

Л.10 Закономірності щодо зміни кількості стаціонарних станів та їх стійкості нелінійної динамічної моделі В.Леонтьєва при зміні характерних параметрів системи.

(Скільки дійсних коренів має поліном? – в цьому допоможе розібратися дискримінантна крива)

> restart;

> pol:=x^4+a2*x^2+a3*x+a4;

$$pol := x^4 + a2 x^2 + a3 x + a4$$

> #Дискримінант полиному pol:

> DSC:=discrim(pol,x);

$$DSC := -4 a2^3 a3^2 - 27 a3^4 + 16 a2^4 a4 - 128 a2^2 a4^2 + 144 a2 a4 a3^2 + 256 a4^3$$

> #Ілюстрація претворення змінних для вилучення моному x^3:

> expand((x-x0)^4);

$$x^4 - 4x^3 x0 + 6x^2 x0^2 - 4x x0^3 + x0^4$$

> collect(%,x);

>

$$x^4 - 4x^3 x0 + 6x^2 x0^2 - 4x x0^3 + x0^4$$

> a3:=-4*x0;

$$a3 := -4x0$$

> poll:=x^4+a3*x^3+a2*x^2+a3*x+a4;

$$poll := x^4 - 4x^3 x0 + a2 x^2 - 4x x0 + a4$$

> subs(x=x-a3/4,poll);

$$(x + x0)^4 - 4 (x + x0)^3 x0 + a2 (x + x0)^2 - 4 (x + x0) x0 + a4$$

> collect(%,x);

>

$$x^4 + (-6x^2 + a_2)x^2 + (-8x^3 + 2a_2x - 4x^0)x - 3x^4 + a_4 - 4x^2 + a_2x^2$$

Після перетворення координат поліном набуває наступного вигляду

$$> x^4 + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x + A_4$$

3.4 Знаходження дискримінанту полінома

Знаходження дискримінанту полінома `pol` на основі геометричної інтерпретації: при наявності кратних дійсних коренів полінома `pol` пряма $-(A_3 \cdot x + A_4)$ повинна бути дотичною до графіка функції $x^4 + A_2 \cdot x^2$:

># Отримаємо рівняння дискримінантної кривої в параметричній формі:

> a3:=-diff(x^4+a2*x^2,x);

$$a_3 := -4x^3 - 2a_2x$$

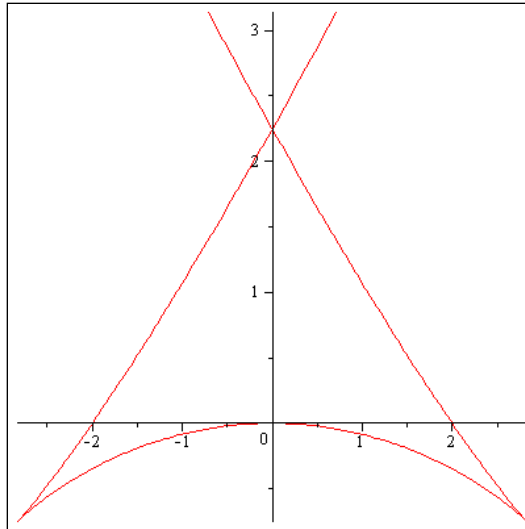
> a4:=solve(pol,a4);

$$a_4 := 3x^4 + a_2x^2$$

> #Далі розглянуто випадок a2=-3;

> #Побудова графіку дискримінантної кривої в параметричній формі:

> plot([subs(a2=-3,a3),subs(a2=-3,a4),x=-1.28..1.28]);



У «трикутній» області з точками загострення лежать значення коефіцієнтів полінома **pol**, при яких він має чотири дійсних кореня; при перетині межі «трикутної» області, число дійсних коренів на дві одиниці менше - два; при повторному перетині межі дискримінантної кривої (вище її точки самоперетину) потрапляємо в область, де дійсні корені відсутні. Точкам (a_3, a_4) на межі дискримінантної кривої відповідають кратні дійсні корені полінома **pol** (в точках загострення - трикратні дійсні корені).

```
> a3:='a3';a4:='a4';
```

