## Двосекторна економічна система

У двосекторному випадку зробимо так само, як в односекторному. За основу візьмемо нелінійні статичні рівняння (3.2.5), додавши в них динамічні складові такого ж виду, як у лінійному випадку. У підсумку одержимо:

$$x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) = \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + y_1(x_1,\ x_2) \qquad (8.3.1)$$
$$x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) = \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + y_2(x_1,\ x_2)$$

чи:

$$x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2) = \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} \qquad (8.3.2)$$
$$x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) - y_2(x_1,\ x_2) = \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt}$$

Як і в односекторному випадку, можливе узагальнення системи рівнянь (8.3.2) на випадок залежності вхідних у цю систему функцій від часу t:

$$x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2,\ t) - w_{12}(x_1,\ x_2,\ t) - y_1(x_1,\ x_2,\ t) = \nu_{11}(t)\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}(t)\frac{dx_2}{dt} \qquad (8.3.3)$$
$$x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2,\ t) - w_{22}(x_1,\ x_2,\ t) - y_2(x_1,\ x_2,\ t) = \nu_{21}(t)\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}(t)\frac{dx_2}{dt}$$

Рішення обох систем двох нелінійних диференціальних рівнянь (8.3.2) і (8.3.3) істотно залежить від значення визначника: $e_0 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}$, що відігравав важливу роль і в лінійному випадку. Якщо цей визначник не дорівнює нулю, то перетворюємо (8.3.2) до виду:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{e_0}\{\nu_{22}[x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2)] - \qquad (8.3.4)$$
$$- \nu_{12}[x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) - y_2(x_1,\ x_2)]\}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{e_0}\{\nu_{11}[x_2 - w_{21}(x_1,\ x_2) - w_{22}(x_1,\ x_2) - y_2(x_1,\ x_2)] -$$
$$- \nu_{21}[x_1 - w_{11}(x_1,\ x_2) - w_{12}(x_1,\ x_2) - y_1(x_1,\ x_2)]\}$$

Аналогічно можна перетворити і систему (8.3.3).

Ці випадки відповідають тому, що час окупності інвестицій у той самий сектор залежить від джерела фінансування, що відбивається в нерівності між собою коефіцієнтів фондомісткості:

$$\nu_{11} \neq \nu_{21} \text{ і (чи) } \nu_{12} \neq \nu_{22} \tag{8.3.5}$$

Рівняння (8.3.4) можна вирішувати чисельним методом, але для аналізу результатів, що виходять, корисно заздалегідь знати статичні рішення, тобто рішення, що відповідають постійним значенням величин $x_1, x_2$ і задовольняють рівнянням (3.2.5).

Розглянемо конкретні приклади, використовуючи уже вивчені в статичному випадку залежності (3.2.6) і (3.2.7). У цьому випадку рівняння (8.3.4) приймуть вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{e_0}\Big\{&\nu_{22}\left[x_1 - a_{11,0} - a_{11,1}x_1 - a_{11,2}x_1^2 - a_{12}x_2 - b_{1,0} - b_{1,1}x_1 - b_{1,2}x_1^2\right] - \\
&-\nu_{12}\left[x_2 - a_{21}x_1 - a_{22,0} - a_{22,1}x_2 - a_{22,2}x_2^2 - b_{2,0} - b_{2,1}x_2 - b_{2,2}x_2^2\right]\Big\} \\
\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{e_0}\Big\{&\nu_{11}\left[x_2 - a_{21}x_1 - a_{22,0} - a_{22,1}x_2 - a_{22,2}x_2^2 - b_0 - b_{2,1}x_2 - b_{2,2}x_2^2\right] - \\
&-\nu_{21}\left[x_1 - a_{11,0} - a_{11,1}x_1 - a_{11,2}x_1^2 - a_{12}x_2 - b_{1,0} - b_{1,1}x_1 - b_{1,2}x_1^2\right]\Big\}
\end{aligned} \tag{8.3.6}$$

Статичні рішення цих рівнянь зображені графічно на рис. 3.2.1, 3.2.2 і 3.2.3. З цих рисунків видно, що таких рішень може бути чотири, два чи жодного. Так само як в односекторному випадку, розглянемо великий набір початкових умов для того, щоб одержати повне представлення про вид фазової площини у всім різноманітті можливостей. Особливий інтерес представляють околи положень рівноваги. Ці положення є особливими точками на фазовій площині. Вид цих особливих точок істотно залежить від параметрів системи.

