Розділ 6.

НЕЧІТКІ МЕТОДИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ

6.1. Концепція нечітких обчислень

Нечіткі обчислення є основою нового наукового напряму, названого «м'які обчислення» або «обчислювальний інтелект», який сформувався в останні 15 років, і включає також нейрообчислення, еволюційні і генетичні алгоритми, міркування на основі свідоцтв, мережі довіри та інші [20, 34, 56].

Поняття «м'які обчислення» було введене основоположником нечіткої логіки Л. Заде на семінарі в 1994 році, як консорціум обчислювальних методологій, які колективно забезпечують основи для розуміння, конструювання і розвитку інтелектуальних систем, зокрема, систем інтелектуального аналіза даних. Основоположна відмінність м'яких обчислень від традиційних жорстких обчислень - пристосованість до роботи з неточними, невизначеними або частково істинними даними, що виражається в «допустимому ставленні до неточності, невизначеності і часткової істинності для досягнення зручності маніпулювання, робастності, низькій вартості рішення і кращої згоди з реальністю» [14, 49, 52].

М'які обчислення не гарантують, що знайдене рішення буде оптимальним або буде досягнутий глобальний екстремум за прийнятний час. Проте вони можуть застосовуватися для пошуку допустимого рішення задачі за «достатньо короткий час». В рамках м'яких обчислень кожна з методологій має відмінності у використанні. Зокрема, нечітка логіка працює з неточністю, зернистою структурою (гранульованою) інформації, наближеними міркуваннями і обчисленнями із словами. Слід відмітити, що поняття нечіткості цілком узгоджується з нашими інтуїтивними уявленнями про навколишній світ. Велика частина понять, які ми використовуємо, за своєю природою нечіткі і розмиті і спроба загнати їх в рамки загальної логіки приводить до неприпустимих спотворень.

Незважаючи на зовнішню простоту і природність базових понять нечітких обчислень, знадобилося більше п'яти років, щоб побудувати і довести комплекс постулатів і теорем, які роблять логіку логікою, а алгебру - алгеброю. Паралельно з розробкою теоретичних основ нової науки опрацьовувалися різні можливості її практичного застосування. І в 1973 р. ці зусилля увінчалися успіхом - вдалося показати, що нечіткі обчислення можуть бути покладені в основу нового покоління інтелектуальних систем управління. Практично відразу після виходу в світ фундаментальних робіт по нечітким обчисленням одна невелика фірма з Данії застосувала викладені в них принципи для удосконалення системи управління складним виробничим процесом. Результат, що називається, перевершив всі очікування - через чотири роки прибутки від впровадження нової системи обчислювалися сотнями тисяч доларів.

Цілком природно, що військові зацікавились таким перспективним інструментом - і на початку 80-х років в Японії, а потім і в США в були розгорнені комплексні роботи по використанню нечітких обчислень в різних оборонних проектах. Одним з найбільш вражаючих результатів стало створення мікропроцесора на основі нечіткої логіки (fuzzy-chip), здатного автоматично вирішувати відому «задачу про собаку, що наздоганяє кота». Зрозуміло, в ролі кота виступала міжконтинентальна ракета супротивника, а в ролі собаки - мобільна зенітна ракета, дуже легка для установки на неї громіздкої традиційної системи управління. Між іншим, згодом ті ж методи нечіткої логіки дозволили вирішити і обернену задачу - розробити маневри для ефективного відходу від антиракет. Перший успіх окрилив військових і нечіткі обчислення упевнено зайняли своє місце серед стратегічно важливих наукових дисциплін. Виникла парадоксальна ситуація - офіційно не визнана американською академічною наукою нечітка логіка в той же час увійшла до переліку передових технологій, заборонених комітетом COCOM (Комітет з контролю над експортом) до експорту із США.

Проте основні результати використання нечітких обчислень в прикладних задачах були отримані не військовими, а промисловцями, і не в США, а в Японії. До 1990 року з'явилося близько 40 патентів, що відносяться до нечітких обчислень (з них 30 японських). Сорок вісім японських компаній утворили спільну лабораторію LIFE (Laboratory for International Fuzzy Engineering). Японський уряд фінансував 5-річну програму по «нечіткій логіці». Вона включила 19 проектів: від систем оцінки глобального забруднення атмосфери і передбачення землетрусів до АСУ заводських цехів і складів. В результаті з'явилися ряд нових масових мікрочіпів, заснованих на «нечітких обчисленнях». Японці довели практичне втілення нечітких обчислень до досконалості. Вони є основою автоматичних прокатних станів, інтелектуальних складів і «безлюдних виробництв». Проте, мабуть, більш вражаючим виглядає використання нечітких обчислень в дешевих виробах масового ринку - пилососах, відеокамерах, мікрохвильових печах і тому подібне. Піонером у застосуванні нечіткої логіки в побутових виробах виступила фірма Matsuhita. У лютому 2001 р. вона анонсувала першу «інтелектуальну» пральну машину, в системі управління якої поєднувалися нечітка логіка і нейронна мережа. Автоматично визначаючи нечіткі вхідні чинники (об'єм і якість білизни, рівень забрудненості, тип порошку і так далі), пральна машина безпомилково вибирала оптимальний режим прання з 3800 можливих. А через пару років використання нечіткої логіки в японській побутовій техніці стало повсюдним.

Паралельно з використанням нечітких обчислень в системах управління робилися енергійні зусилля по створенню на їх основі нового покоління експертних систем. В той час М. Земанковою (Zemankova) було закладено основу теорії нечітких баз даних, а нечітку експертну систему Фудзи-банка, що приносить до 700000 доларів США на місяць на короткостроковій біржовій грі, створила Сизуко Ясунобу (Chizuko Yasunobu). При цьому така експертна система, що управляє діями «електронного трейдера» Fuji Bank, складається всього з 200 правил. Нечіткі експертні системи, окрім своєї основної переваги - кращою адаптацією до умов реального світу, володіють ще двома достоїнствами в порівнянні з традиційними. По-перше, вони вільні від т.з. «циклічних блокувань» при побудові висновків. По-друге, різні бази нечітких правил можна з легкістю об'єднувати, що рідко удається в звичайних експертних системах. Існують багаточисельні приклади експертних систем (переважно з області промислової діагностики і медицини), які засновані на концепції нечітких обчислень.

Заслуговує на увагу досвід використання нечітких обчислень у фінансовій сфері. Для вирішення складних задач прогнозування різних фінансових індикаторів банкіри і фінансисти використовують дорогі комплексні системи, до складу яких входять і нечіткі обчислення. Початок цьому процесу поклала японська фінансова корпорація Yamaichi Securuties. Задавшись метою автоматизувати гру на ринку коштовних паперів, ця компанія залучила до роботи близько 30 фахівців з штучного інтелекту. У першу версію системи, завершену на початку 1990 р., увійшли 600 нечітких правил - втілення досвіду десяти провідних брокерів корпорації. Перш ніж зважитися на використання нової системи в реальних умовах, її протестували на дворічній вибірці фінансових даних (1987 - 1989 рр.). Система з блиском витримала випробування. Особливий подив екзаменаторів викликало те, що за тиждень до настання біржового краху (знаменитого «Чорного понеділка» на токійській біржі в 1988 р.) система розпродала весь пакет акцій, що звело збиток практично до нуля. Чи треба говорити, що після цього питання про доцільність використання нечіткої логіки у фінансовій сфері вже не піднімалося.

Природно, що успіх фінансистів не міг не зачепити промислові корпорації США. Вони вельми занепокоїлися втратою стратегічної ініціативи і явними успіхами японців. «Нечітка логіка» привернула їх пильну увагу. Такі корпорації як «Motorola», «General Electric», «Otis Elevator», «Pacific Gas & Electric», «Ford» та інші почали інвестувати програми подальших розробок в цьому напрямі. Це не забарилося позначитися на результатах. Отримавши солідну фінансову підтримку, вчені змогли швидко реалізувати свої розробки для широкого круга додатків. Таким чином, інструмент нечітких обчислень вийшов на масовий ринок.

Можна навести і інші приклади вживання нечітких обчислень в бізнесі. Вдалий досвід Ганса Циммермана (Hans Zimmermann) по використанню експертної системи з нечіткими правилами для аналізу інвестиційної активності в місті Аахене (Германія) привів до створення комерційного пакету ASK для оцінки кредитних і інвестиційних ризиків. А система управління складськими запасами, описана як приклад в пакеті CubiCalc, настільки проста, що може бути з легкістю використана мало підготовленим оптовим торговцем.

Основними «споживачами» нечітких обчислень на ринку України є банкіри і фінансисти, а також фахівці в області політичного і економічного аналізу. Вони використовують нечіткі обчислення для створення моделей різних економічних, політичних, біржових ситуацій. Таким чином, лише чітке розуміння основних аспектів розвитку і вживання нечітких методів може забезпечити швидке вирішення багатьох наукових задач, а також всіляких проблем в різних областях ділової діяльності людини.

Умовно період від моменту зародження даної науки до наших днів можна розділити на три етапи:

- перший (1965 р. - початок 70-х рр.) - етап формування основних теоретичних постулатів;
- другий (1973 р. - початок 90-х рр.) - етап практичних розробок в різних сферах життя, заснованих на нечіткій логіці; народження нового наукового напряму в рамках нечіткої логіки «Fuzzy Economics»;
- третій (1995 р. - наш час) - етап масового використання продукції, в основі роботи якої лежить нечітка логіка. Проте таке ділення достатньо умовно, оскільки теоретичні дослідження в цій галузі знань не припиняються і до цих пір, з кожним роком розширюючи сферу застосування даного математичного апарату.

Першим серйозним кроком у напрямі моделювання неоднозначних тверджень виявилася теорія нечітких, або пухнастих, множин (Fuzzy Sets).

Батьком нечітких множин став американський професор Каліфорнійського університету в Берклі директор Ініціативи Берклі по м'яких обчисленнях (Berkeley Initiative in Soft Computing, BISC) Лотфі Аскер Заде (Lotfi Asker Zadeh), академік Американської Інженерної Академії і іноземний член Російської Академії Природних Наук, почесний доктор півтора десятків університетів в різних країнах.

Поняття нечіткої множини, розробленої Заде і його послідовниками, має наступні цікаві асоціативні зв'язки з деякими концепціями світової культури. Свого часу Аристотель прагнув створити такий інструмент мислення, який би правильно відображав реальність. Відомі його слова: «Істина - це коли ми говоримо про те, що є, що воно є, а хибність - це коли про те, чого немає, говорять, що воно є, або коли про те, що є, говорять, що його немає». Проте у Аристотеля разом з двома значеннями - є та ні - було ще третє - «сімбібекус». На українській мові це перекладається як «перехідний». Можна про щось сказати, що воно є, а про інше - що його немає. А буває і третє - іноді є, іноді немає. Або якоюсь мірою є, а якоюсь - немає. Ще Аристотель розумів це. Ось прямий шлях від Аристотеля до нечітких множин.

Існує легенда, що підставою для створення нової теорії послужила суперечка професора зі своїм колегою про те, чия з дружин привабливіша. Згідно історії, до єдиної думки вони так і не прийшли. А це, у свою чергу, змусило вченого сформулювати концепцію, яка виражає нечіткі поняття типу «привабливість» у числовій формі.

Наступним досягненням теорії нечітких множин є введення так званих нечітких чисел - нечітких підмножин спеціалізованого вигляду, відповідних висловам типу «значення змінної приблизно рівне а». Як приклад можна використовувати так зване трикутне нечітке число, де виділяються три точки: мінімально можливе, найбільш очікуване і максимально можливе значення чинника. Трикутні числа - це найчастіше використовуваний на практиці тип нечітких чисел, причому найчастіше їх використовують як прогнозні значення параметра.

Черговим історичним кроком в даній науці є введення набору операцій над нечіткими числами, які зводяться до операцій алгебри із звичайними числами при завданні певного інтервалу достовірності (рівня приналежності), що отримали згодом назву м'які обчислення. Фундаментальні дослідження в цій області зроблені Д. Дюбуа (Dubois D.) і Х. Прадом (Prade H.). Паралельно з розробкою теоретичних основ нової науки, Лотфі А. Заде опрацьовував різні можливості її практичного застосування. У 1973 році ці зусилля увінчалися успіхом - йому вдалося показати, що нечітка логіка може бути покладена в основу нового покоління інтелектуальних систем управління. Саме тому цю дату логічно вважати за початок другого етапу в розвитку даної науки. Пройшли ще декілька років і теоретична алгебра Заді, завдячуючи Ібрагиму Мамдані (Ebrahim Mamdani) з лондонського коледжу королеви Марії (Queen Mary College), запрацювала «в залізі». Саме Мамдані в 1975 р. спроектував перший контролер, що функціонує на основі алгебри Заде, і керує паровою турбіною (варто відмітити, що принципи його побудови алгоритмики стали канонічними і увічнені загальноприйнятою серед фахівців назвою Mamdani-type controller).