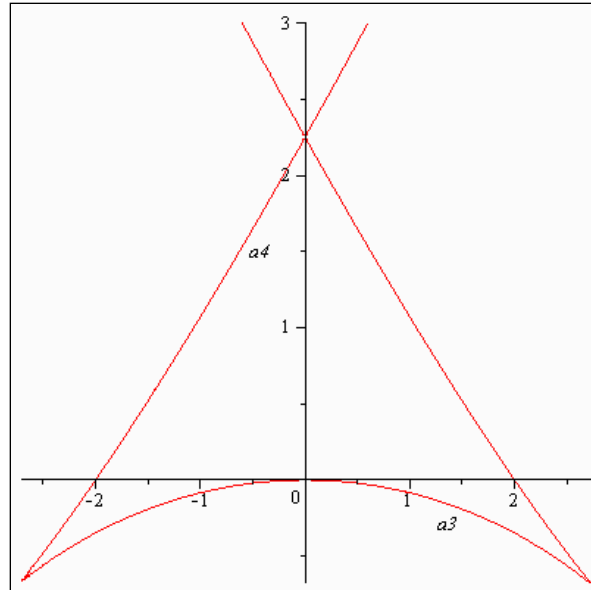
```
a3:=a3
```

```
a4:=a4
```

```
> with(plots);
```

```
># Побудова графіка дискримінантної кривої за допомогою  
оператора implicitplot для неявно заданої функції;
```

```
> implicitplot(subs(a2=-3,DSC)=0,a3=-3..3,a4=-3..3,  
grid=[200,300]);
```



```

> restart:
> PX1 := (-a112-b12) * x1^2 + (-a111-b11+1) * x1 - a12*x2 - a110 - b10;
>
      PX1 := (-a112 - b12) x1^2 + (-a111 - b11 + 1) x1 - a12 x2 - a110 - b10
> PX2 := (-a222-b22) * x2^2 + (-a221-b21+1) * x2 - a21*x1 - a220 - b20;
>
      PX2 := (-a222 - b22) x2^2 + (-a221 - b21 + 1) x2 - a21 x1 - a220 - b20
> resultant(PX1, PX2, x2);