На рисунку 16 зображений випадок з чотирма особливими точками за умови $e_0 > 0$. Особлива точка 1 має такий же характер, як єдина особлива точка в лінійному випадку (рис. 4). Це хитливий вузол. Починаючи зміну системи поблизу цього вузла ми надалі віддаляємося від нього й у більшості випадків це видалення приводить до від'ємних значень однієї з величин $x_1$ чи $x_2$, тобто до збитковості відповідного сектора.

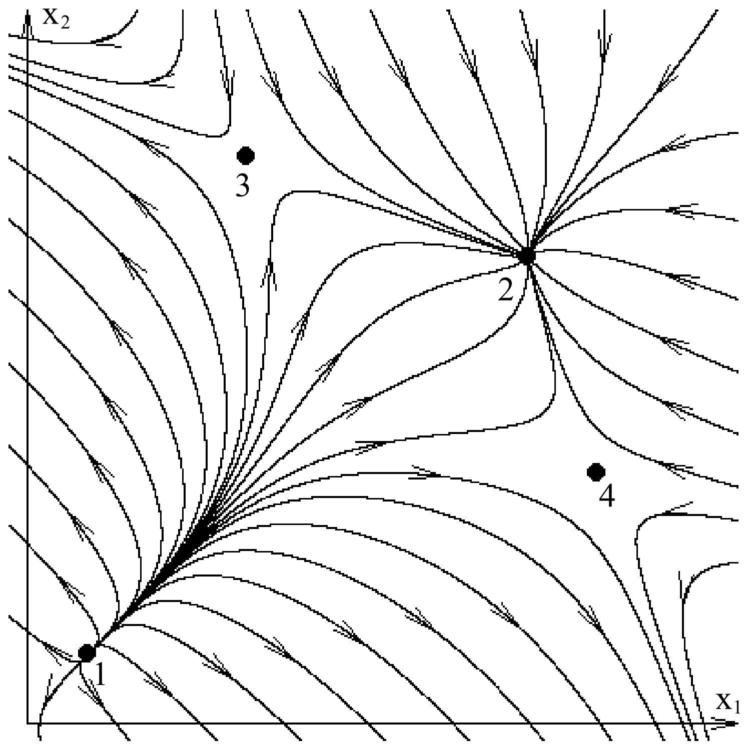

Рис.16

Однак існує дуже маленький діапазон початкових значень, що приводить до одночасного росту $x_1$, $x_2$ з наближенням до особливої точки 2, що є стійким вузлом. Нагадаємо, що в лінійному випадку існував єдиний напрямок, що приводить до одночасно росту $x_1$ і $x_2$. У даному випадку мається деякий діапазон відповідних напрямків, однак цей діапазон настільки вузький, що поводження системи поблизу особливої точки 1 можна вважати таким, що практично не відрізняється від лінійного аналога.

Істотна відмінність від лінійного випадку полягає в тім, що там ріст $x_1$ і $x_2$ (у тім єдиному випадку, коли він був можливий одночасно) був необмеженим, а тут такий ріст обмежений наближенням до точки 2.

З'являються також дві особливі точки 3 і 4 типи сідло. Проходячи повз ці особливі точки, фазові криві або відхиляються убік точки 2, або ідуть у бік збитковості одного із секторів.

У цілому можна сказати, що дана система здатна скоріше до деградації, чим до розвитку, оскільки наближення до стійкої особливої точки 2 можливо, як правило, за умови убування $x_1$ і $x_2$. Як ми вже показували в лінійному випадку, це відповідає тому, що обоє сектора краще засвоюють інвестиції друг від друга, чим власні інвестиції.

Розглянемо тепер випадок $e_0 < 0$, що відповідає протилежному варіанту, а саме кращому засвоєнню обома секторами власних інвестицій, чим інвестицій друг від друга.

Відповідний результат зображений графічно на рисунку 17. Тепер точки 1 і 2 перетворилися в сідла, а точки 3 і 4 – у стійкі фокуси. Починаючи з відносно малих значень $x_1$ і $x_2$ система переходить до значно більших значень цих величин, наближаючись до одного з стійких фокусів.