Розробка теорії нечітких множин забезпечило основу для розвитку закладеною Заде в 1970 - 1973 рр. нечіткої логіки (Fuzzy Logic) - гнучкого підходу до аналізу міркувань і моделювання складних гуманістичних систем, поведінка яких описується швидше лінгвістичними, ніж числовими змінними. У вузькому сенсі нечітка логіка - це логічна система, що розширює багатозначну логіку до неперервної, але список основних операцій відрізняється як по духу, так і за змістом від основних операцій систем багатозначних логік. Практичний потенціал теорії нечітких множин і нечіткої логіки, їх здатність моделювати гнучкі і неточні обмеження, частковий прояв властивостей, плавний перехід з однієї ситуації в іншу привернули врешті-решт в цю область цілу армію прикладників. Сьогодні теорія нечітких множин і нечітка логіка отримали справді всесвітнє визнання.

За тридцять років свого розвитку (перші два етапи в приведеній вище класифікації), нечітка логіка зазнала ряд істотних змін і доповнень. Перш за все, завдяки зусиллям Б. Коско (Bart Kosko), був досліджений взаємозв'язок нечіткої логіки і теорії нейронних мереж і доведена основоположна FAT-теорема (Fuzzy Approximation Theorem), що підтвердила повноту нечіткої логіки. Була розроблена нечітка алгебра - незвичайна наука, що дозволяє використовувати при обчисленнях як точні, так і приблизні значення змінних. І нарешті, найширшого поширення набули винайдені Б. Коско так звані нечіткі когнітивні моделі (Fuzzy Cognitive Maps), на яких базуються більшість сучасних систем динамічного моделювання в області фінансів, політики і бізнесу.

Починаючи з кінця 70-х років, методи теорії нечітких множин починають застосовуватися і в економіці. Слід згадати роботи Дж. Баклі «Вирішення нечітких рівнянь в економіці і фінансах» і «Нечітка математика у фінансах», Г. Бояджієва і М. Бояджієва «Нечітка логіка в бізнесі, фінансах і менеджменті», Лафуенте «Фінансовий аналіз в умовах невизначеності», Г. Циммермана «Теорія нечіткої логіки і її застосування» та інші. У 80-х роках почали з'являтися програмні рішення і інформаційні технології, які були здатні вирішувати економічні задачі із застосуванням нечітко - множинних і споріднених ним описів. Так, під керівництвом Ц. Зопоунідіса в Технічному університеті на острові Кріт була розроблена експертна система для детального фінансового аналізу корпорацій. Трохи раніше в Германії групою під керівництвом Г. Циммермана була розроблена система стратегічного планування, в якій реалізується позиціонування бізнесу корпорації на основі нечітких описів конкурентоспроможності і привабливості бізнесу.

Деяка кількість робіт присвячена макроекономічному аналізу фондового ринку на основі нечітких уявлень, наприклад, робота К. Пірей «Нечітко - множинний аналіз інвестиційної діяльності взаємних фондів»; Р. Тріппі «Штучний інтелект у фінансовій і інвестиційній діяльності». На особливу увагу заслуговує макроекономічне дослідження, присвячене вимірюванню рівня тіньової економіки в Новій Зеландії, виконане Р. Драєсеке і Д. Глісом в 1999 р. Використовуючи статистичні дані з 1963 р. по 1994 р., вчені спробували оцінити динаміку величини тіньової економіки в Новій Зеландії за вказаний інтервал часу. Досить швидко економічні додатки теорії нечітких множин утворили самостійний науковий напрям. Була створена міжнародна асоціація SIGEF (International Association for Fuzzy Set Management & Economy) з штаб квартирою в Барселоні, яка регулярно апробовує нові результати в області нечітко - множинних економічних досліджень, проводячи щорічні конференції і випускаючи журнал «Fuzzy Economic Review».

Розглянемо основні положення теорії нечітких множин. Ця теорія є узагальненням теорії класичних чітких множин, які розглядаються як підмножини деякого універсуму. Поняття нечіткої множини - це спроба математичної формалізації нечіткої інформації для побудови математичних моделей. У основі цього поняття лежить уявлення про те, що складаючи дану множину елементи, які володіють загальною властивістю, можуть володіти цією властивістю в різному ступені і, отже належати до даної множини з різним ступенем. При такому підході висловлювання типу «такий-то елемент належить даній множині втрачають сенс, оскільки необхідно вказати «наскільки сильно» або з яким ступенем конкретний елемент задовольняє властивостям даної множини.

Означення 1. *Нечіткою множиною* A у множині U називається сукупність пар виду $(u, \mu_A(u))$, де $u \in U$, а $\mu_A(u)$ - це функція приналежності нечіткої множини A, $\mu_A : U \to [0,1]$. Тут U - деяка звичайна множина, яка називається *універсальною множиною*.

Для будь-якого елемента U функція приналежності μ_A визначає ступінь належності даного елемента множині A. Нечітку множину можна записати таким чином

$$A = \bigcup_{u \in U} \mu_A(u)/u.$$

Приклади запису нечітких множин:

1. Якщо $U=(a,b,c,d,e,f)$; $M=(0,0.5,1)$, тоді A можна представити у вигляді $A=(0/a,1/b,0.5/c,0/d,0.5/e,0/f)$.

2. Якщо $A=(0.8/a_1,1/a_2,0.4/a_3,0.2/a_4,0.5/a_5,0/a_6)$, то $U=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$; $M=(0,0.2,0.4,0.5,0.8,1)$.

3. Нечітка множина A «Декілька» на дискретному універсумі $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (рис.6.1)

$$\mu_A(u)=\begin{cases}0.0, u\in[0,1,2,9,10],\\ 0.5, u\in[3,8],\\ 0.8, u\in[4,7],\\ 1.0, u\in[5,6].\end{cases}$$

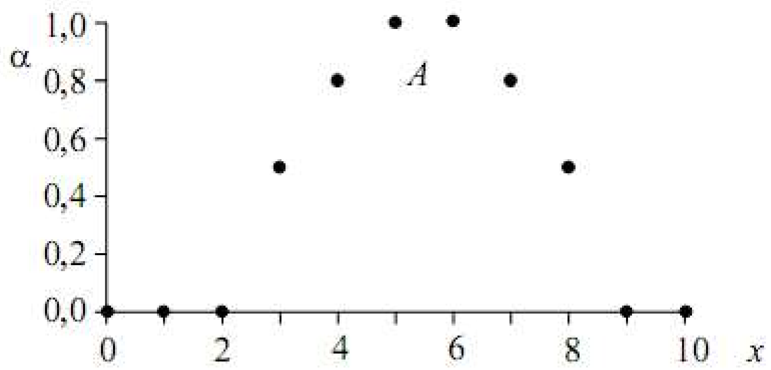


Рис. 6.1. Діаграма Заде нечіткої множини A «Декілька».

4. «Трапецієвидна» нечітка множина A на універсумі [0, 1] (рис. 6.2)

$$\mu_A(u)=\begin{cases}0, u\in[0.0,0.2],\\ 10u-2, u\in[0.2,0.3],\\ 1, u\in[0.3,0.5],\\ (8-10u)/3, u\in[0.5,0.8],\\ 0, u\in[0.8,1.0].\end{cases}$$

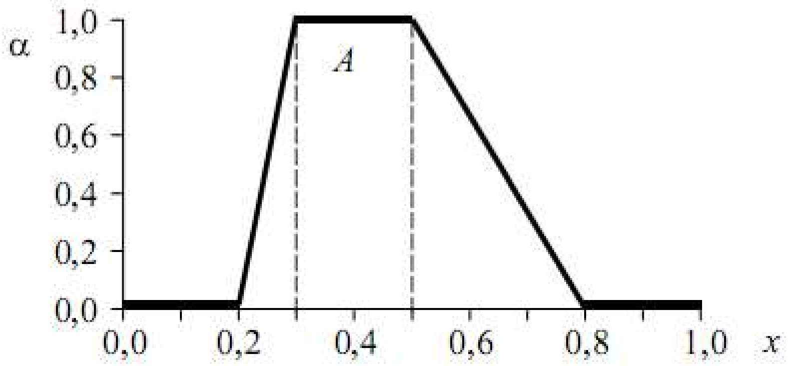


Рис. 6.2. Діаграма Заде «трапецієвидної» нечіткої множини A.

Звичайна множина складає підклас нечітких множин. Функцією приналежності звичайної множини $B \subset U$ є функція

$$\mu_B(u) = \begin{cases} 1, u \in B, \\ 0, u \notin B. \end{cases}$$

Означення 2. *Носієм* (support) нечіткої множини A називається звичайна підмножина таких точок U, для яких величина $\mu_A(u)$ додатна. Носій позначається $S(A)$ або $SuppA$: $S(A) = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) > 0\}$.

Оскільки формально нечітка множина - це чітка функція приналежності, то найпростіше нечітку множину A визначити, вказавши її функцію приналежності μ_A і універсум U. Відмітимо також, що ті елементи універсуму, для яких функція приналежності дорівнює нулю, нечіткій множині не належать. Нечітка множина присутня лише там, де її функція приналежності більше нуля; при цьому значення функції приналежності визначає міру нечіткості елементу нечіткої множини.

Означення 3. Висотою (altitude) $h(A)$ нечіткої множини A називається величина $h(A) = \sup_{u \in U} \mu_A(u)$.

Нечітка множина A називається *нормальною*, якщо її висота дорівнює одиниці. В іншому випадку множина A є *субнормальною*. Слід зазначити, що субнормальну нечітку множину завжди можна нормалізувати, поділивши функцію приналежності μ_A на величину $h(A) = \sup_{u \in U} \mu_A(u)$.

Означення 4. Елементи множини U, для яких ступінь приналежності $\mu_A(u) = 0.5$ називаються *точками переходу* (crossover point) нечіткої множини A.

Означення 5. *Ядро* (kernel, core) нечіткої множини A - це чітка множина елементів універсуму, в яких міра нечіткості дорівнює 1: $core(A) = \{u \mid \mu_A(u) = 1\}$.

Означення 6. *Границя* (boundary) нечіткої множини A - це чітка множина елементів універсуму, в яких міра нечіткості відмінна від 0 та 1: $boun(A) = \{u \mid 0 < \mu_A(u) < 1\}$ (рис. 6.3).

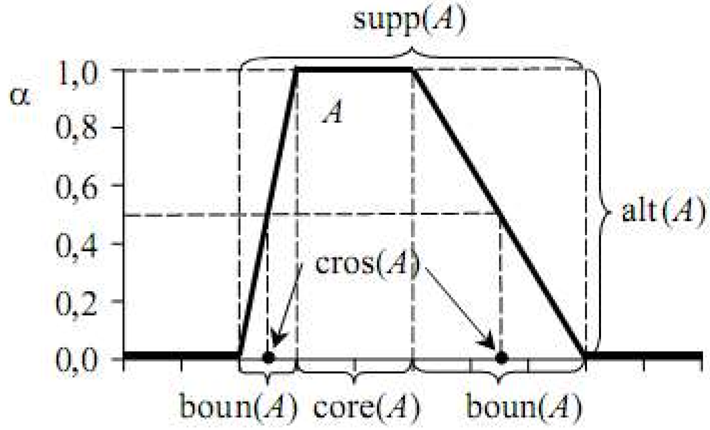


Рис. 6.3. Параметри нечіткої множини.

Приклади нечітких множин:

1. Нехай універсальна множина U представлена у вигляді $\{a, b, c, d, e\}$ і нечітка підмножина A, яка задана на U, має вигляд $A = (0/a, 0.5/b, 0.6/c, 0.7/d, 0.85/e)$. Тоді носієм нечіткої множини A є $S(A) = \{b, c, d, e\}$. Висота нечіткої множини A дорівнює $h(A) = 0.85$, точка переходу - $u = b$, а сама множина є субнормальною. Нормалізована множина буде мати вигляд $A = (0/a, 0.6/b, 0.7/c, 0.8/d, 1/e)$.

2. Нехай універсальна множина U представляє собою інтервал [0, 100], і змінна u, яка приймає значення з цього інтервалу, інтерпретується як «Вік». Тоді нечітку множину A, яка позначається терміном «Старий», можна визначити функцією приналежності вигляду

$$\mu_A(u)=\begin{cases}0, якщо 0\le u\le 50\\ \left(1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, якщо 50<u\le 100\end{cases}.$$

Тут носій $S(A)=(50{,}100)$, висота множини «Старий» близька до одиниці, відповідно множина нормальна. Точкою переходу є значення $u=55$.

3. Існує множина $U=[0{,}100]$ і змінна u, яка приймає значення з цього інтервалу, та інтерпретується як «Вік». Тоді нечітку множину «Молодий» можна визначити функцією приналежності вигляду

$$\mu_{Молодий}(u)=\begin{cases}1, якщо 1\le u\le 25\\ \dfrac{1}{1+((u-25)/5)^2}, якщо 25<u\le 100\end{cases}.$$

Нечітка множина «Молодий» на універсальній множині $U=\{$Богдан, Іванов, Сілков, …$\}$ задається за допомогою функції приналежності $\mu_{Молодий}(u)$ на $U=[0{,}100]$, яка по відношенню до U називається *функцією сумісності.* При цьому $\mu_{Молодий}(Богдан)=\mu_{Молодий}(u)$, де u - вік Богдана.

