

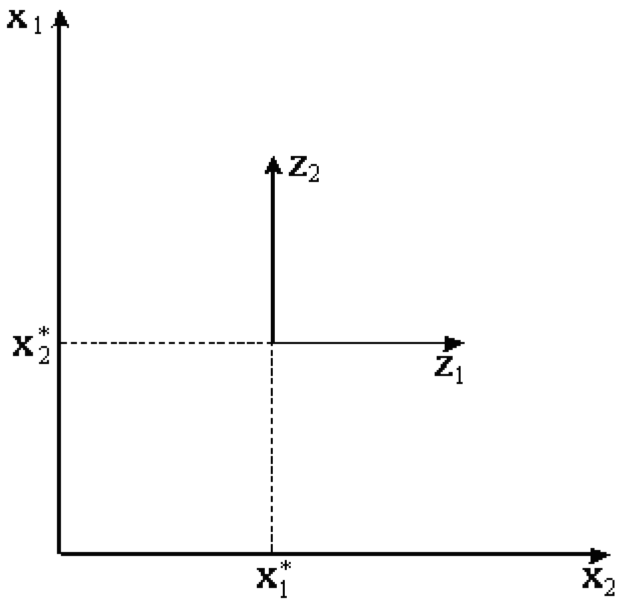

Рис.3

Підставимо (6.4.5) у (6.3.7). З урахуванням рівностей:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt}, \; \frac{dx_2}{dt} = \frac{dz_2}{dt} \;, \tag{6.4.6}$$

справедливих при постійних $x_1^*,\ x_2^*$, одержуємо:

$$\begin{gathered}(1-a_{11})x_1^* + (1-a_{11})z_1 - a_{12}x_2^* - a_{12}z_2 = \nu_{11}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dz_2}{dt} + y_1 \\ -a_{21}x_1^* - a_{21}z_1 + (1-a_{22})x_2^* + (1-a_{22})z_2 = \nu_{21}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dz_2}{dt} + y_2\end{gathered} \tag{6.4.7}$$

У силу (6.4.3) доданки з зірочками в лівих частинах рівнянь скорочуються з вільними залишками в правих частинах. У підсумку ми приходимо до однорідних рівнянь:

$$\begin{gathered}(1-a_{11})z_1 - a_{12}z_2 = \nu_{11}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dz_2}{dt} \\ -a_{21}z_1 + (1-a_{22})\frac{dz_2}{dt} = \nu_{21}\frac{dz_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dz_2}{dt}\end{gathered} \tag{6.4.8}$$

Перетворимо цю систему рівнянь до виду, розв'язаному відносно похідних:

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{\left[(1-a_{11})\nu_{22}+a_{21}\nu_{12}\right]z_1-\left[(1-a_{22})\nu_{12}+a_{12}\nu_{22}\right]z_2}{\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21}} \qquad (6.4.9)$$
$$\frac{dz_2}{dt}=\frac{-\left[(1-a_{11})\nu_{21}+a_{21}\nu_{11}\right]z_1+\left[(1-a_{22})\nu_{11}+a_{12}\nu_{21}\right]z_2}{\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21}}$$

Зрозуміло, це можливо тільки при нерівній нулю величині $\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21}$.

Розшукуємо рішення цих рівнянь у виді:

$$z_1=A_1e^{kt},\; z_2=A_2e^{kt} \qquad (6.4.10)$$

Підставляючи (6.4.10) у (6.4.9) і скорочуючи на загальний множник e^{kt} приходимо до рівнянь щодо амплітуд $A_1,\; A_2$:

$$\left[(1-a_{11})\nu_{22}+a_{21}\nu_{12}-k(\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21})\right]A_1-\left[(1-a_{22})\nu_{12}+a_{12}\nu_{22}\right]A_2=0 \quad (6.4.11)$$
$$-\left[(1-a_{11})\nu_{21}+a_{21}\nu_{11}\right]A_1+\left[(1-a_{22})\nu_{11}+a_{12}\nu_{21}-k(\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21})\right]A_2=0$$

Для того щоб ця система однорідних алгебраїчних рівнянь мала нетривіальне ненульове рішення, дорівняємо до нуля її визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}(1-a_{11})\nu_{22}+a_{21}\nu_{12}-k(\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21}) & -\left[(1-a_{22})\nu_{12}+a_{12}\nu_{22}\right]\\ -\left[(1-a_{11})\nu_{21}+a_{21}\nu_{11}\right] & (1-a_{22})\nu_{11}+a_{12}\nu_{21}-k(\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21})\end{vmatrix}=0$$