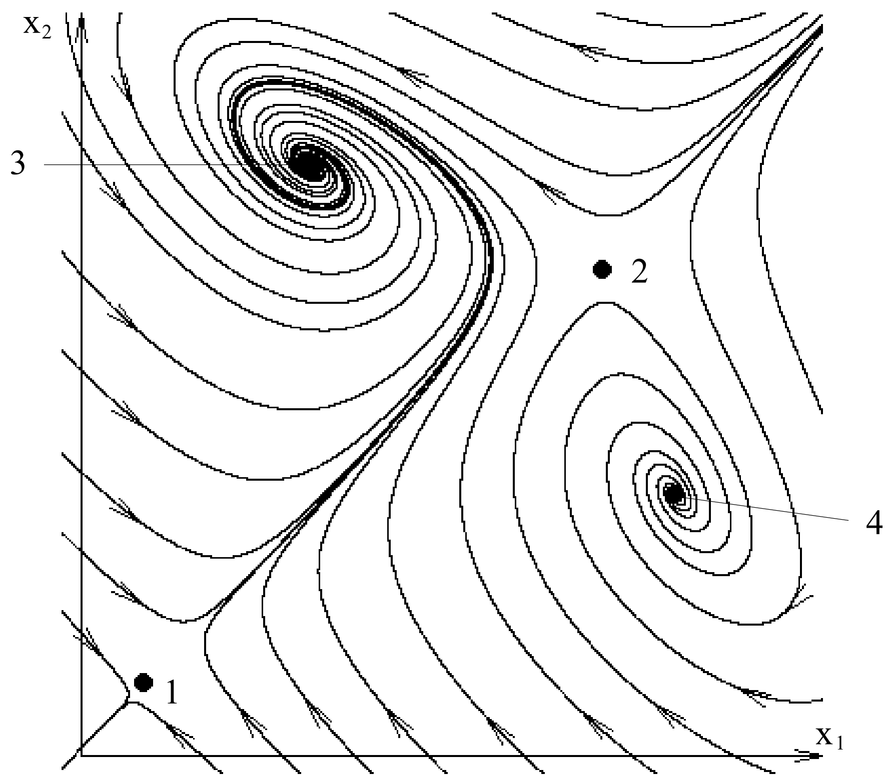


Рис. 17

Принципове розходження з попереднім варіантом полягає в тім, що тепер ріст величин $x_1$ і $x_2$ можливий для дуже великого діапазону початкових значень, у той час як зменшення $x_1$ і $x_2$ до від’ємних значень можливо тільки при початкових даних, обираних в околі початку координат.

Розглянемо тепер випадки двох особливих точок, тобто станів рівноваги системи. На рисунку 18 зображена фазова площина, що відповідає випадку $e_0 > 0$. Особлива точка 1 є хитливим вузлом, а особлива точка 2 – сідлом.

При будь-яких початкових умовах одна з $x_1$ чи величин $x_2$ з часом приймає від’ємне значення.