4. Хай $U=\{$Запорожець, Жигулі, Мерседес....$\}$ - множина марок автомобілів, а $U=[0,\infty)$ - універсальна множина «Вартість». Тоді на U можна визначити нечітку множину типа: «Для небагатих», «Для середнього класу», «Престижні», з функціями приналежності наступного вигляду (рис. 6.4).

Рис. 6.4. Приклади функцій приналежності.

Маючи ці функції і знаючи ціни автомобілів з U в даний момент часу, визначимо на U нечітку множину з цими ж назвами. Так, наприклад, нечітка множина «Для небагатих», задана на універсальній множині $U = \{$Запорожець, Жигулі, Мерседес....$\}$ виглядає таким чином (рис. 6.5)

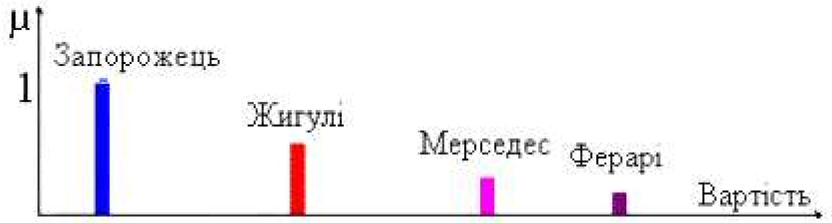


Рис. 6.5. Приклад задання нечіткої множини.

Аналогічно можна визначити нечіткі множини «Швидкісні», «Середні», «Тихохідні» та інше.

Означення 7. *Множиною* α*-рівня* нечіткої множини A є звичайна множина A_α всіх таких елементів універсальної множини U, ступінь приналежності яких нечіткій множині A більше або рівна α: $A_\alpha = \{u \mid \forall u \in U, \mu_A(u) \geq \alpha\}$. Множину α-рівня іноді називають *перетином* α нечіткої множини A. Причому, якщо $\mu_A(u) \geq \alpha$, то говорять про *сильний перетин,* якщо $\mu_A(u) > \alpha$, то про *слабкий перетин*.

Нечітку множину A можна розкласти по її множинам рівня наступним чином: $A = \bigcup\limits_\alpha \alpha A_\alpha$, де αA_α - множення числа α на множину A_α. Знак $\bigcup\limits_\alpha$ - знак об'єднання множин A_α по α. Розглянемо приклад: якщо нечітка множина $A = \{0.3/a, 0.4/d, 0.7/c, 0.8/f, 0.6/b\}$, то множиною α-рівня при $\alpha = 0.7$ буде множина $A_{07} = \{c, f\}$. Множина A розкладена по її множинам α-рівня має вигляд $A = 0.3\{a, d, c, f, b\} \cup 0.4\{d, c, f, b\} \cup 0.6\{c, f, b\} \cup 0.7\{c, f\} \cup 0.8\{f\}$.

Над нечіткою множиною можна виконувати різні операції, при цьому необхідно визначити їх так, щоб в окремому випадку, коли множина є чіткою, операції переходили в звичайні операції теорії множин, тобто операції над нечіткою множиною повинні узагальнювати відповідні операції над звичайною множиною. При цьому узагальнення може бути реалізоване різними способами, через що якій-небудь операції над звичайною множиною може відповідати декілька операцій в теорії нечіткої множини.

Спочатку розглянемо виконання логічних операцій над нечітким множинами.

Означення 8. Операція *включення* ($A \subset B$). Нехай A та B є нечіткими множинами на універсальній множині U. Говорять, що A *міститься* в B, якщо $\forall u \in U \quad \mu_A(u) \le \mu_B(u)$. Іноді застосовують термін *домінування,* тобто в випадку, коли $A \subset B$, говорять, що B домінує над A.

Означення 9. *Рівність.* Нехай A та B є нечіткими множинами на універсальній множині U. Говорять, що A і B *рівні* ($A = B$), якщо $\forall u \in U$ $\mu_A(u) = \mu_B(u)$.

Означення 10. Нехай A та B є нечіткими множинами на універсальній множині U. *Об'єднанням* нечітких множин A і B в U називається нечітка підмножина $A \cup B$, яка включає як A, так і B, з функцією приналежності вигляду: $\mu_{AYB}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u))$, $u \in U$. Об'єднання відповідає сполучнику «АБО». Таким чином, якщо X та Y - символи нечітких множин, то X АБО $Y = X \cup Y$ (рис. 6.6).

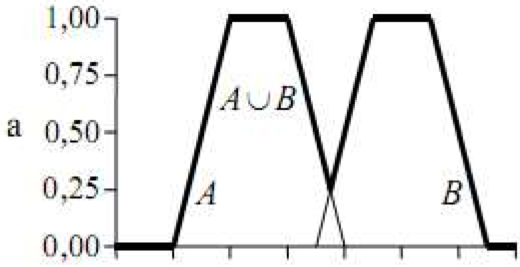


Рис. 6.6. Об'єднання нечітких множин.

Означення 11. *Перетином* нечітких множин A і B в U називається нечітка підмножина $A \cap B$, яка міститься одночасно в A та B, з функцією приналежності вигляду $\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u))$, $u \in U$. Перетин відповідає сполучнику «І». Таким чином, якщо X та Y - символи нечітких множин, то X $\cap$ $Y = X \cap Y$ (рис. 6.7).

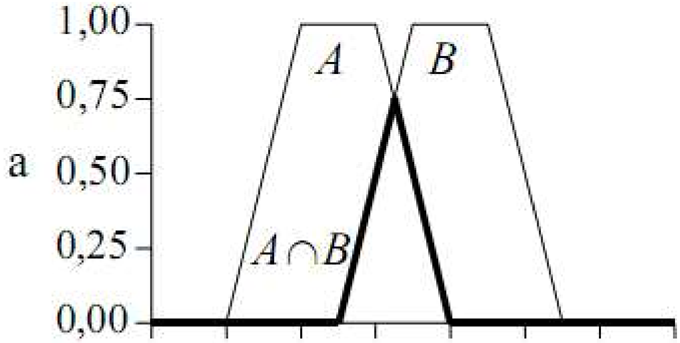


Рис. 6.7. Перетин нечітких множин.

Означення 12. *Доповненням* нечіткої множини A називається нечітка множина $\overline{A}$ з функцією приналежності $\mu_{\overline{A}(u)} = 1 - \mu_A(u)$, $\forall u \in U$. Операція доповнення відповідає операції «НІ», тобто $\overline{X} = \bigcup_{u \in U} (1 - \mu_X(u))/u$ (рис. 6.8).

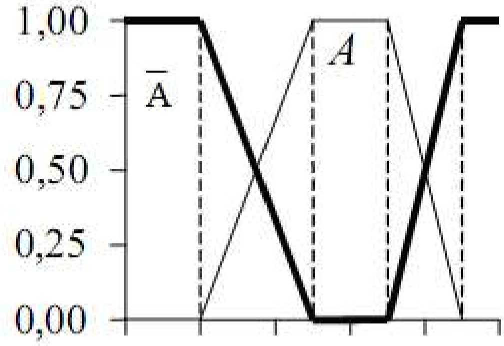


Рис. 6.8. Доповнення нечіткої множини.

Означення 13. *Різниця* нечітких множин A і B в U називається по-різному, застосуванням двох незалежних операцій:

$$\mu_{A-B}(u) = \begin{cases} \mu_A(u) - \mu_B(u), \mu_A(u) \geq \mu_B(u) \\ 0, \mu_A(u) < \mu_B(u) \end{cases}$$

або $A - B = A \cap \overline{B}$ з функцією приналежності $\mu_{A-B}(u) = \min(\mu_A(u), 1 - \mu_A(u))$ (рис. 6. 9).

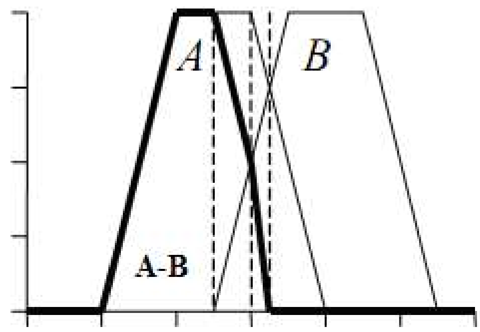


Рис. 6.9. Різниця нечітких множин.

Визначення 14. *Диз'юнктивна сума* $A \oplus B$ визначається виразом вигляду $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ з функцією приналежності вигляду (рис. 6.10)

$$\mu_{A \oplus B}(u) = \max[\min(\mu_A(u), 1 - \mu_B(u)), \min(1 - \mu_A(u), \mu_B(u))].$$

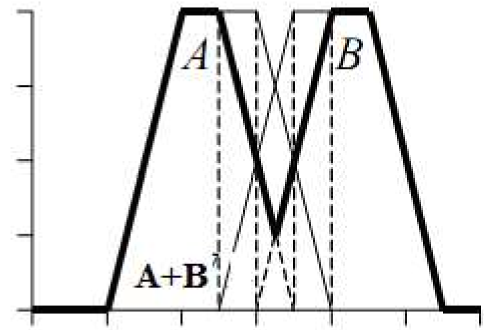


Рис. 6.10. Диз'юнктивна сума нечітких множин.

Наведемо приклади виконання логічних операцій. Вважатимемо, що

$$A = 0.4/u_1 + 0.2/u_2 + 0/u_3 + 1/u_4$$

$$B = 0.7/u_1 + 0.9/u_2 + 0.1/u_3 + 1/u_4, \text{ тоді}$$

$$\overline{A} = 0.6/u_1 + 0.8/u_2 + 1/u_3 + 0/u_4$$

$$A \cap B = 0.4/u_1 + 0.2/u_2 + 0/u_3 + 1/u_4$$

$$A \cup B = 0.7/u_1 + 0.9/u_2 + 0.1/u_3 + 1/u_4$$

$$A - B = A \setminus \overline{B} = 0.3/u_1 + 0.1/u_2 + 0/u_3 + 0/u_4$$

$$A \oplus B = 0.6/u_1 + 0.8/u_2 + 0.1/u_3 + 0/u_4.$$

Вищеприведені операції володіють наступними властивостями:

1. Комутативність: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
2. Асоціативність: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Ідемпотентність: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.
4. Дистрибутивність: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup U = U$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap U = A$, .
5. Інволюція: $\overline{\overline{A}} = A$.
6. Теореми де Моргана: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Розглянемо виконання деяких алгебраїчних операцій над нечітким множинами.

Означення 15. Алгебраїчний добуток A і B ($A \cdot B$) визначається функцією приналежності вигляду $\mu_{AB}(u) = \mu_A(u)\mu_B(u)$, $\forall u \in U$.

Означення 16. Алгебраїчна сума цих множин ($A + B$) визначається функцією приналежності $\mu_{A+B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\mu_B(u)$, $\forall u \in U$.

Означення 16. Ступенем нечіткої множини A називається нечітка множина A^α з функцією приналежності $\mu_{A^\alpha}(u) = \mu_A^\alpha(u)$, $\forall u \in U$, $\alpha > 0$.

При $\alpha = 2$ отримуємо операцію *концентрації* (ущільнення) (CON): $\mathrm{CON}(A) = A^2$. В результаті застосування цієї операції до множини A знижується ступінь нечіткості опису, причому для елементів з високим ступенем приналежності це зменшення відносно мале, а для елементів з малим ступенем приналежності відносно велике (рис. 6.11).

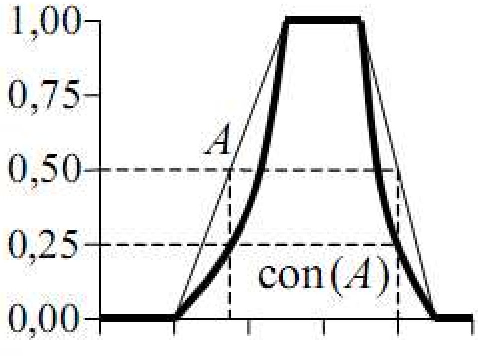


Рис. 6.11. Концентрація нечіткої множини.

При $\alpha = 0.5$ отримуємо операцію *розтягування* (DIL): $\mathrm{DIL}(A) = A^{0.5}$. Ця операція збільшує ступінь нечіткості деякої нечіткої множини (рис. 6.12).

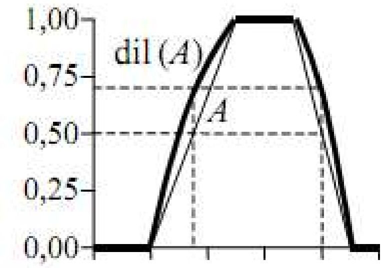


Рис. 6.12. Розтягування нечіткої множини.

