

**Л.9. Аналіз кратних стаціонарних станів нелінійної динамічної моделі В.Леонтьєва та відповідні типи катастроф стаціонарних станів.**

*9.1 Поняття дивергентних біфуркацій стаціонарних станів.*

Розглянутий нижче приклад розкриває просту геометричну картину дивергентної втрати стійкості при зміні характерного параметра системи, в результаті чого з'являється кратна особлива точка (дійсна біфуркація).

У цьому випадку висновок про стійкість стаціонарного стану може бути отриманий лише із залученням нелінійних членів системи в варіаціях (має місце критичний випадок одного нульового кореня). На рис.1 ілюструється біфуркація «виделки» - виникнення трикратного стаціонарного режиму при безперервній зміні параметра управління.



Рис.1

Реалізовані для випадку «виделки» біфуркації злиття і народження можуть бути представлені в символічному вигляді

$$O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}; \quad O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Тут перша цифра верхнього індексу особливої точки дорівнює числу коренів характеристичного рівняння з від'ємними дійсними частинами, друга - з додатними. Тоді індекс Пуанкаре  $j(O^{2,0})=1$ , а  $j(O^{1,1})= -1$ . Має місце «закон збереження» суми індексів Пуанкаре лівої і правої частин символічної рівності (до і після біфуркації). Для кривої стаціонарних станів з точкою повороту біфуркації злиття і народження можуть бути представлені в символічному вигляді (рис. 2)

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \emptyset; \quad \emptyset \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$



Рис.2

Точці повороту (точці злиття або народження) відповідає двократний стаціонарний режим «сідло-вузол». Поява точок повороту для систем з одним керуючим параметром, на відміну від розглянутої вище «виделки», є випадком загального положення (стійким чином реалізується при малих структурних змінах системи). У разі загального положення, тобто при структурних збуреннях, «виделка» розпадається на дві криві, у одній з яких є точка повороту (рис.3).



Рис.3. У разі загального положення і лише одного керуючого параметра біфуркація виделки структурно нестійка.

Існує певний набір структурно стійких особливостей, наприклад, згортка (fold); збірка (cusp); ластівчин хвіст (swallowtail); метелик (butterfly), що не зникають у разі малих структурних змін системи. Так, згортка (точка повороту) стійким чином реалізується в одновимірному просторі параметрів;

збірка - в двомірному просторі. Ластівчин хвіст і метелик можна «зловити» в просторі управління  $R^3$  і  $R^4$  відповідно (при наявності властивостей симетрії метелик може реалізовуватися і в тривимірному просторі параметрів). Застосування теорії особливостей в задачах аналізу динамічних систем отримали назву теорії катастроф (Р. Том) - кінцеві скачки в стані системи при нескінченно малих флуктуаціях її параметрів.

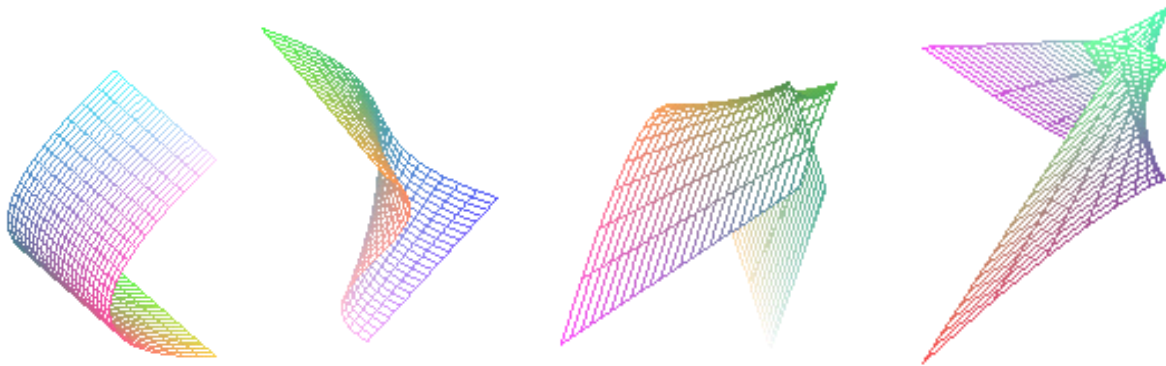


Рис.4 Згортка (fold), збірка (cusp), ластівчин хвіст (swallowtail), метелик (butterfly)

Первые четыре катастрофы (рис. 4) из знаменитой «великолепной семерки» Р.Тома: Складка (fold), сборка (cusp), ласточкин хвост (swallowtail), бабочка (butterfly).