Розкриваючи цей визначник і приводячи подібні по однакових степенях k одержуємо характеристичне рівняння:

$$e_0k^2-e_1k+e_2=0 \qquad (6.4.12)$$
$$e_0=\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21},\; e_1=(1-a_{11})\nu_{22}+(1-a_{22})\nu_{11}+a_{12}\nu_{21}+a_{21}\nu_{12}$$
$$e_2=(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}$$

Це характеристичне рівняння має два корені:

$$k_{1,2} = \frac{e_1 \pm \sqrt{D}}{2e_0}, \ D = e_1^2 - 4e_0 e_2 \tag{6.4.13}$$

Вивчимо докладніше величину дискримінанта D. У відповідності зі значеннями коефіцієнтів рівняння (6.4.12) маємо:

$$\begin{aligned}
D &= \left[(1-a_{11})\nu_{22} + (1-a_{22})\nu_{11} + a_{12}\nu_{21} + a_{21}\nu_{12}\right]^2 - \\
&- 4(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})\left[(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}\right] = \\
&= (1-a_{11})^2\nu_{22}^2 + (1-a_{22})^2\nu_{11}^2 + a_{12}^2\nu_{21}^2 + a_{21}^2\nu_{12}^2 + 2(1-a_{11})(1-a_{22})\nu_{11}\nu_{22} + \\
&+ 2(1-a_{11})a_{12}\nu_{22}\nu_{21} + 2(1-a_{11})a_{21}\nu_{22}\nu_{12} + 2(1-a_{22})a_{12}\nu_{11}\nu_{21} + \\
&+ 2(1-a_{22})a_{21}\nu_{11}\nu_{12} + 2a_{12}a_{21}\nu_{21}\nu_{12} - 4\nu_{11}\nu_{22}(1-a_{11})(1-a_{22}) + \\
&+ 4\nu_{11}\nu_{22}a_{12}a_{21} + 4\nu_{12}\nu_{21}(1-a_{11})(1-a_{22}) - 4\nu_{12}\nu_{21}a_{12}a_{21} = \\
&= (1-a_{11})^2\nu_{22}^2 - 2(1-a_{11})(1-a_{22})\nu_{11}\nu_{22} + (1-a_{22})^2\nu_{11}^2 + \\
&+ a_{12}^2\nu_{21}^2 - 2a_{12}a_{21}\nu_{21}\nu_{12} + a_{21}^2\nu_{12}^2 + 2(1-a_{11})a_{12}\nu_{22}\nu_{21} + \\
&+ 2(1-a_{11})a_{21}\nu_{22}\nu_{12} + 2(1-a_{22})a_{12}\nu_{11}\nu_{21} + 2(1-a_{22})a_{21}\nu_{11}\nu_{12} + \\
&+ 4\nu_{11}\nu_{22}a_{12}a_{21} + 4\nu_{12}\nu_{21}(1-a_{11})(1-a_{22}) = \\
&= \left[(1-a_{11})\nu_{22} - (1-a_{22})\nu_{11}\right]^2 + (a_{12}\nu_{21} - a_{21}\nu_{12})^2 + 2(1-a_{11})a_{12}\nu_{22}\nu_{21} + \\
&+ 2(1-a_{11})a_{21}\nu_{22}\nu_{12} + 2(1-a_{22})a_{12}\nu_{11}\nu_{21} + 2(1-a_{22})a_{21}\nu_{11}\nu_{12} + \\
&+ 4\nu_{11}\nu_{22}a_{12}a_{21} + 4\nu_{12}\nu_{21}(1-a_{11})(1-a_{22}) > 0
\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

За допомогою очевидних перегрупувань ми одержали вираження для дискримінанта, у якому від’ємними можуть бути тільки доданки, що містять вираження $1-a_{11}$ і $1-a_{22}$. Припускаючи, що ці вираження невід’ємні, що відповідає виробничим витратам кожного сектора, які не перевищують обсяг виробництва в секторі, одержуємо, що і весь дискримінант є невід’ємним. Отже, обидва корені характеристичного рівняння є дійсними.