Означення 17. *Множення на число.* Якщо α - позитивне число, таке, що $\alpha \max \mu_A(u) \le 1$, то нечітка множина αA має функцію приналежності $\mu_{\alpha A}(u) = \alpha \mu_A(u)$ (рис. 6.13).

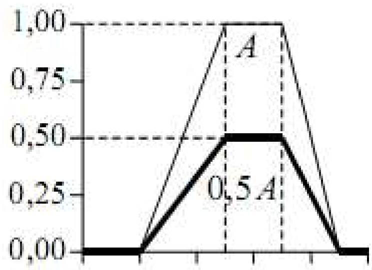


Рис. 6.13. Множення на число нечіткої множини.

Важливою частиною теорії нечітких множин є задачі нечіткої класифікації. Нехай є набір X фотографічних портретів всіх членів декількох сімей. Потрібно розділити цей набір на групи так, щоб в кожній виявилися портрети членів лише однієї сім'ї. Нехай $f_1(x, y)$ - функція приналежності нечіткого бінарного відношення схожості на заданому наборі фотографій. Для кожної пари фотографій x та y значення $f_1(x, y)$ є суб'єктивна оцінка людиною міри схожості x і y. Це нечітке відношення можна розглядати як свого роду «експериментальні дані», що відображають розуміння людиною поняття «схожості» в даній задачі. Наступний етап - використання цих «даних» для потрібної класифікації фотографій.

Відмітимо, що нечітке відношення $f_1(x,y)$ володіє природними властивостями рефлексивності і симетричності. Воно називається однокроковим відношенням, в тому сенсі, що описує результати лише попарного порівняння портретів один з одним. Для $f_1(x,y)$ вводиться n -крокове відношення $f_n(x,y)$ таким чином:

$$f_n(x,y) = \sup_{x\in X} \min\{f_1(x,x_1),...,f_1(x_{n-1},y)\}.$$

Це відношення є n композицією вихідного «експериментального» відношення $f_1(x,y)$ і є в деякому розумінні його уточненням. Неважко показати, що для будь-яких $x, y \in X$ виконується ланцюжок нерівностей

$$0 \le f_1(x,y) \le f_2(x,y) \le ... \le f_n(x,y) \le ... \le 1,$$

з якого виходить, зокрема, що для будь-яких $x, y \in X$ послідовність $\{f_k(x,y)\}$ має межу при $k \to \infty$. Таким чином, існує граничне відношення схожості, визначуване рівністю $f(x,y) = \lim_{k\to\infty} f_k(x,y)$, для всіх $x, y \in X$. Це граничне відношення є кінцевим результатом обробки результатів нечітких вимірів $f_1(x,y)$ і таким чином використовується для класифікації.

Для довільного числа λ $(0 < \lambda < 1)$ вводиться звичайне відношення R_λ: $R_\lambda(x,y) \Leftrightarrow f(x,y) \ge \lambda$. Нескладно показати, що для будь-якого λ $(0 < \lambda < 1)$ R_λ є відношення еквівалентності в X, тобто для будь-яких $x, y \in X$ виконуються звичайні аксіоми еквівалентності:

- рефлективність - $R_\lambda(x,x)$;
- симетричність - $R_\lambda(x,y) \Rightarrow R_\lambda(y,x)$;
- транзитивність - $R_\lambda(x,y) \,\&\, R_\lambda(y,z) \Rightarrow R_\lambda(x,z)$.

Відмітимо, що остання аксіома є наслідком того, що граничне нечітке відношення $f(x,y)$ володіє властивістю нечіткої транзитивності $f(x,z) \ge \min\{f(x,y), f(y,z)\}$, для всіх $x, y, z \in X$.

Остаточний етап алгоритму класифікації - розбиття множини X на класи еквівалентності по отриманому відношенню R_λ. Вибір величини порогу

λ в цьому алгоритмі здійснюється, виходячи з умов початкової задачі. У наведеному прикладі з фотографіями цей вибір здійснювали таким чином. Хай є набір з 20 фотографій представників 3 сімей. Тоді величину λ вибирають так, щоб в результаті реалізації алгоритму класифікації вийшли 3 класи еквівалентності по відношенню R_λ.

Представлена теорія дозволяє виявити наступні переваги fuzzy-систем в порівнянні з іншими:

- можливість оперувати нечіткими вхідними даними: наприклад, значеннями, що безперервно змінюються в часі (динамічні задачі), значеннями, які неможливо задати однозначно (результати статистичних опитів, рекламні компанії і так далі);
- можливість нечіткої формалізації критеріїв оцінки і порівняння: оперування критеріями «більшість», «можливо», «переважно» і т.д.;
- можливість проведення якісних оцінок як вхідних даних, так і вихідних результатів: маємо можливість оперуєте не лише значеннями даних, але і їх мірою достовірності і її розподілом;
- можливість проведення швидкого моделювання складних динамічних систем і їх порівняльного аналізу із заданою мірою точності: оперуючи принципами поведінки системи, описаними fuzzy-методами, ми по-перше, не витрачаєте багато часу на з'ясування точних значень змінних і складання рівнянь, що їх описують, по-друге, можна оцінити різні варіанти вихідних значень.

6.2. Нечітка логіка в системах Data Mining

Нечітка логіка «Fuzzy Logic» - це узагальнення традиційної аристотелевої логіки на випадок, коли істинність розглядається як лінгвістична змінна, що набуває значень типа: «дуже істинно», «більш-менш істинно», «не дуже помилково» і тому подібне Вказані лінгвістичні значення представляються нечіткою множиною.

У поєднанні слів «нечіткий» і «логіка» є щось незвичайне. Логіка в звичайному сенсі слова є представлення механізмів мислення, те, що ніколи не може бути нечітким, але завжди строгим і формальним. Проте математики, що досліджували ці механізми мислення, відмітили, що насправді існує не одна логіка (наприклад, булева), а стільки, скільки ми побажаємо, тому що все визначається вибором відповідної системи аксіом. Звичайно, як тільки аксіоми вибрані, всі твердження, побудовані на їх основі, мають бути строгими, без протиріч зв'язаними один з одним згідно правилам, встановленим в цій системі аксіом.

Людське мислення - це поєднання інтуїції і строгості, яке, з одного боку, розглядає світ в цілому або по аналогії, а з іншого боку - логічно і послідовно і, значить, є нечітким механізмом. Закони мислення, які хотілося б включити в програми комп'ютерів, мають бути обов'язково формальними; закони мислення, що проявляються в діалозі людини з людиною, - нечіткі. Чи можна тоді стверджувати, що нечітка логіка може бути добре пристосована до людського діалогу? Так - якщо програмне забезпечення, розроблене з врахуванням нечіткої логіки, стане операційним і зможе бути технічно реалізоване, то людино-машинне спілкування стане набагато зручнішим, швидшим і краще пристосованим до вирішення проблем.

Вважається, що нечітка логіка виникла як найбільш зручний спосіб побудови систем управління складними технологічними процесами, а вже потім знайшла широке вживання в різного роду комп’ютерних аналітичних системах [5, 23, 65, 71].

Важливим елементом нечіткої логіки є поняття нечіткої і лінгвістичної змінних, що використовується при описі об'єктів і явищ за допомогою нечіткої множини.

Означення 18. *Нечіткою змінною* називається сукупність (кортеж) вигляду $< X, U, x >$, де X - найменування нечіткої змінної, $U = \{u\}$ - область її визначення (універсальна множина), $x = \bigcup_{u \in U} \mu_x(u)/u$ - нечітка множина на U, що описує обмеження на значення нечіткої змінної X.

Наприклад, якщо провести аналогію з саквояжем, то нечітку змінну можна уподібнити саквояжу з ярликом. Тоді X - напис на ярлику (назва саквояжа), U - список предметів, які в принципі можна помістити в саквояж, а x - частина цього списку, де для кожного предмету u вказано число $\mu_x(u)$, що характеризує міру легкості, з якою предмет можна помістити в саквояж X.

Лінгвістична змінна відрізняється від числової змінної тим, що її значеннями є не числа, а слова або словосполучення в природній або формальній мові. Оскільки слова загалом менш точні, чим числа, поняття лінгвістичної змінної дає можливість приблизно описувати явища, які настільки складні, що не піддаються опису в загальноприйнятих кількісних термінах. Зокрема, нечітку множину, яка є обмеженням, пов'язаним із значеннями лінгвістичної змінної, можна розглядати як сукупну характеристику різних підкласів елементів універсальної множини. У цьому сенсі роль нечіткої множини аналогічна тій ролі, яку грають слова і словосполучення в природній мові.

Важливий аспект поняття лінгвістичної змінної полягає в тому, що ця змінна вищого порядку, ніж нечітка змінна, в тому сенсі, що значеннями лінгвістичної змінної є нечіткі змінні. Наприклад, значеннями лінгвістичної змінної «ВІК» можуть бути: «МОЛОДИЙ, НЕМОЛОДИЙ, СТАРИЙ, ДУЖЕ СТАРИЙ, НЕ МОЛОДИЙ І НЕ СТАРИЙ» і тому подібне. Інший важливий аспект поняття лінгвістичної змінної полягає в тому, що лінгвістичній змінній властиві два правила:

1. Синтаксичне, яке може бути задане у формі граматики, що породжує назву значень змінної.
2. Семантичне, яке визначає алгоритмічну процедуру для обчислення сенсу кожного значення.

Означення 19. *Лінгвістичною змінною* (ЛЗ) називається кортеж вигляду $<\beta, T, U, G, M>$, де

β - найменування ЛЗ;

T - множина її значень (терм-множина), яка є найменуванням нечітких змінних, областю визначення кожної з яких є множина U. Множина T називається базовою терм-множиною лінгвістичної змінної. Терм, який складається з одного слова або з декількох слів, що завжди фігурують разом, називається атомарним термом. Терм, який складається із понад одного атомарного терма, називається складеним термом;

G - синтаксична процедура, яка описує процес утворення з елементів множини T нових, осмислених для даної задачі значень лінгвістичної змінної (терм);

M - семантична процедура, яка дозволяє перетворювати кожне нове значення ЛЗ, що створюється процедурою G, в нечітку змінну, тобто сформувати відповідну нечітку множину.

Розглянемо таке нечітке поняття як «Ціна акції». Це і є назва лінгвістичної змінної. Сформуємо для неї базову терм-множину, яка складатиметься з трьох нечітких змінних: «Низька», «Помірна», «Висока» і задамо область міркувань у вигляді $U = [100,200]$ (одиниць). Останнє, що залишилося зробити - побудувати функції приналежності для кожного лінгвістичного терма з базової терм-множини T. Існує понад десяток типових форм кривих для задання функцій приналежності. Найбільшого поширення набули: трикутна, трапецеїдальна і гаусова функції приналежності.

Трикутна функція приналежності визначається трійкою чисел (a,b,c), і її значення в точці x обчислюється згідно виразу:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{b-a}, a \le x \le b \\ 1 - \dfrac{x-c}{c-b}, b \le x \le c \\ 0, \mathit{інші\_випадки}. \end{cases}$$

При $(b-a)=(c-b)$ маємо випадок симетричної трикутної функції приналежності, яка може бути однозначно задана двома параметрами з трійки (a,b,c) (рис. 6.14).

Аналогічно для задання трапецеїдальній функції приналежності необхідна четвірка чисел (a,b,c,d):

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, b\le x\le c\\ 1-\dfrac{x-c}{d-c}, c\le x\le d\\ 0, інші\_випадки.\end{cases}$$

При $(b-a)=(d-c)$ трапецеїдальна функція приналежності набирає симетричного вигляду (рис. 6.14).

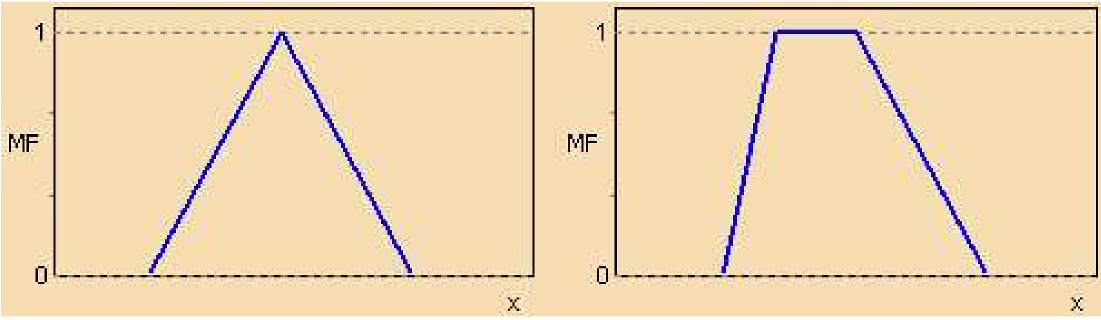


Рис. 6.14. Кусочно–лінійні функції приналежності.

Функція приналежності гаусова типа описується формулою

$$MF(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$

і оперує двома параметрами. Параметр c позначає центр нечіткої множини, а параметр σ відповідає за крутість функції (рис. 6.15).