На рис.5 представлен графический образ простейшей бифуркации - складки: слияние двух особых точек с различными индексами Пуанкаре (узла и седла) либо рождения пары особых точек с противоположными индексами .

Перші чотири катастрофи (рис. 4) зі знаменитої «чудової сімки» Р.Тома: Згортка (fold), збірка (cusp), ластівчин хвіст (swallowtail), метелик (butterfly).

На рис.5 представлено графічний образ найпростішої біфуркації - згортки: злиття двох особливих точок з різними індексами Пуанкаре (вузла і сідла) або їх народження

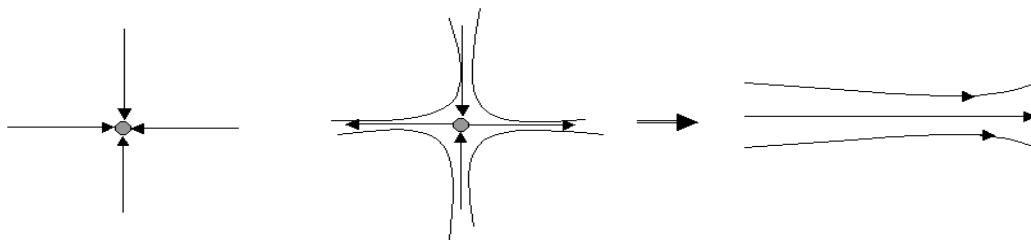


Рис.5

## 9.2. Аналіз реалізації кратних стаціонарних станів нелінійної двосекторної моделі.

Розглянемо загальний вигляд системи

$$\begin{aligned} x_1 - w_{11}(x_1, x_2) - w_{12}(x_1, x_2) &= y_1(x_1, x_2) \\ x_2 - w_{21}(x_1, x_2) - w_{22}(x_1, x_2) &= y_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

що визначає множину стаціонарних станів. Розглянемо конкретні варіанти функціональних залежностей для нелінійної двосекторної моделі В. Леонт'єва. Нехай перехресні зв'язки, обумовлені величинами  $w_{12}$  і  $w_{21}$ , залишаться такими ж, як у лінійному випадку:

$$w_{12} = a_{12}x_2, \quad w_{21} = a_{21}x_1 \quad (9.2.2)$$

Для величин  $w_{11}$ ,  $w_{22}$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  виберемо вираження, аналогічні використані в односекторному випадку:

$$\begin{aligned} w_{11} &= a_{11,0} + a_{11,1}x_1 + a_{11,2}x_2^2, \quad y_1 = b_{1,0} + b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_1^2 \\ w_{22} &= a_{22,0} + a_{22,1}x_2 + a_{22,2}x_2^2, \quad y_2 = b_{2,0} + b_{2,1}x_2 + b_{2,2}x_2^2 \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Прийняті припущення можуть означати, наприклад, що усередині кожного із секторів реалізуються більш сильні нелінійні залежності, а взаємини секторів є слабкими і, відповідно, лінійними.

Тепер рівняння (9.2.1) приймуть вид:

$$\begin{aligned} x_1 - a_{11,0} - a_{11,1}x_1 - a_{11,2}x_1^2 - a_{12}x_2 &= b_{1,0} + b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_1^2 \\ x_2 - a_{21}x_1 - a_{22,0} - a_{22,1}x_2 - a_{22,2}x_2^2 &= b_{2,0} + b_{2,1}x_2 + b_{2,2}x_2^2 \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Перетворимо їх до виду:

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{a_{11,0} + b_{1,0}}{a_{12}} + \frac{1 - a_{11,1} - b_{1,1}}{a_{12}} x_1 - \frac{a_{11,2} + b_{1,2}}{a_{12}} x_1^2 \\x_1 &= -\frac{a_{22,0} + b_{2,0}}{a_{21}} + \frac{1 - a_{22,1} - b_{2,1}}{a_{21}} x_2 - \frac{a_{22,2} + b_{2,2}}{a_{21}} x_2^2\end{aligned}\quad (9.2.5)$$

Два рівняння (9.2.5) задають дві параболы на фазовій площині  $x_1, x_2$ .