```

$$\begin{aligned}
& -a_{112}^2 a_{222} x^4 - a_{112}^2 b_{22} x^4 - 2 a_{112} a_{222} b_{12} x^4 - 2 a_{112} b_{12} b_{22} x^4 \\
& - a_{222} b_{12}^2 x^4 - b_{12}^2 b_{22} x^4 - 2 a_{111} a_{112} a_{222} x^3 - 2 a_{111} a_{112} b_{22} x^3 \\
& - 2 a_{111} a_{222} b_{12} x^3 - 2 a_{111} b_{12} b_{22} x^3 - 2 a_{112} a_{222} b_{11} x^3 - 2 a_{112} b_{11} b_{22} x^3 \\
& - 2 a_{222} b_{11} b_{12} x^3 - 2 b_{11} b_{12} b_{22} x^3 - 2 a_{110} a_{112} a_{222} x^2 - 2 a_{110} a_{112} b_{22} x^2 \\
& - 2 a_{110} a_{222} b_{12} x^2 - 2 a_{110} b_{12} b_{22} x^2 - a_{111}^2 a_{222} x^2 - a_{111}^2 b_{22} x^2 \\
& - 2 a_{111} a_{222} b_{11} x^2 - 2 a_{111} b_{11} b_{22} x^2 + a_{112} a_{12} a_{221} x^2 + a_{112} a_{12} b_{21} x^2 \\
& - 2 a_{112} a_{222} b_{10} x^2 + 2 a_{112} a_{222} x^3 - 2 a_{112} b_{10} b_{22} x^2 + 2 a_{112} b_{22} x^3 \\
& + a_{12} a_{221} b_{12} x^2 + a_{12} b_{12} b_{21} x^2 - 2 a_{222} b_{10} b_{12} x^2 - a_{222} b_{11}^2 x^2 \\
& + 2 a_{222} b_{12} x^3 - 2 b_{10} b_{12} b_{22} x^2 - b_{11}^2 b_{22} x^2 + 2 b_{12} b_{22} x^3 \\
& - 2 a_{110} a_{111} a_{222} x - 2 a_{110} a_{111} b_{22} x - 2 a_{110} a_{222} b_{11} x - 2 a_{110} b_{11} b_{22} x \\
& + a_{111} a_{12} a_{221} x + a_{111} a_{12} b_{21} x - 2 a_{111} a_{222} b_{10} x + 2 a_{111} a_{222} x^2 \\
& - 2 a_{111} b_{10} b_{22} x + 2 a_{111} b_{22} x^2 - a_{112} a_{12} x^2 - a_{12}^2 a_{21} x + a_{12} a_{221} b_{11} x \\
& + a_{12} b_{11} b_{21} x - a_{12} b_{12} x^2 - 2 a_{222} b_{10} b_{11} x + 2 a_{222} b_{11} x^2 \\
& - 2 b_{10} b_{11} b_{22} x + 2 b_{11} b_{22} x^2 - a_{110}^2 a_{222} - a_{110}^2 b_{22} + a_{110} a_{12} a_{221} \\
& + a_{110} a_{12} b_{21} - 2 a_{110} a_{222} b_{10} + 2 a_{110} a_{222} x - 2 a_{110} b_{10} b_{22} + 2 a_{110} b_{22} x \\
& - a_{111} a_{12} x - a_{12}^2 a_{220} - a_{12}^2 b_{20} + a_{12} a_{221} b_{10} - a_{12} a_{221} x + a_{12} b_{10} b_{21} \\
& - a_{12} b_{11} x - a_{12} b_{21} x - a_{222} b_{10}^2 + 2 a_{222} b_{10} x - a_{222} x^2 - b_{10}^2 b_{22} \\
& + 2 b_{10} b_{22} x - b_{22} x^2 - a_{110} a_{12} - a_{12} b_{10} + a_{12} x
\end{aligned}$$

```

> POL:=collect(-a112^2*a222*x1^4-a112^2*b22*x1^4-
2*a112*a222*b12*x1^4-2*a112*b12*b22*x1^4-a222*b12^2*x1^4-
b12^2*b22*x1^4-2*a111*a112*a222*x1^3-2*a111*a112*b22*x1^3-
2*a111*a222*b12*x1^3-2*a111*b12*b22*x1^3-2*a112*a222*b11*x1^3-
2*a112*b11*b22*x1^3-2*a222*b11*b12*x1^3-2*b11*b12*b22*x1^3-
2*a110*a112*a222*x1^2-2*a110*a112*b22*x1^2-2*a110*a222*b12*x1^2-
2*a110*b12*b22*x1^2-a111^2*a222*x1^2-a111^2*b22*x1^2-
2*a111*a222*b11*x1^2-
2*a111*b11*b22*x1^2+a112*a12*a221*x1^2+a112*a12*b21*x1^2-
2*a112*a222*b10*x1^2+2*a112*a222*x1^3-
2*a112*b10*b22*x1^2+2*a112*b22*x1^3+a12*a221*b12*x1^2+a12*b12*b2
1*x1^2-2*a222*b10*b12*x1^2-a222*b11^2*x1^2+2*a222*b12*x1^3-
2*b10*b12*b22*x1^2-b11^2*b22*x1^2+2*b12*b22*x1^3-
2*a110*a111*a222*x1-2*a110*a111*b22*x1-2*a110*a222*b11*x1-
2*a110*b11*b22*x1+a111*a12*a221*x1+a111*a12*b21*x1-
2*a111*a222*b10*x1+2*a111*a222*x1^2-
2*a111*b10*b22*x1+2*a111*b22*x1^2-a112*a12*x1^2-
a12^2*a21*x1+a12*a221*b11*x1+a12*b11*b21*x1-a12*b12*x1^2-
2*a222*b10*b11*x1+2*a222*b11*x1^2-
2*b10*b11*b22*x1+2*b11*b22*x1^2-a110^2*a222-
a110^2*b22+a110*a12*a221+a110*a12*b21-
2*a110*a222*b10+2*a110*a222*x1-2*a110*b10*b22+2*a110*b22*x1-

```

```

a111*a12*x1-a12^2*a220-a12^2*b20+a12*a221*b10-
a12*a221*x1+a12*b10*b21-a12*b11*x1-a12*b21*x1-
a222*b10^2+2*a222*b10*x1-a222*x1^2-b10^2*b22+2*b10*b22*x1-
b22*x1^2-a110*a12-a12*b10+a12*x1,x1);