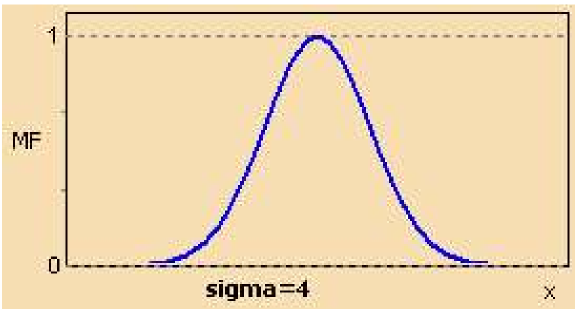


Рис. 6.15. Гаусова функція приналежності.

Сукупність функцій приналежності для кожного терма з базової терм-множини T зазвичай зображаються разом на одному графіку. На рисунку 6.16 наведений приклад описаної вище лінгвістичної змінної «Ціна акції».

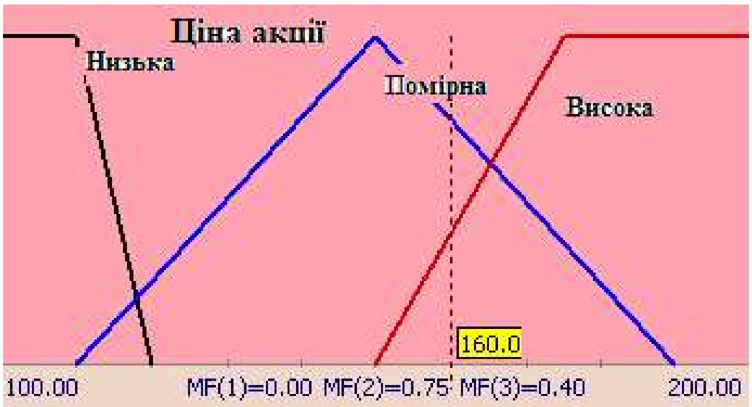


Рис. 6.16. Лінгвістична змінна «Ціна акції».

Розглянемо декілька інших прикладів. Як проста ілюстрація тієї ролі, яку грають синтаксичні і семантичні правила в разі структурованої лінгвістичної змінної, розглянемо змінну «ЗРІСТ», терм-множину якої можна записати у вигляді:

Т(ЗРІСТ)={ВИСОКИЙ, ДУЖЕ ВИСОКИЙ, ДУЖЕ-ДУЖЕ ВИСОКИЙ...}.

$$\text{М(ВИСОКИЙ)} = \begin{cases} \left(1 + \left(\dfrac{u-60}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, u \geq 60 \\ 0, інші\_випадки. \end{cases}$$

М(ДУЖЕ ВИСОКИЙ)=(М(ВИСОКИЙ))2, і так далі.

Лінгвістичну змінну називатимемо булевою, якщо її терми є булевими комбінаціями змінних вигляду X_p і hX, де h - лінгвістична невизначеність, X_p - атомарний терм.

Хай «ВІК» - булева лінгвістична змінна з терм-множиною вигляду Т(ВІК)={МОЛОДИЙ, НЕМОЛОДИЙ, СТАРИЙ, НЕСТАРИЙ, ДУЖЕ МОЛОДИЙ, НЕ МОЛОДИЙ І НЕ СТАРИЙ, МОЛОДИЙ АБО НЕ ДУЖЕ СТАРИЙ ...}.

В даному прикладі є два атомарні терми – «МОЛОДИЙ» і «СТАРИЙ» і одна невизначеність – «ДУЖЕ». Якщо ототожнювати союз «І» з операцією пересічення нечіткої множини, «АБО» - з операцією об'єднання нечітких множин, заперечення «НЕ» - з операцією взяття доповнення і модифікатор «ДУЖЕ» - з операцією концентрації, то дана змінна буде повністю структурована.

В залежності від характеру U лінгвістичні змінні можуть бути поділені на числові та нечислові.

Означення 20. Числовою називають лінгвістичну змінну, у якої $U \to R^1$, $R^1 = (-\infty, \infty)$ і яка має вимірювану базову змінну.

Залежність між двома звичайними числовими змінними X та Y найчастіше описується набором висловів, наприклад: «якщо x дорівнює 5, то y дорівнює 12» і т. д. Застосуємо такий же спосіб і для нечітких змінних. Зокрема, якщо X та Y - лінгвістичні змінні, то висловлювання, що описують залежність Y від X, могли б виглядати так: «якщо X мале, то Y велике»; «якщо X не дуже мале, то Y не дуже велике»; «якщо X не дуже мале і не дуже велике, то Y не дуже велике» і таке інше.

Нечіткі висловлювання типу «з A слідує B», де A та B мають невизначене значення, наприклад, «Якщо людина добре до тебе відноситься, то ти повинен бути уважним до неї», звичайні в повсякденній мові. Такі відношення є простими. Для опису більш складних залежностей можуть бути потрібні нечіткі алгоритми.

Якщо звернути увагу на структуру лінгвістичної змінної, то можна відзначити, що в загальному випадку значення лінгвістичної змінної є складеним терміном, що представляє поєднання деяких елементарних термінів. Ці елементарні терміни можна розбити на чотири основні категорії:

- первинні терміни, які є символами спеціальних нечітких підмножин, наприклад, «молодий, старий» та інше;
- заперечення «НІ» та союзи «І, АБО»;
- невизначення типу «дуже, більш-менш» і т. д.;

- маркери, частіше всього це ввідні слова.

Заперечення, союзи, невизначення та інші терміни, які входять в визначення значень лінгвістичної змінної, можуть розглядатися як символи різних операцій, які визначені на нечітких підмножинах U. В зв'язку з цим розглянемо поняття нечіткого числа.

Означення 21. Нечіткі числа – нечіткі змінні, які визначені на числовій осі, тобто нечітке число визначається як нечітка множина A на множині R з функцією приналежності $\mu_A(u) \in [0,1]$, $u \in R$.

Нечіткі числа відповідають значенням числової лінгвістичної змінної. Нечітке число є *нормальним*, якщо $\max \mu_A(u) = 1$, та *випукле,* якщо для $x \le y \le z$ виконується $\mu_A(x) \ge \min\{\mu_A(y), \mu_A(z)\}$. *Множина* α*-рівня* нечіткої множини A визначається як $A\alpha = \{u / \mu_A(u) \ge \alpha\}$. Підмножина $S_A \subset R$ називається *носієм нечіткого числа* A, якщо $S_A = \{u / \mu_A(u) > 0\}$. Нечітке число A *позитивне*, якщо $\forall u \in S_A$, $u > 0$ і *негативне*, якщо $\forall u \in S_A$, $u < 0$.

Для визначення арифметичних операцій Л. А. Заде був сформульований *принцип узагальнення*. Нехай A та B - дві нечіткі множини. $d : R^1 \otimes R^1 \to R^1$ - деяка функція, яка визначає арифметичну операцію. Тоді нечітке число $D = d(A,B)$ визначається функцією приналежності $\mu_D(u) = -[\mu_A(u), \mu_B(u)]$, $\sup \min(\mu_A(u), \mu_B(u))$. Тепер бінарні операції можна визначити таким чином:

$$A \otimes B = \bigcup_U \mu_D(u) / (a \otimes b).$$

Розширені бінарні арифметичні операції (складання, множення та ін.) для нечітких чисел визначаються через відповідні операції для чітких чисел з використанням принципу узагальнення таким чином:

$$C = A + B \Leftrightarrow \sup_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

$$C = A - B \Leftrightarrow \sup_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

$$C = A * B \Leftrightarrow \sup_{z=xy} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

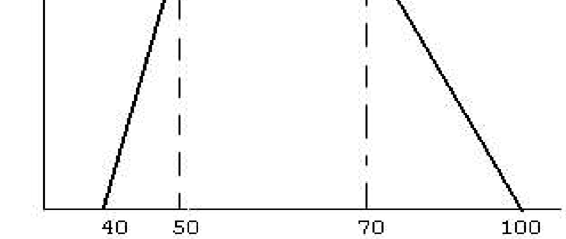
$$C = A : B \Leftrightarrow \sup_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Аналіз властивостей арифметичних операцій над нечіткими числами показав, що нечітке число не має протилежного і зворотного чисел, складання і множення комутативні, асоціативні і в загальному випадку не дистрибутивні.

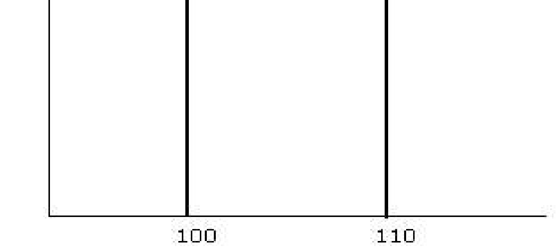
Розглянемо наступний приклад. Хай в рамках складання проекту бюджету розглядаються різні джерела фінансування. Причому деякі з них характеризуються неточністю оцінки грошових сум на день оцінювання, а інші малою надійністю. Крім того, з бюджету необхідно віддати борги, кількість яких також неточна, оскільки залежить від того, чи зажадає кредитор все або лише частину в наступному фінансовому періоді.

- Джерело A: фінансування забезпечується, його сума може змінюватися від 40 до 100 млн. грн. залежно від кон'юнктури, але з найбільшою ймовірністю можна чекати поступлень в сумі від 50 до 70 млн. грн.
- Джерело B: джерело надійне і розумно вважати, що фінансування буде надано і складе суму 100 - 110 млн. грн.
- Джерело C: джерело ненадійне, а якщо і дасть, то не більше 20 млн. грн.
- Борг D: плата за кредити 50 - 100 млн. грн., але найбільш ймовірна виплата 80 млн. грн.

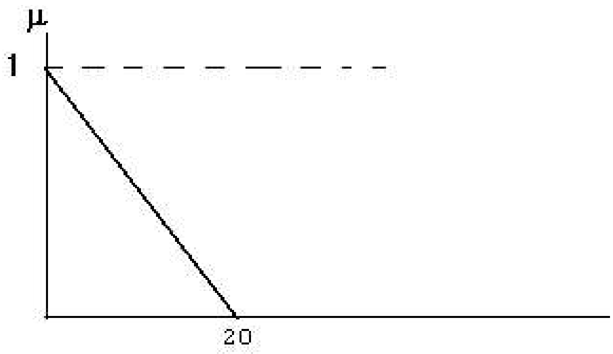
Таким чином, маємо три джерела надходжень і одне джерело витрат. Побудуємо на основі їх описів трапецієвидні функції приналежності для кожної з чотирьох нечітких змінних (рис. 6.17) Після задання всіх нечітких змінних, встає задача визначення суми всього бюджету, яка також буде нечіткою величиною.

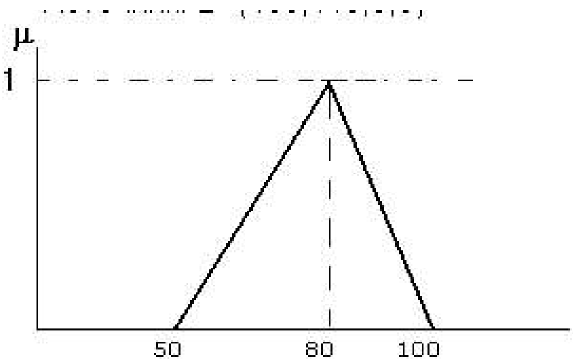


Джерело A=(50, 70, 10, 30)



Джерело B=(100, 110, 0, 0)





Джерело C=(0, 0, 0, 20)   Борг D=(80, 80, 30, 20)

Рис. 6.17. Проект бюджету.

Слід зазначити, що в випадку застосування трапецієвидних функцій приналежність $\mu_A(u)$ характеризується четвіркою параметрів $(\overline{m}, \underline{m}, \alpha, \beta)$ (рис.6.18).

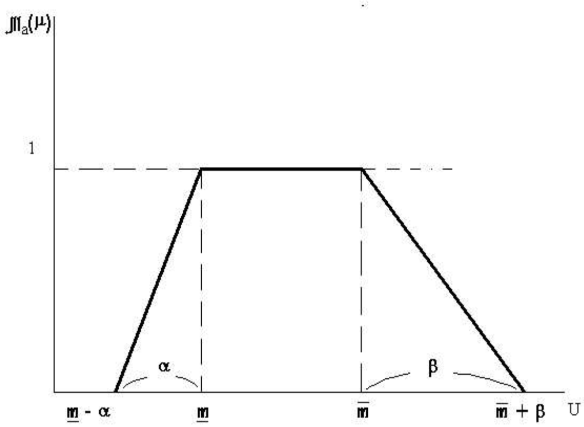


Рис. 6.18. Трапецієвидна функція приналежності.