Найбільш типові випадки перетинання цих парабол зображені на рисунок 9 (чотири точки перетинання), рисунок 10 (дві точки перетинання) і рисунок 11 (немає точок перетинання).

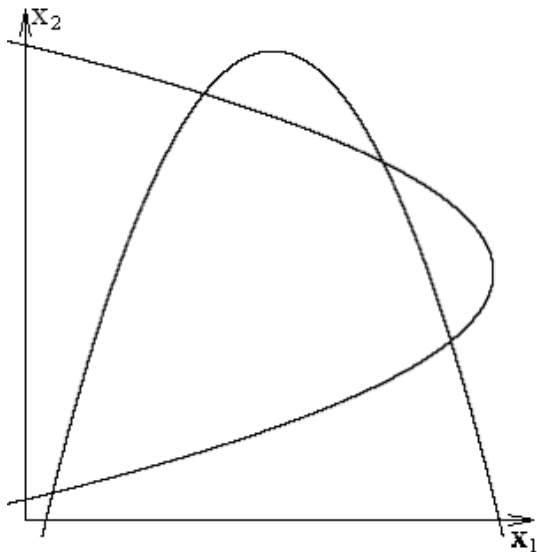


Рис. 6

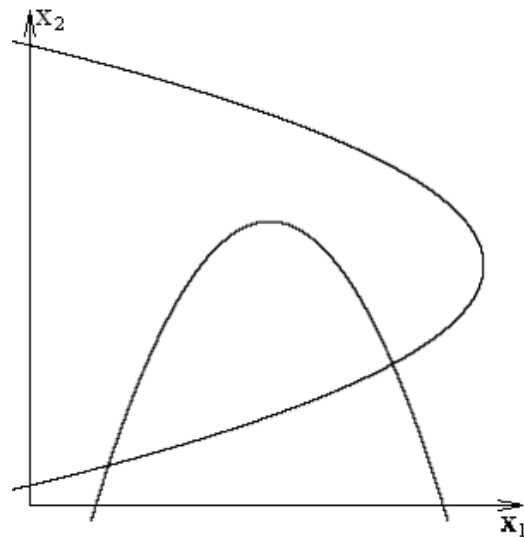


Рис. 7

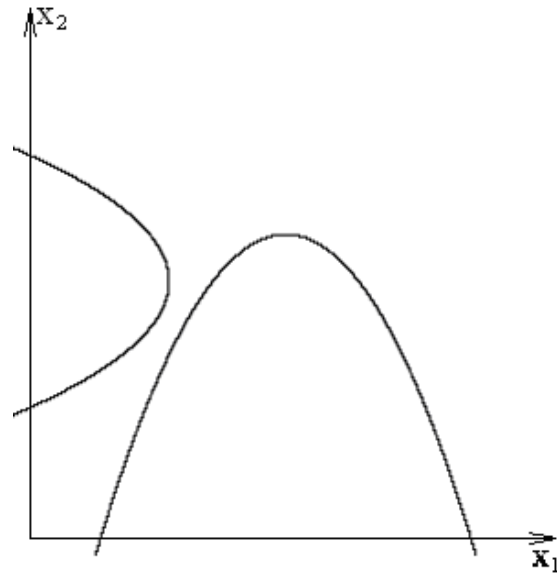


Рис. 8

Відповідно цим випадкам система має чотири, два чи жодного положення рівноваги. Взаємини цих положень, а також їхня стійкість чи нестійкість будуть докладно розглянуті далі. Для набору чисельних значень параметрів  **$a_{110}=0.3; b_{10}=0.1; a_{111}=0.4; b_{11}=0.2; a_{112}=0.03; b_{12}=0.01; a_{12}=0.07; a_{220}=0.3; b_{20}=0.1; a_{221}=0.4; b_{21}=0.2; a_{222}=0.03; b_{22}=0.01;$**  (та характерних значеннях вільного параметра  **$a_{21}=.01786145612;$**   **$a_{21}=.08070144813;$**   **$a_{21}=.2578777276;$**   **$a_{21}=10.76978728$** ) реалізуються кратні стаціонарні режими.