Розглянемо знаки коренів. Величина e_1 є додатною; величини e_0 і e_2 можуть бути як додатними, так і від’ємними. Якщо $e_0 e_2 > 0$, то справедлива нерівність:

$$\sqrt{D} = \sqrt{e_1^2 - 4e_0 e_2} < e_1 \tag{6.4.15}$$

У цьому випадку одержуємо, що вираження, що стоїть в знаменнику дробу (6.4.13) додатне при будь-якому знаку перед радикалом; отже, обидва корені мають однаковий знак – додатний при $e_0 > 0$ і від'ємний при $e_0 < 0$.

Якщо $e_0 e_2 < 0$, то буде:

$$\sqrt{D} = \sqrt{e_1^2 - 4e_0 e_2} > e_1 \tag{6.4.16}$$

У цьому випадку знаменник у дробі (6.4.13) додатний при знаку + перед радикалом і від'ємний при знаку –. Отже, корені мають протилежні знаки.

Повернемося до рівнянь (6.4.11). При підстановці в них одного зі значень k, рівного k_1 чи k_2, визначник системи звертається в нуль; отже, рівняння стають лінійно залежними. Це означає, що варто розглядати тільки одне з рівнянь, наприклад, перше, оскільки друге є його копією (з точністю до деякого загального множника).

Підставляючи в перше з рівнянь (6.4.11) $k = k_1$ знаходимо відповідне співвідношення між амплітудами:

$$A_{21} = \alpha_1 A_{11},\ \alpha_1 = \frac{(1 - a_{11})\nu_{22} + a_{21}\nu_{12} - k_1(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})}{(1 - a_{22})\nu_{12} + a_{12}\nu_{22}} \tag{6.4.17}$$

При $k = k_2$ буде:

$$A_{22} = \alpha_2 A_{12},\ \alpha_2 = \frac{(1 - a_{11})\nu_{22} + a_{21}\nu_{12} - k_2(\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21})}{(1 - a_{22})\nu_{12} + a_{12}\nu_{22}} \tag{6.4.18}$$

Тут амплітуди A_1 і A_2 придбали по другому індексу, рівному відповідному індексу в корені k.

Загальне рішення однорідної системи диференціальних рівнянь (6.4.8) буде мати вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_{11}e^{k_1 t} + A_{12}e^{k_2 t} \\ z_2 &= A_{21}e^{k_1 t} + A_{22}e^{k_2 t} = \alpha_1 A_{11}e^{k_1 t} + \alpha_2 A_{12}e^{k_2 t} \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

Загальне рішення вихідної неоднорідної системи рівнянь (6.3.7) буде:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^* + A_{11}e^{k_1 t} + A_{12}e^{k_2 t} \\
x_2 &= x_2^* + \alpha_1 A_{11}e^{k_1 t} + \alpha_2 A_{12}e^{k_2 t}
\end{aligned}
\tag{6.4.20}
$$

Для знаходження постійних інтегрування A_{11} і A_{12} скористаємося заданими в момент часу $t_0 = 0$ початковими значеннями x_{10}, x_{20}. З (6.4.20) при $t = 0$ одержуємо:

$$
\begin{aligned}
x_{10} - x_1^* &= A_{11} + A_{12} \\
x_{20} - x_2^* &= \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12}
\end{aligned}
\tag{6.4.21}
$$

Звідси:

$$
A_{11} = \frac{x_{20} - x_2^* - \alpha_2\left(x_{10} - x_1^*\right)}{\alpha_1 - \alpha_2},\; A_{12} = \frac{x_{20} - x_2^* - \alpha_1\left(x_{10} - x_1^*\right)}{\alpha_2 - \alpha_1}
\tag{6.4.22}
$$

Рішення в загальному виді цілком завершено. Розглянемо деякі графічні ілюстрації отриманих результатів з використанням фазової площини x_1, x_2.

При $e_2 > 0$ система є, як правило, рентабельною, як це було показано в розділі 1.2. Це означає, що додатним значенням x_1, x_2 відповідають і додатні вільні залишки y_1, y_2 і навпаки. Нехай при цьому буде $e_0 > 0$. Як ми показали вище, при цьому обидва корені характеристичного рівняння додатні і фазова площина в околі статичного положення системи має вид, зображений на рисунку 4. Статичне положення є особливою точкою типу хитливого вузла.