Визначення арифметичних операції розглянемо для випадку двох нечітких змінних $\widetilde{A}_1$ і $\widetilde{A}_2$, які задані своїми трапецієвидними функціями приналежності вигляду:

$$\widetilde{A}_1 = (\overline{m}_1, \underline{m}_1, \alpha_1, \beta_1),$$

$$\widetilde{A}_2 = (\overline{m}_2, \underline{m}_2, \alpha_2, \beta_2)$$

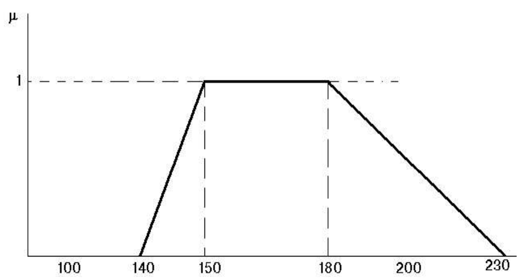
Результатом операції буде також нечітка змінна $A=(\overline{m},\underline{m},\alpha,\beta)$, яка також має трапецієвидну функцію приналежності, параметри якої визначаються залежно від виду арифметичної операції (табл. 6.1).

Табл. 6.1.

Тип операції	Параметри функції приналежності
$A=\widetilde{A}_1(+)\widetilde{A}_2$	$\overline{m}=\overline{m}_1+\overline{m}_2,\quad \underline{m}=\underline{m}_1+\underline{m}_2,$ $\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta=\beta_1+\beta_2$
$A=\widetilde{A}_1(-)\widetilde{A}_2$	$\overline{m}=\overline{m}_1-\underline{m}_2,\quad \underline{m}=\underline{m}_1-\overline{m}_2,$ $\alpha=\alpha_1+\beta_2,\quad \beta=\beta_1+\alpha_2$
$A=\widetilde{A}_1(*)\widetilde{A}_2$	$\overline{m}=\overline{m}_1*\overline{m}_2,\quad \underline{m}=\underline{m}_1*\underline{m}_2,$ $\alpha=\underline{m}_1*\underline{m}_2-(\underline{m}_1-\alpha_1)(\underline{m}_2-\alpha_2),$ $\beta=(\overline{m}_1+\beta_1)(\overline{m}_2+\beta_2)-\overline{m}_1*\overline{m}_2$
$A=\widetilde{A}_1(/)\widetilde{A}_2$	$\overline{m}=\overline{m}_1/\underline{m}_2,\quad \underline{m}=\underline{m}_1/\overline{m}_2,$ $\alpha=(\underline{m}_1\beta_2+\overline{m}_2\alpha_1)/(\overline{m}_2^2+\overline{m}_2\beta_2),$ $\beta=(\underline{m}_2\beta_1+\overline{m}_1\alpha_2)/(\underline{m}_2^2-\underline{m}_2\alpha_2)$

На основі приведених вище описів арифметичних операцій можна для даного прикладу визначити оцінку бюджету без врахування боргів (F) як суму трьох джерел фінансування. Причому результат буде також нечіткою змінною $F=A(+)B(+)C=$(50+100+0, 70+110+0, 10+0+0, 30+0+20) = (150, 180, 10, 50) з трапецієвидною функцією приналежності (рис. 6.19). Для здобуття повної оцінки передбачуваного бюджету необхідно з отриманого результату відняти передбачувані плати по кредитах. При цьому бюджет з врахуванням боргів (F_1) також буде нечіткою змінною (рис. 6.20):

$F_1=D(-)D=$(150 - 80, 180 - 80, 10 + 20, 50 + 30) = (70, 100, 30, 80).



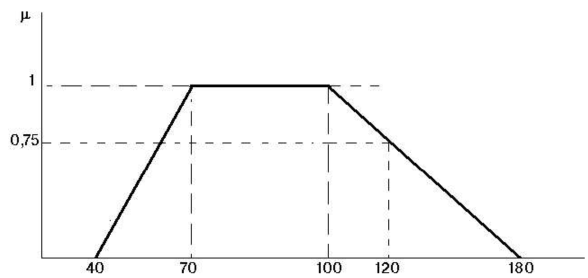


Рис. 6.19. Бюджет без врахування боргу. Рис. 6.20. Бюджет з боргом.

Таким чином, в бюджеті може бути сума від 40 до 180 млн. грн., але з найбільшою мірою упевненості можна говорити про суми від 70 до 100 млн. грн.

Існують процедури по обчисленню деякої чіткої функції $H(A,B)$ від нечітких аргументів, які називаються індексом ранжирування. Значення індексу для конкретної пари чисел дає підставу вирішити питання про те, яке з двох нечітких чисел більше (або з яким ступенем більше). Приведемо приклад індексу ранжирування:

$$H(A,B) = H_+(A) - H_+(B),\ H_+(A) = \int_0^1 M(A_0)dA,$$

де A_0 - α-рівнева підмножина нечіткої множини А. При цьому, якщо $H(A,B) \geq 0$, то $A \geq B$.

Розглянемо приклад застосування індексу ранжирування. Два літака протиборчих повітряних армій керуються стратегіями:

А: Якщо снарядів мало, то ймовірність поразки супротивника мала, інакше не мала.

В: Якщо снарядів не мало, то ймовірність поразки супротивника велика, інакше не велика. Відомо, що

мало снарядів = $A =$(0.8/3, 0.4/15, 0.3/30),

мала ймовірність = $B =$(0.1/0.9, 0.5/0.5, 0.8/0.1),

велика ймовірність = $C =$(0.8/0.9, 0.5/0.5, 0.3/0.2).

Кількість снарядів не дуже мала. Хто переможе? Визначимо всі необхідні для вирішення задачі нечіткі множини:

не мало снарядів = $\overline{A} = (0.2/3, 0.6/15, 0.3/30)$,

не мала ймовірність = $\overline{B} = (0.9/0/9, 0.5/0.5, 0.2/0.1)$,

не велика ймовірність = $\overline{C} = (0.2/0.9, 0.5/0.5, 0.7/0.2)$,

$x =$ не дуже мало = $\overline{(мало)^2}$, $(мало)^2 = (0.64/3, 0.16/15, 0.09/30)$,

$\overline{(мало)^2} = (0.36/3, 0.84/15, 0.91/30)$.

Визначимо нечітке відношення стратегії А:

$$R_1 = A \times B \cup \overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$y_1 = x \circ R_1 = 0.36 \quad 0.84 \quad 0.91 \circ \begin{vmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{vmatrix} = (0.6/0.9, 0.5/0.5, 0.4/0.1)$$

Визначимо нечітке відношення стратегії В:

$$R_2 = \overline{A} \times C \cup A \times \overline{C} = \begin{vmatrix} 0.16 & 0.4 & 0.56 \\ 0.48 & 0.3 & 0.28 \\ 0.24 & 0.15 & 0.21 \end{vmatrix}$$

$$y_2 = x \circ R_2 = 0.36 \quad 0.84 \quad 0.91 \circ \begin{vmatrix} 0.16 & 0.4 & 0.56 \\ 0.48 & 0.3 & 0.28 \\ 0.24 & 0.15 & 0.21 \end{vmatrix} = (0.48/0.9, 0.36/0.5, 0.36/0.2)$$

Порівняємо отримані результати y_1 та y_2 між собою, для чого скористаємося індексом ранжирування $H(y_1, y_2)$.

$H_+(y_1) = 0.4 \cdot (0.1 + 0.9)/2 + 0.5 \cdot (0.5 + 0.9)/2 + 0.6 \cdot (0.9 + 0.9)/2 = 1.09$

$H_+(y_2) = 0.36 \cdot (0.2 + 0.9)/2 + 0.48 \cdot (0.9 + 0.9)/2 = 0.63$

$H(y_1, y_2) = 1.09 - 0.63 = 0.46 > 0$

Таким чином, літак зі стратегією А переможе.

Важливим моментом в теорії нечіткої логіки є застосування нечіткого логічного виводу в умовах невизначеної інформації.

Означення 22. *Нечітким логічним виводом* (fuzzy logic inference) називається апроксимація залежності $Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ кожної вихідної лінгвістичної змінної від вхідних лінгвістичних змінних і здобуття висновку у вигляді нечіткої множини, відповідної поточним значенням входів, з використанням нечіткої бази знань і нечітких операцій. Основу нечіткого логічного виводу складає *композиційне правило* Заде.

Означення 23. *Композиційне правило виводу* Заде формулюється таким чином: якщо відоме нечітке відношення $\widetilde{R}$ між вхідною (x) і вихідною (y)

змінними, то при нечіткому значенні вхідної змінної $x = \widetilde{A}$, нечітке значення вихідний змінної визначається як $y = \widetilde{A} \circ \widetilde{R}$, де «$\circ$» - максміна композиція.

Означення 24. *Нечіткою базою знань* називається сукупність нечітких правил «Якщо – то», що визначають взаємозв'язок між входами і виходами досліджуваного об'єкту. Узагальнений формат нечітких правил такий: «**Якщо** *посилка правила*, **то** *висновок правила»*.

Посилка правила або антецедент є твердженням типа «x є низький», де «низький» - це терм (лінгвістичне значення), заданий нечіткою множиною на універсальній множині лінгвістичної змінної x. Квантифікатори «дуже», «більш-менш», «не», «майже» і тому подібне можуть використовуватися для модифікації термів антецедента.

Висновок або наслідок правила є твердженням типа «y є d", в якому значення вихідний змінної (d) може задаватися:

- нечітким термом: «y є високий»;
- класом рішень: « y є бронхіт»;
- чіткою константою: «$y = 5$»;
- чіткою функцією від вхідних змінних: «$y = 5 + 4x$».

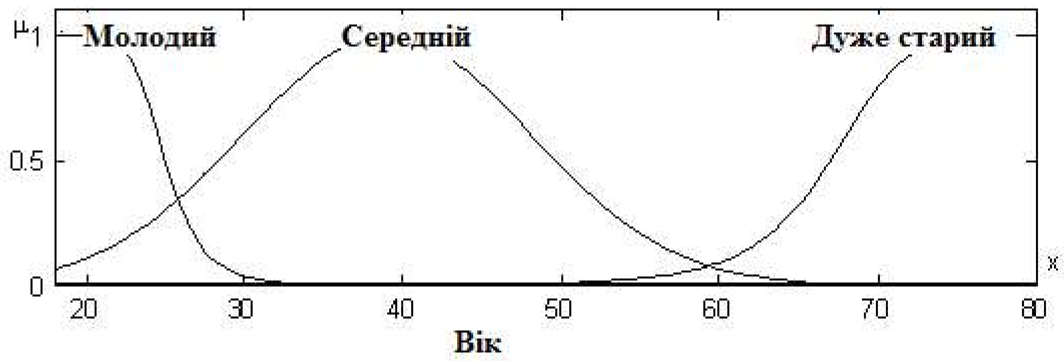
Розглянемо такий приклад: нечітка база знань описує залежність між віком водія (x) і можливістю дорожньо-транспортного випадку (y):

Якщо x = Молодий, **то** y = Висока;

Якщо x = Середній, **то** y = Низька;

Якщо x = Дуже старий, **то** y = Висока.

Хай функції приналежності термів мають вигляд, показаний на рис. 6.21. Тоді нечіткі відношення, відповідні правилам бази знань, будуть такими, як на рис. 6.22.



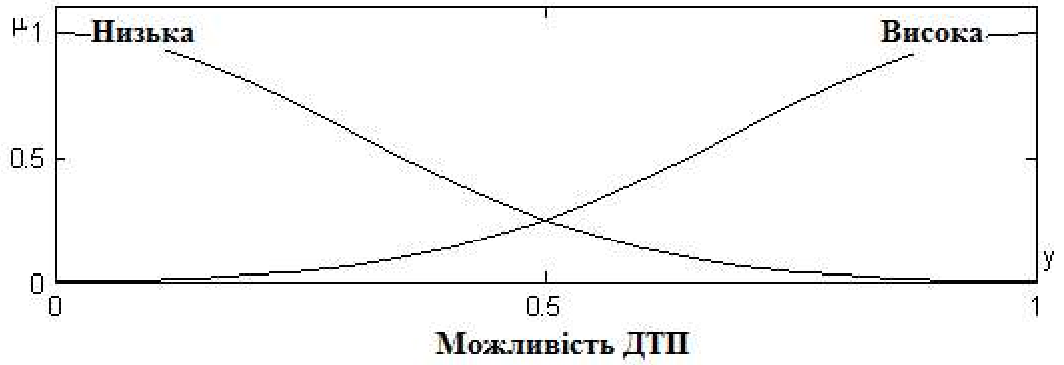


Рис. 6.21. Функції приналежності термів.