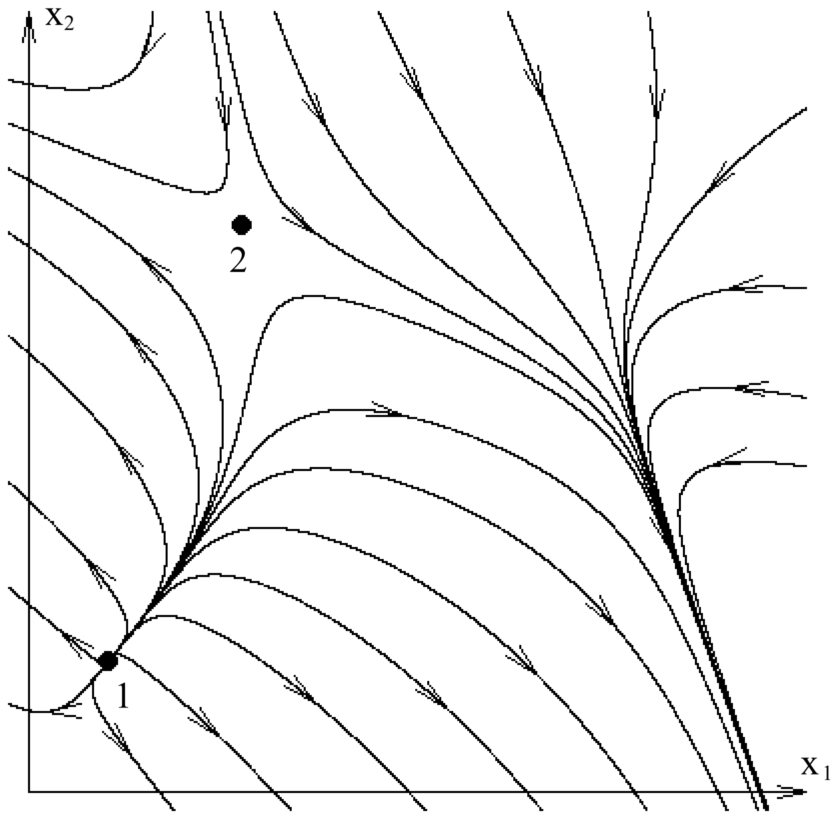

Рис. 18

Фазова площина, що відповідає випадку $e_0 < 0$, зображена на рисунку 19. Тепер особлива точка 1 є сідлом, а точка 2 – стійким фокусом. Існує дуже великий діапазон початкових значень $x_1$ і $x_2$, що приводить до подальшого росту цих значень і їхньої стабілізації поблизу точки 2.

Таким чином, і в цьому випадку кращим є значення $e_0 < 0$, що відповідає переважному використанню власних інвестицій, а лише потім – із сусіднього сектора.

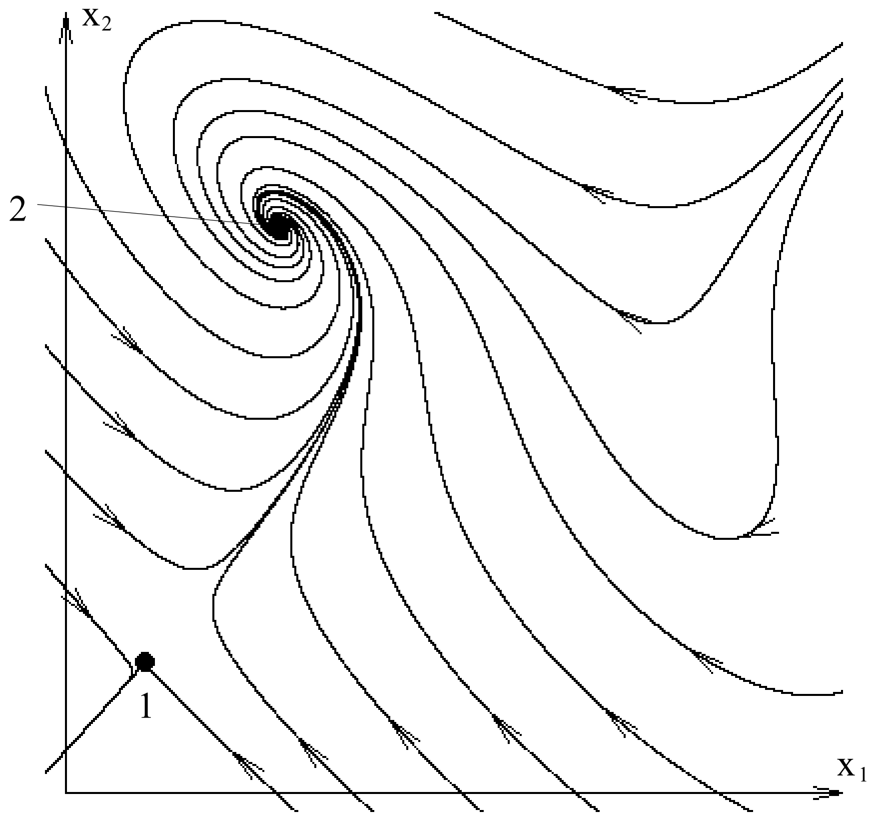


Рис. 19

Нарешті, у випадку відсутності станів рівноваги системи як при $e_0 > 0$, так і при $e_0 < 0$ ми маємо тільки убування величин $x_1$ і $x_2$ при будь-яких початкових умовах. Відповідні фазові площини зображені на рисунках 20 і 21.