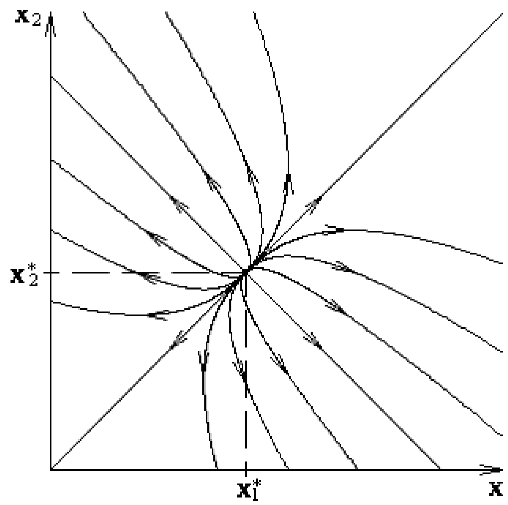

Рис. 4

При $e_0 < 0$ корені мають протилежні знаки і фазова площина має вид, зображений на рис. 2.4.3. Тепер статичне положення системи є особливою точкою типу сідло.

Розглянемо ці результати докладніше. В обох випадках статичні положення хитливі. Будь-які початкові відхилення від них надалі необмежено зростають. Проте, ці нестійкості істотно відрізняються друг від друга. У першому випадку (рис. 4) відхід від положення рівноваги системи майже завжди супроводжується зменшенням, аж до від ємних значень, обох чи однієї з величин x_1, x_2. Одночасний ріст x_1, x_2 можливий у єдиному випадку; найменше відхилення від відповідної лінії неминуче приводить надалі до зменшення однієї з цих величин. Таким чином, у цьому випадку забезпечити розвиток системи практично неможливо.

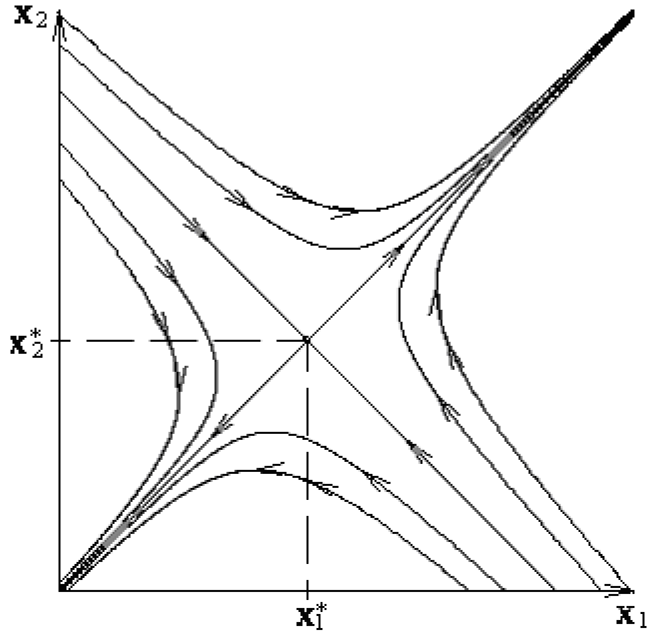

Рис.5

В другому випадку (рис. 5) зменшення x_1, x_2 відбувається тільки при старті з деякого околу початку координат. В усіх інших випадках ми бачимо одночасний ріст цих величин, тобто обсягів виробництва в обох секторах. Таким чином, ми бачимо, що явно краще ситуація з $e_0 < 0$. Чим же відрізняються розглянуті випадки?

При $e_0 > 0$, відповідно до (6.4.12), переважає добуток коефіцієнтів фондомісткості $\nu_{11}\nu_{22}$ над добутком коефіцієнтів фондомісткості $\nu_{12}\nu_{21}$. Це значить, що строки окупності власних інвестицій у сектори економічної системи більші, ніж строки окупності перехресних інвестицій секторів друг у друга. Кожний із секторів воліє витрачати, у першу чергу, «чужі» засоби, а не свої. Як бачимо, це приводить до неминучого руйнування одного чи обох секторів.

При $e_0 < 0$ маємо зворотну картину. Переважає добуток коефіцієнтів фондомісткості $\nu_{12}\nu_{21}$ над коефіцієнтами фондомісткості $\nu_{11}\nu_{22}$. Отже, кожний із секторів швидше окупає власні інвестиції, чим інвестиції із сусіднього сектора. Саме це забезпечує зростання виробництва в обох секторах (при вдало підібраних початкових умовах).