```

>

$$\begin{aligned}
POL := & (-a_{112}^2 a_{222} - a_{112}^2 b_{22} - 2 a_{112} a_{222} b_{12} - 2 a_{112} b_{12} b_{22} - a_{222} b_{12}^2 \\
& - b_{12}^2 b_{22}) x_1^4 + (-2 a_{111} a_{112} a_{222} - 2 a_{111} a_{112} b_{22} - 2 a_{111} a_{222} b_{12} \\
& - 2 a_{111} b_{12} b_{22} - 2 a_{112} a_{222} b_{11} - 2 a_{112} b_{11} b_{22} - 2 a_{222} b_{11} b_{12} - 2 b_{11} b_{12} b_{22} \\
& + 2 a_{112} a_{222} + 2 a_{112} b_{22} + 2 a_{222} b_{12} + 2 b_{12} b_{22}) x_1^3 + (-2 a_{110} a_{112} a_{222} \\
& - 2 a_{110} a_{112} b_{22} - 2 a_{110} a_{222} b_{12} - 2 a_{110} b_{12} b_{22} - a_{111}^2 a_{222} - a_{111}^2 b_{22} \\
& - 2 a_{111} a_{222} b_{11} - 2 a_{111} b_{11} b_{22} + a_{112} a_{12} a_{221} + a_{112} a_{12} b_{21} \\
& - 2 a_{112} a_{222} b_{10} - 2 a_{112} b_{10} b_{22} + a_{12} a_{221} b_{12} + a_{12} b_{12} b_{21} - 2 a_{222} b_{10} b_{12} \\
& - a_{222} b_{11}^2 - 2 b_{10} b_{12} b_{22} - b_{11}^2 b_{22} + 2 a_{111} a_{222} + 2 a_{111} b_{22} - a_{112} a_{12} \\
& - a_{12} b_{12} + 2 a_{222} b_{11} + 2 b_{11} b_{22} - a_{222} - b_{22}) x_1^2 + (-2 a_{110} a_{111} a_{222} \\
& - 2 a_{110} a_{111} b_{22} - 2 a_{110} a_{222} b_{11} - 2 a_{110} b_{11} b_{22} + a_{111} a_{12} a_{221} \\
& + a_{111} a_{12} b_{21} - 2 a_{111} a_{222} b_{10} - 2 a_{111} b_{10} b_{22} - a_{12}^2 a_{21} + a_{12} a_{221} b_{11} \\
& + a_{12} b_{11} b_{21} - 2 a_{222} b_{10} b_{11} - 2 b_{10} b_{11} b_{22} + 2 a_{110} a_{222} + 2 a_{110} b_{22} \\
& - a_{111} a_{12} - a_{12} a_{221} - a_{12} b_{11} - a_{12} b_{21} + 2 a_{222} b_{10} + 2 b_{10} b_{22} + a_{12}) x_1 \\
& - a_{110}^2 a_{222} - a_{110}^2 b_{22} + a_{110} a_{12} a_{221} + a_{110} a_{12} b_{21} - 2 a_{110} a_{222} b_{10} \\
& - 2 a_{110} b_{10} b_{22} - a_{12}^2 a_{220} - a_{12}^2 b_{20} + a_{12} a_{221} b_{10} + a_{12} b_{10} b_{21} - a_{222} b_{10}^2 \\
& - b_{10}^2 b_{22} - a_{110} a_{12} - a_{12} b_{10}
\end{aligned}$$

```

> a0:=0.3;b0:=0.1;a1:=0.4;b1:=0.2;a2:=0.03;b2:=0.01;

```

a0 := 0.3

b0 := 0.1

a1 := 0.4

b1 := 0.2

a2 := 0.03

b2 := 0.01

>

```

a110:=0.3;b10:=0.1;a111:=0.4;b11:=0.2;a112:=0.03;b12:=0.01;a12:=
0.07;

```

a110 := 0.3

b10 := 0.1

a111 := 0.4

b11 := 0.2

a112 := 0.03

b12 := 0.01

```

a12 := 0.07
> a220 := 0.3 ; b20 := 0.1 ; a221 := 0.4 ; b21 := 0.2 ; a222 := 0.03 ; b22 := 0.01 ;
a220 := 0.3
b20 := 0.1
a221 := 0.4
b21 := 0.2
a222 := 0.03
b22 := 0.01

> POL ;
-0.000064x14 + 0.00128x13 - 0.00880x12 + (-0.0049 a21 + 0.0240)x1 - 0.01956
> POL := POL / (-0.64e-4) ;
POL := 1.000000000x14 - 20.00000000x13 + 137.5000000x12 - 15625.00000 (-0.0049 a21
+ 0.0240)x1 + 305.6250000

> POL := x14 - 20*x13 + 137.5*x12 - (15625* (-0.49e-2*a21+0.240e-
1) ) *x1+305.625 ;
POL := x14 - 20x13 + 137.5x12 - 15625 (-0.0049 a21 + 0.0240)x1 + 305.625

>
> DISC := discrim(POL, x1) ;
DISC := -9.277440728 108 a214 + 1.032229233 1010 a213 - 3.58633245 109 a212
+ 2.68705429 108 a21 - 3.714615 106

> fsolve(DISC = 0, a21);
0.01786526100, 0.08069613831, 0.2578792285, 10.76978764

```