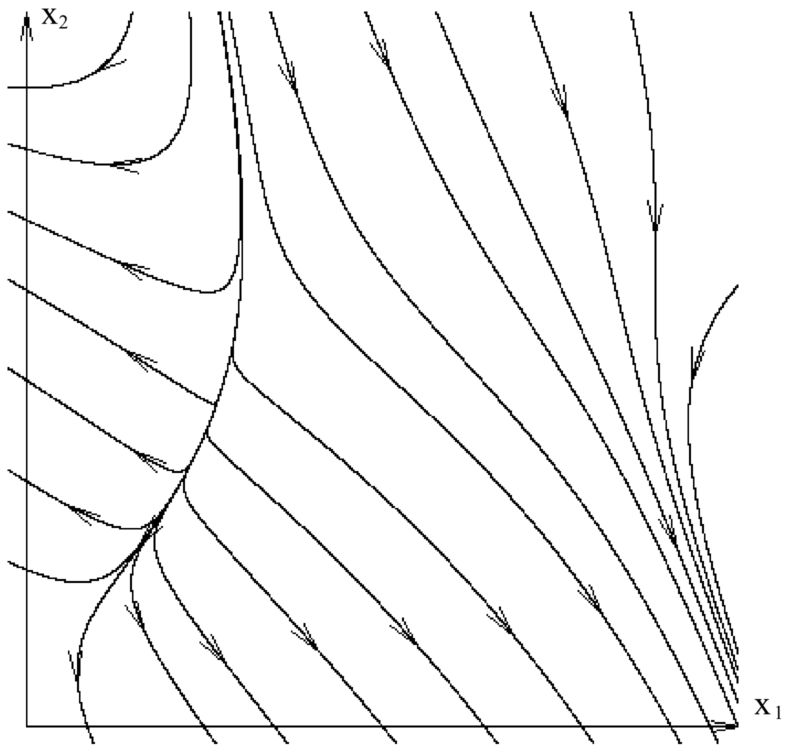

Рис.20

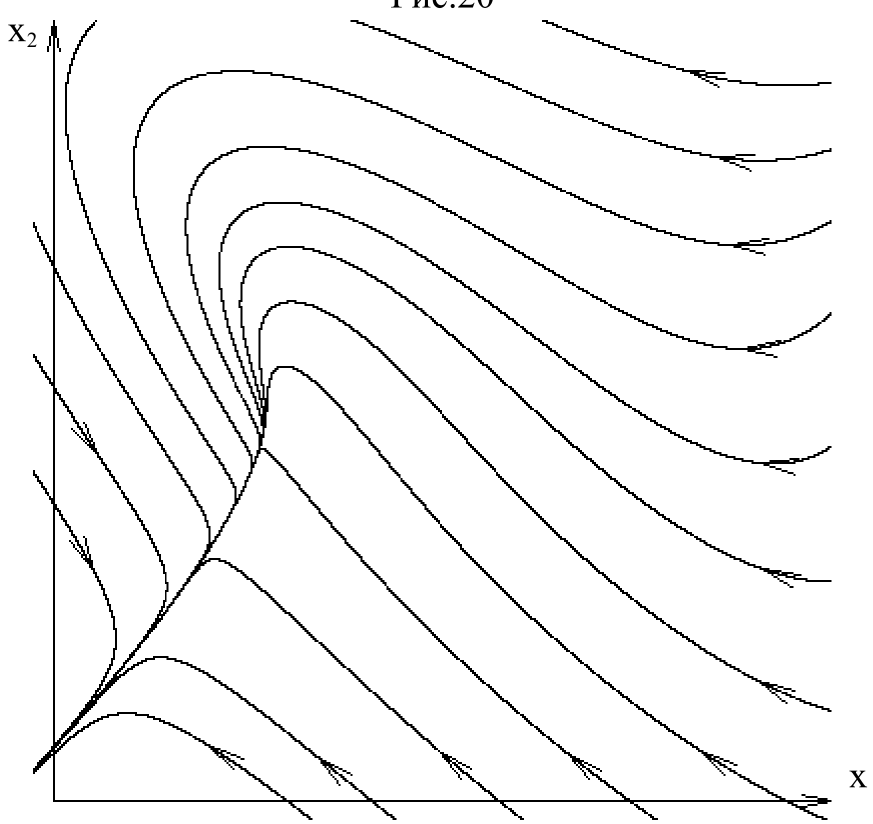

Рис. 21

Ми розглянули тільки декілька найбільш типових варіантів рішень системи нелінійних динамічних рівнянь (8.3.6). Зрозуміло, що у нелінійному випадку мається нескінченна розмаїтість різних варіантів, відмінних від розглянутих.