При $e_2 < 0$ система, як правило, нерентабельна, тобто додатні значення обсягів виробництва x_1, x_2 можливі тільки при від'ємних вільних залишках y_1, y_2, тобто при одержанні дотацій обома секторами. При цьому знову розглянемо обидва значення знаків величини e_0.

При $e_0 > 0$ одержуємо картину, зображену на рисунку 6. Кореням протилежного знака відповідає особлива точка типу сідло. Перевага «чужих» інвестиціям у порівнянні з «своїми» приводить до гарантованого руйнування одного із секторів.

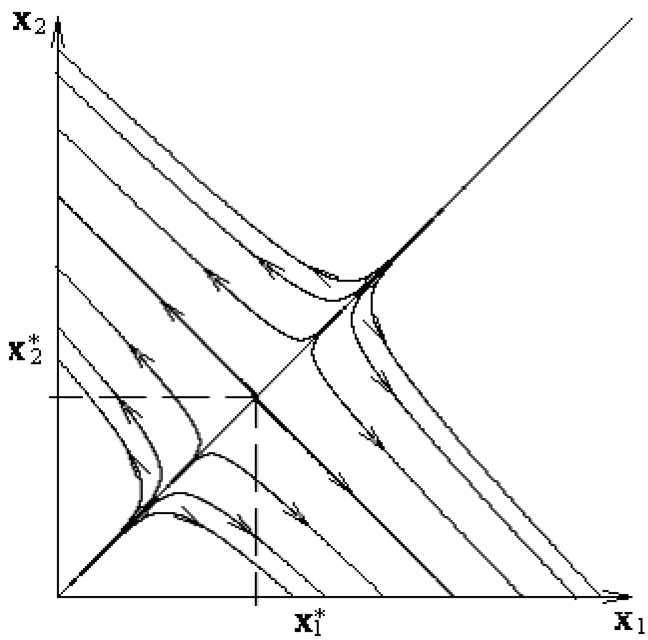

Рис.6

Результат, що відповідає $e_0 < 0$, зображений на рисунку 7. Тут одержуємо стійкий вузол, що відповідає двом від'ємним кореням. Ця стійкість досить цікава. Як ми пам'ятаємо, система суттєво збиткова; обидва сектори мають потребу в дотаціях. Стійкість, у цьому випадку, означає, що система пручається всяким спробам розвитку. Однак, усе-таки, вона, принаймні, здатна функціонувати без погіршення показників.

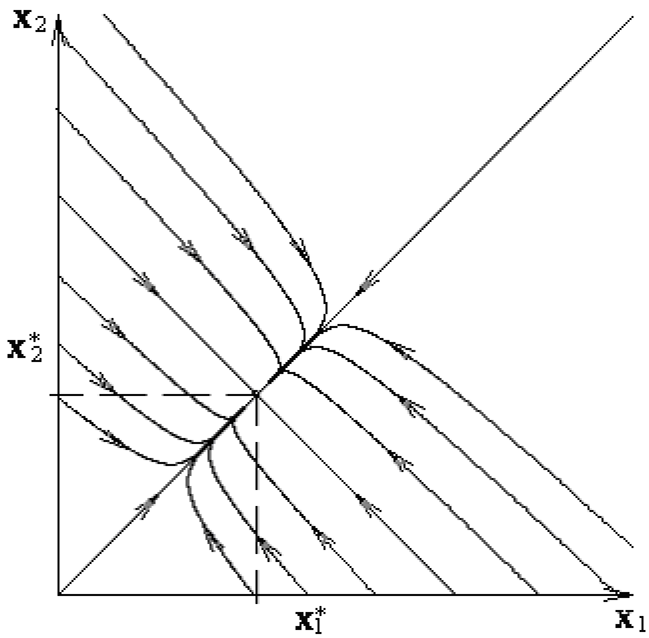

Рис.7

Ми бачимо, що у всіх розглянутих випадках кращі результати дає опора, у першу чергу, на інвестування з власних, а не запозичених джерел.

Ми розглянули далеко не усі варіанти, що можуть описувати лінійні рівняння Леонтьєва для двосекторної економічної системи, однак і вже отримані результати показують, що ці рівняння здатні виявляти важливі економічні ефекти.