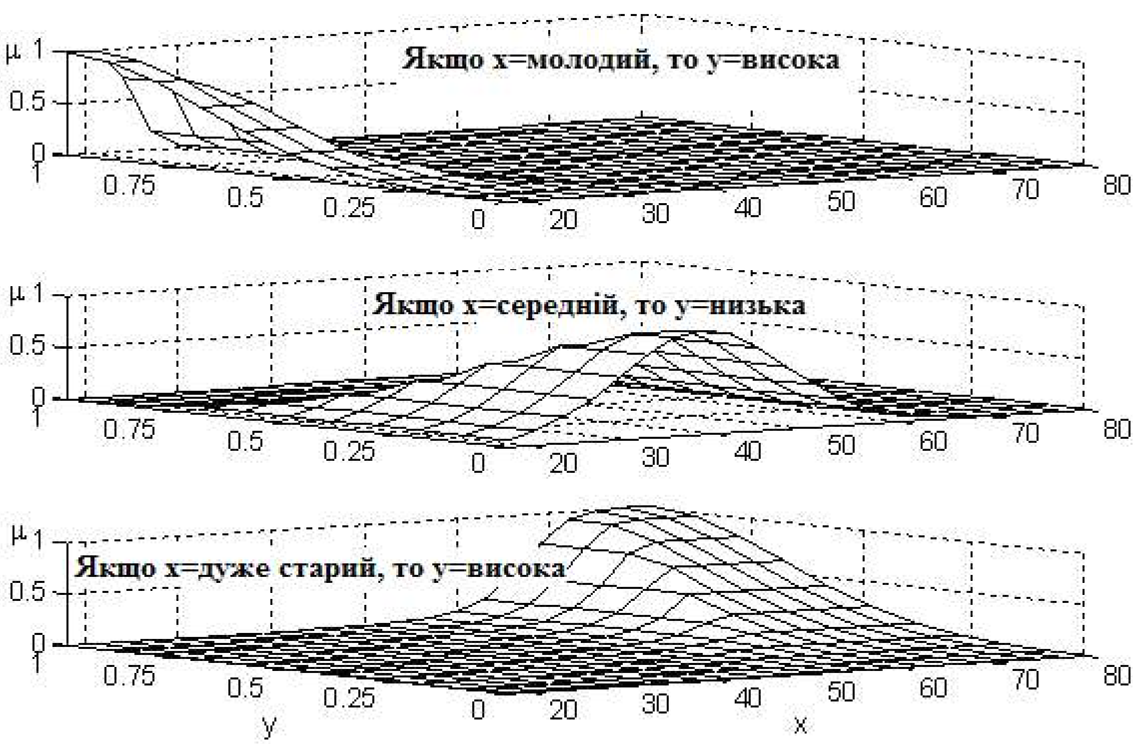


Рис. 6.22. Нечіткі відношення, відповідні правилам бази знань.

У загальному випадку нечітке виведення рішення відбувається за три (або чотири) кроки:

1. *Етап фаззифікації.* За допомогою функцій приналежності всіх термів вхідних лінгвістичних змінних і на підставі чітких значень, що задаються, з універсумів вхідних лінгвістичних змінних визначаються міри упевненості в тому, що вихідна лінгвістична змінна набуває конкретного значення. Ця міра упевненості є ордината точки пересічення графіка функції приналежності терма і прямої $x =$ чітке значення лінгвістичної змінної.

2. *Етап безпосереднього нечіткого виводу*. На підставі набору правил - нечіткої бази знань - обчислюється значення істинності для передумови кожного правила на підставі конкретних нечітких операцій, відповідної кон'юнкції або диз'юнкції термів в лівій частині правил. В більшості випадків це або максимум, або мінімум із ступенів упевненості термів, обчислених на етапі фаззифікації, який застосовується до висновку кожного правила. Використовуючи один із способів побудови нечіткої імплікації, отримаємо нечітку змінну, відповідну обчисленому значенню ступеню упевненості в лівій частині правила і нечіткій множині в правій частині правила.

Зазвичай в якості виводу використовується мінімізація або правила продукції. При мінімізуючому логічному виводі вихідна функція приналежності обмежена зверху відповідно до обчисленого ступеню істинності посилки правила (нечітке логічне І). У логічному виводі з використанням продукції вихідна функція приналежності масштабується за допомогою обчисленого ступеню істинності передумови правила.

3. *Етап композиції (агрегації, акумуляції).* Всі нечіткі множини, призначені для кожного терма кожної вихідної лінгвістичної змінної, об'єднується разом, і формується єдина нечітка множина - значення для кожної лінгвістичної змінної, що виводиться. Зазвичай використовуються функції MAX або SUM.

4. Етап дефаззифікації (необов'язковий). Використовується тоді, коли корисно перетворити нечіткий набір значень лінгвістичних змінних, що виводяться, до точних. Є чимала кількість методів переходу до точних значень

(принаймні, 30). Два приклади загальних методів – «методи повної інтерпретації» і «по максимуму». У методі повної інтерпретації точне значення змінної, що виводиться, обчислюється як значення «центру тяжіння» функції приналежності для нечіткого значення. У методі максимуму як точне значення змінної, що виводиться, приймається максимальне значення функції приналежності.

У теорії нечітких множин процедура дефаззифікації аналогічна знаходженню характеристик положення (математичного чекання, моди, медіани) випадкових величин в теорії ймовірностей. Простим способом виконання процедури дефаззифікації є вибір чіткого числа, відповідного максимуму функції приналежності. Проте придатність цього способу поширюється лише на одноекстремальні функції приналежності. Для багатоекстремальних функцій приналежності часто використовуються наступні методи дефаззифікації:

- COG (Center Of Gravity) – «центр тяжіння». Фізичним аналогом цієї формули є знаходження центру тяжіння плоскої фігури, обмеженої осями координат і графіком функції приналежності нечіткої множини.
- MOM (Mean Of Maximums) – «центр максимумів». При використанні методу центру максимумів потрібно знайти середнє арифметичне елементів універсальної множини, що мають максимальні ступені приналежності.
- First Maximum – «перший максимум» - максимум функції приналежності з найменшою абсцисою.

Серед найбільш відомих механізмів логічного виводу слід відмітити нечіткий логічний вивід по алгоритму Мамдані, по алгоритму Сугено, синглтонну модель нечіткого логічного виводу, ієрархічні системи нечіткого логічного виводу, адаптивну мережа нечіткого виводу та деякі інші.

Розглянемо більш докладніше алгоритм нечіткого виводу на конкретному прикладі. Хай у нас є деяка система, наприклад, реактор, описувана трьома параметрами: температура, тиск і витрата робочої речовини. Всі показники вимірювані, і множина можливих значень відома. Також з досвіду роботи з системою відомі деякі правила, що зв'язують значення цих параметрів. Передбачимо, що зламався датчик, що вимірює значення одного з параметрів системи, але знати його свідчення необхідно хоч би приблизно. Тоді встає завдання про відшукання цього невідомого значення (хай це буде тиск) при відомих показниках двох інших параметрів (температури і витрати) і зв'язку цих величин у вигляді наступних правил:

Якщо Температура низька і Витрата мала, **то** Тиск низький;

Якщо Температура середня, **то** Тиск середній;

Якщо Температура висока або Витрата велика, **то** Тиск високий.

У нашому випадку Температура, Тиск і Витрата - лінгвістичні змінні. Опишемо кожну з них.

Температура. Універсум (множина можливих значень) - відрізок [0, 150]. Початкова множина термів {Висока, Середня, Низька}. Функції приналежності термів мають наступний вигляд (рис. 6.23):

Рис. 6.23. Лінгвістична змінна «Температура».

Тиск. Універсум - відрізок [0, 100]. Початкова множина термів {Високий, Середній, Низький}. Функції приналежності термів мають наступний вигляд (рис. 6.24):

Рис. 6.24. Лінгвістична змінна «Тиск».

Витрата. Універсум - відрізок [0, 8]. Початкова множина термів {Велика, Середня, Мала}. Функції приналежності термів мають наступний вигляд (рис. 6.25):

Рис. 6.25. Лінгвістична змінна «Витрата робочої речовини».

Хай відомі значення: «Температура» - 85 і «Витрата» - 3,5. Виконаємо розрахунок значення тиску.

Послідовно розглянемо етапи нечіткого виводу. Спочатку по заданих значеннях вхідних параметрів знайдемо ступені упевненості простих тверджень вигляду «Лінгвістична змінна A є Терм Лінгвістичної змінної A». Цей етап називається фаззифікацією, тобто переходом від заданих чітких значень до ступенів упевненості. Отримуємо наступні ступені упевненості:

- Температура Висока - 0,7;
- Температура Середня - 1;
- Температура Низька - 0,3;
- Витрата Велика - 0;
- Витрата Середня - 0,75;
- Витрата Мала - 0,25.

Потім обчислимо ступені упевненості посилок правил:

- Температура Низька і Витрата Мала: $\min$ (Температура Низька, Витрата Мала) = $\min$ (0.3, 0.25) = 0.25;
- Температура Середня: 1;
- Температура Висока або Витрата Велика: $\max$ (Температура Висока, Витрата Велика) = $\max$ (0.7,0) = 0,7.

Слід зазначити також той факт, що за допомогою перетворень нечіткої множини будь-яке правило, що містить в лівій частині як кон'юнкції, так і диз'юнкції, можна привести до системи правил, в лівій частині кожного будуть або лише кон'юнкції, або лише диз'юнкції. Таким чином, не зменшуючи загальності, можна розглядати правила, що містять в лівій частині або лише кон'юнкції, або лише диз'юнкції.

Кожне з правил представляє із себе нечітку імплікацію. Ступінь упевненості посилки ми обчислили, а ступінь упевненості висновку задається функцією приналежності відповідного терма. Тому, використовуючи один із способів побудови нечіткої імплікації, отримаємо нову нечітку змінну, відповідну ступеню упевненості в значенні вихідних даних при застосуванні до заданих вхідних відповідного правила. Використовуючи визначення нечіткої імплікації як мінімуму лівої і правої частин (визначення Мамдані), маємо (рис. 6.26):

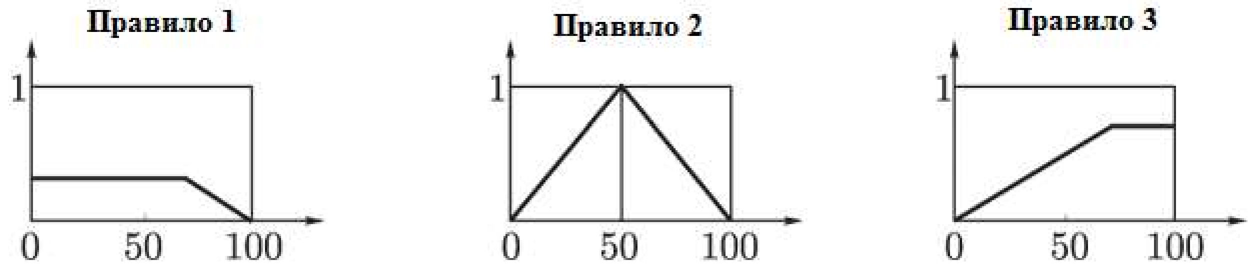


Рис. 6.26. Нечітка база знань.

Тепер необхідно об'єднати результати вживання всіх правил. Цей етап називається акумуляцією. Один з основних способів акумуляції - побудова максимуму отриманих функцій приналежності (рис. 6.27). Отриману функцію приналежності вже можна вважати результатом. Це новий терм вихідної змінної «Тиск». Його функція приналежності говорить про ступінь упевненості в значенні тиску при заданих значеннях вхідних параметрів і використанні правил, що визначають співвідношення вхідних і вихідних змінних. Але зазвичай все-таки необхідне якесь конкретне числове значення. Для його здобуття використовується етап дефаззифікації, тобто набуття конкретного значення з універсуму по заданій на ньому функції приналежності.

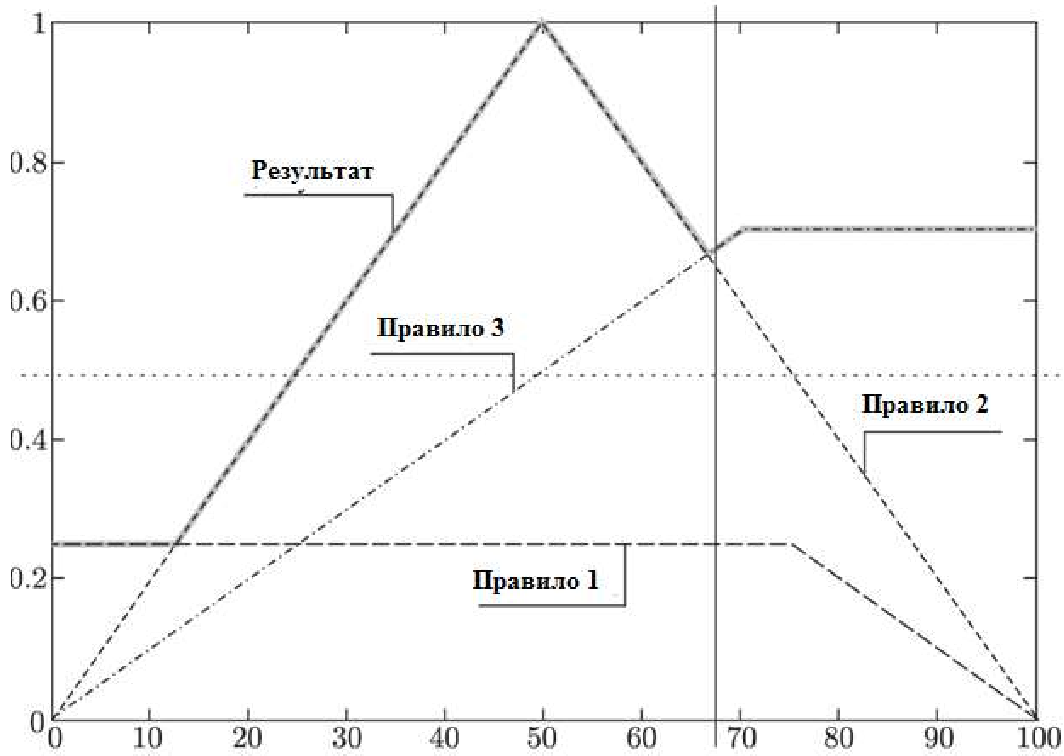


Рис. 6.27. Об'єднання результатів вживання правил.