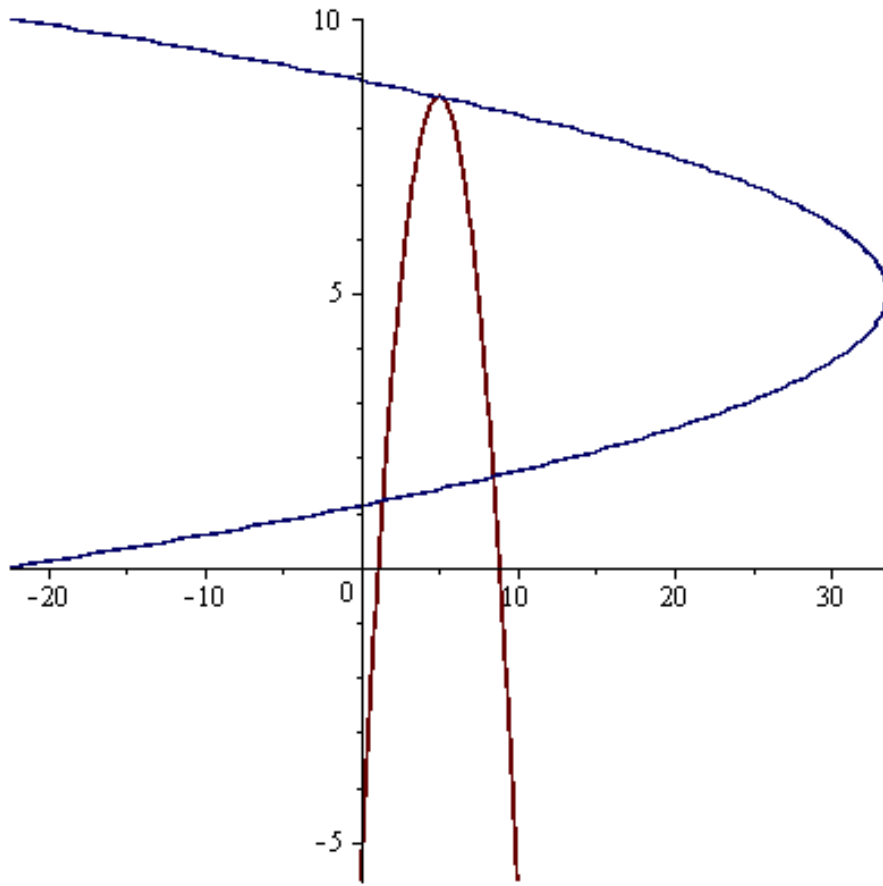


Рис. 9

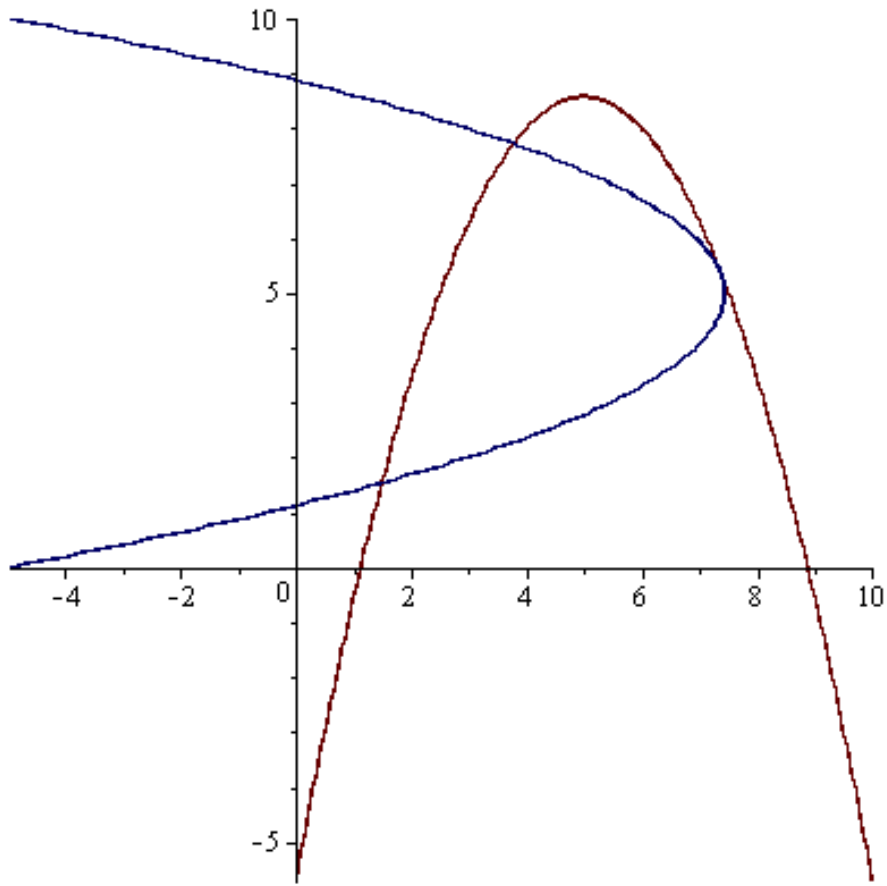


Рис. 10



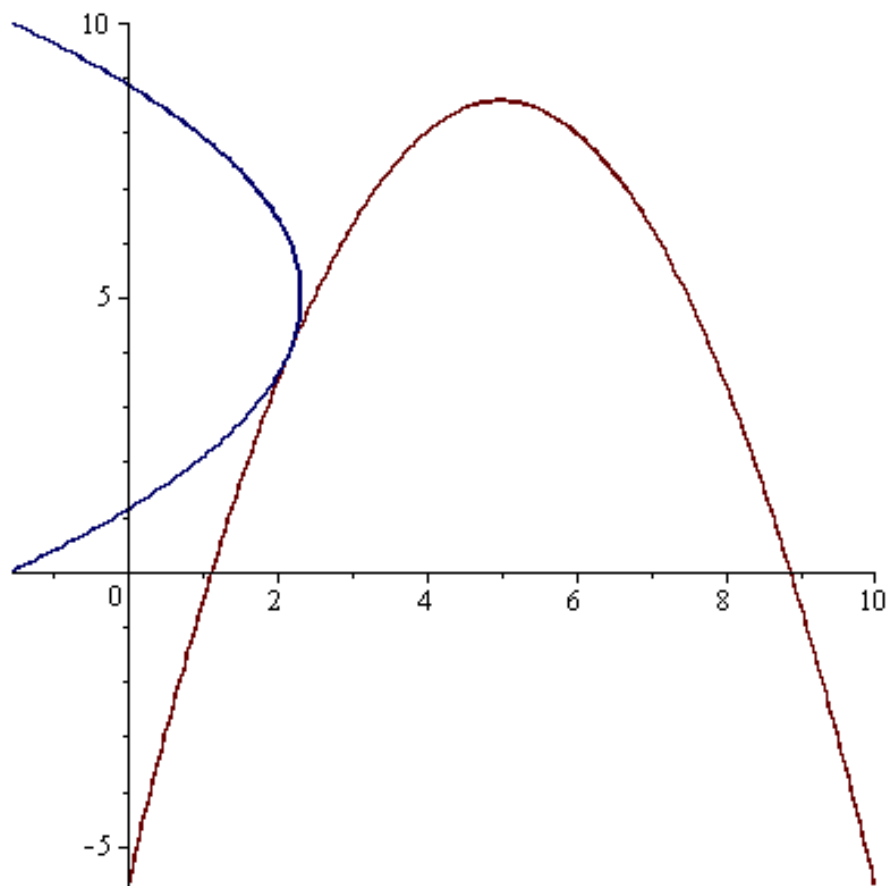


Рис. 11

*Питання для самоконтролю.*

1. Як можна визначити біфуркаційні значення параметра  $a_{21}$ .
2. В чому полягає геометрична інтерпретація умов втрати стійкості стаціонарного режиму системи.
3. Коли індекс Пуанкаре особливої точки не може бути визначений за системою лінійного наближення.

4. Яка ознака дивергентної втрати стійкості (алгебраїчна та геометрична) стаціонарного стану нелінійної динамічної системи.