Існує багато методів дефаззифікації, але в нашому випадку досить методу першого максимуму. Застосовуючи його до отриманої функції приналежності, отримуємо, що значення тиску - 50. Таким чином, якщо ми знаємо, що температура дорівнює 85, а витрата робочої речовини - 3,5, то можемо зробити висновок, що тиск в реакторі дорівнює приблизно 50.

Різні поняття, нечіткі за своєю природою, можуть бути формально описані за допомогою нечіткої множини. Нечітка логіка, наприклад, дозволяє формалізувати прості логічні зв'язки нечітких змінних за допомогою нечітких висловів. Для опису ж складних співвідношень між змінними зручно використовувати *нечіткі алгоритми*.

Під алгоритмом розуміється точно визначене правило дій (програма), для якого задана вказівка, як і в якій послідовності це правило необхідно застосовувати до вихідних даних задачі, аби отримати її рішення. Характеристиками алгоритму є:

- детермінованість - однозначність результату процесу при незмінних вихідних даних;
- дискретність визначуваного алгоритмом процесу - розчленованість його на окремі елементарні дії, можливість виконання яких людиною або машиною не викликає сумніву;
- масовість - вихідні дані для алгоритму можна вибрати з деякої множини даних, тобто алгоритм повинен забезпечити рішення будь-якої задачі з класу однотипних задач.

Нечіткий же алгоритм визначається *впорядкованою множиною нечітких інструкцій (нечітких висловів), які містять поняття, що формалізуються нечіткими множинами.* Під нечіткими інструкціями розуміються інструкції, що містять нечітке поняття, наприклад, «пройти близько 100 метрів», а під машинними - інструкції, що не містять жодних нечітких понять: «пройти 100 метрів». Чіткі інструкції ми називатимемо машинними, аби підкреслити можливість моделювання нечітких алгоритмів на ЕОМ, що сприймають лише читання інструкцій.

Приведемо точне визначення нечіткого алгоритму. Для формулювання необхідно ввести ряд первинних визначень і позначень. По-перше, замість інтервалу [0, 1], загальноприйнятої множини значень функції приналежності, розглядається непорожня множина W з відношенням часткового порядку $>$ і операціями $\otimes, \oplus$, що задовольняють властивостям комутативності, асоціативності і дистрибутивності, а також містять нульовий і одиничний елементи.

По-друге, розглядаються інструкції наступного вигляду

Start: go to L (інструкція початку);

L: do F, go to L_1 (інструкція операції);

L: if P then go to $(L_1,...,L_n)$ (інструкція умови);

L: halt (інструкція закінчення),

де $(L_1,...,L_n) \in L$ - множина символів міток інструкцій, $f \in F$ - символ оператора або функції, $P \in P$ - символ предикатів або умов.

Введення поняття інструкції дозволяє визначити поняття програми. Під програмою розуміється кінцева множина інструкцій π, що містить єдину інструкцію початку. Жодні інструкції з π не мають однакових міток.

По-третє, визначається поняття W-машини. W-машина є функція M, визначена на множині символів $\{O\} \cup \{I\} \cup F \cup P$, для яких існують множина входів X, множина станів пам'яті M і множина виходів Y, а також виконані наступні умови:

$M(I): X \times M \to W$ (функція входів);

$\forall F \in F \;\; M(F): M \times M \to W$ (функція операції);

$\forall P \in P,\; n > 0 \;\; M(P): M \times \{1,...,n\} \to W$ (функція умов);

$M(O): M \times Y \to W$ (функція виходу).

Символи I та O позначають вхід і вихід. Нарешті, по-четверте, програма π разом з W-машиною, яка допускає π, називається *нечіткою програмою*. Отже, послідовністю інструкцій, складаючих нечітку програму, називається *нечітким алгоритмом*. Конкретні типи алгоритмів можуть бути отримані за допомогою вибору множин $\{W, M, X, Y\}$, функцій (входів, дій, умов, виходів), операцій $\{\otimes, \oplus\}$, відношення $>$.

Приклад. Хай є послідовність інструкцій для водія автомобіля і карта місцевості. Водієві пропонується знайти місце призначення, використовуючи карту і послідовність нечітких інструкцій, що описують маршрут. Для простоти викладу припустимо, що всі точки на плоскості мають тільки цілочисельні координати. Типові інструкції для водія: «рухатися прямо біля L метрів», «повернути наліво», «повернути направо», «рухатися прямо до тих пір, поки не побачиш ...».

Сконструюємо відповідну W-машину M. Така машина має множину станів пам'яті M у вигляді впорядкованих трійок $(a, b, \overline{u})$, де (a, b) - точка на площині, відповідна місцезнаходженню автомобіля, $\overline{u}$ - одиничний вектор напряму руху автомобіля. Множина входів $X = M$ і множина виходів Y складаються з впорядкованих пар (a,b); M_I - функція входів, відповідає тождественій функції; M_O - функція виходів, відповідає функції, що відображає кожну трійку $(a,b,\overline{u})$ в (a,b).

Машина M не має жодної функції умови. Кожній інструкції, приведеній вище, відповідає функція операції. При цьому i інструкція в послідовності інструкцій може бути перетворена в інструкцію операції виду «$do\ \ F_i;\ goto\ \ L_i$». Сукупність таких інструкцій і інструкцій «$start : goto\ \ L_0$» та «$L_n : halt$», де n - довжина послідовності, складає програму π. Процес виконання програми π на машині M визначається послідовністю інструкцій і картою місцевості. Стислості ради приведемо тільки функцію операції для інструкції типу «рухатися прямо біля L метрів»:

$$M_{F_L} = ((a_2,b_2,\overline{u}_2)\big|(a_1,b_1,\overline{u}_1)) = f_L(\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}) \times G((a_2,b_2,\overline{u}_2)\big|(a_1,b_1,\overline{u}_1)),$$

де $f_L(d)$ - ступінь відповідна відстані d, $\big|G((a_2,b_2,\overline{u}_2)\big|(a_1,b_1,\overline{u}_1))$ - ступінь, відповідна твердженню: «точка (a_2,b_2) і напрям $\overline{u}_2$ досяжні при русі прямо з точки (a_1,b_1) по напряму $\overline{u}_1$.

Розглянуті нечіткі теорії мають тісну інтеграцію з інтелектуальними парадигмами. Подібно до того, як нечіткі множини розширили рамки класичної математичної теорії множин, нечітка логіка «вторглася» практично в більшість методів Data Mining наділивши їх новою функціональністю.

Нечіткі нейронні мережі. Нечіткі нейронні мережі (fuzzy-neural networks) здійснюють висновки на основі апарату нечіткої логіки, проте параметри функцій приналежності настроюються з використанням алгоритмів навчання нейронних мереж. Тому для підбору параметрів таких мереж застосовується метод зворотного розповсюдження помилки, спочатку запропонований для навчання багатошарового персептрона. Для цього модуль нечіткого управління представляється у формі багатошарової мережі. Нечітка нейронна мережа як правило складається з чотирьох шарів: шару фаззифікації вхідних змінних, шару агрегації значень активації умови, шару агрегації нечітких правил і вихідного шару. Найбільшого поширення в даний час набула архітектура нечіткої нейронної мережі виду ANFIS і TSK. Доведено, що такі мережі є універсальними апроксиматорами. Швидкі алгоритми навчання і інтерпретуємість накопичених знань – ці чинники зробили сьогодні нечіткі нейронні мережі одним з найперспективніших і ефективніших інструментів м'яких обчислень.

Адаптивні нечіткі системи. Класичні нечіткі системи володіють тим недоліком, що для формулювання правил і функцій приналежності необхідно застосовувати знання експертів тієї або іншої предметної області, що не завжди вдається забезпечити. Адаптивні нечіткі системи (adaptive fuzzy systems) вирішують цю проблему. У таких системах підбір параметрів нечіткої системи проводиться в процесі навчання на експериментальних даних. Алгоритми навчання адаптивних нечітких систем відносно трудомісткі і складні в порівнянні з алгоритмами навчання нейронних мереж, і, як правило, складаються з двох стадій: генерації лінгвістичних правил і корегування функцій приналежності. Перша задача відноситься до задач переборного типу, друга – до оптимізації в безперервних просторах. При цьому виникає певна суперечність: для генерації нечітких правил необхідні функції приналежності, а для проведення нечіткого виводу – правила. Крім того, при автоматичній генерації нечітких правил необхідно забезпечити їх повноту і несуперечність. Значна частина методів навчання нечітких систем використовує генетичні алгоритми. У англомовній літературі цьому відповідає спеціальний термін – Genetic Fuzzy Systems. Значний внесок в розвиток теорії і практики нечітких систем з еволюційною адаптацією внесла група іспанських дослідників на чолі з Ф. Херрера (F. Herrera).

Нечіткі запити. Нечіткі запити до баз даних (fuzzy queries) - перспективний напрям в сучасних системах обробки інформації. Даний інструмент дає можливість формулювати запити на природній мові, наприклад: «Вивести список недорогих пропозицій про знімання житла близько до центру міста», що неможливе при використанні стандартного механізму запитів. Для цієї мети розроблена нечітка реляційна алгебра і спеціальні розширення мов SQL для нечітких запитів. Велика частина досліджень в цій області належить західноєвропейським ученим Д. Дюбуа и Г. Праде.

Нечіткі асоціативні правила. Нечіткі асоціативні правила (fuzzy associative rules) – інструмент для витягання з баз даних закономірностей, які формулюються у вигляді лінгвістичних висловів. Тут введені спеціальні поняття нечіткої транзакції, підтримки і достовірності нечіткого асоціативного правила.

Нечіткі когнітивні карти. Нечіткі когнітивні карти (fuzzy cognitive maps) були запропоновані Б. Коско в 1986 р. і використовуються для моделювання причинних взаємозв'язків, виявлених між концептами деякої області. На відміну від простих когнітивних карт, нечіткі когнітивні карти є нечіткий орієнтований граф, вузли якого є нечіткою множиною. Направлені ребра графа не лише відображають причинно-наслідкові зв'язки між концептами, але і визначають міру впливу зв'язуваних концептів. Активне використання нечітких когнітивних карт як засіб моделювання систем обумовлене можливістю наочного представлення аналізованої системи і легкістю інтерпретації причинно-наслідкових зв'язків між концептами. Основні проблеми пов'язані з процесом побудови когнітивної карти, який не піддається формалізації. Крім того, необхідно довести, що побудована когнітивна карта адекватна реальній системі. Для вирішення даних проблем розроблені алгоритми автоматичної побудови когнітивних карт на основі вибірки даних.

Нечітка кластеризація. Нечіткі методи кластеризації, на відміну від чітких методів (наприклад, нейронні мережі Кохонена), дозволяють одному і тому ж об'єкту належати одночасно декільком кластерам, але з різною мірою. Нечітка кластеризація в багатьох ситуаціях «природніша», ніж чітка, наприклад, для об'єктів, розташованих на кордоні кластерів. Найбільш поширені: алгоритм нечіткої самоорганізації c-means і його узагальнення у вигляді алгоритму Густафсона-Кесселя. Список можна продовжити і далі:

нечіткі дерева рішень, нечіткі мережі Петрі, нечітка асоціативна пам'ять, нечіткі самоорганизующі карти і інші гібридні методи.

6.3. Програмне забезпечення нечітких методів

Математична теорія нечітких множин будучи предметом інтенсивних досліджень відкриває досить великі можливості перед системними аналітиками. Засновані на цій теорії різні комп'ютерні системи, у свою чергу, істотно розширюють сферу застосування нечіткої логіки. В даний час найбільший інтерес, як на Україні, так і за кордоном, викликає область нечіткого інтелектуального аналізу даних як одна з найрезультативніших сфер застосування теорії нечітких множин. Ключовими перевагами нечіткої логіки в порівнянні з іншими технологіями інтелектуального аналізу є: по-перше, при тих же об'ємах вхідної і вихідної інформації, центральний блок ухвалення рішень стає компактніше і простіше для сприйняття людиною, по-друге, рішення складної і громіздкої задачі обчислення точних дій підміняється значно більш простою і гнучкою стратегією адаптивного підстроювання - при збереженні необхідної точності результату [5, 25, 56, 77].

Розвиток додатків з нечіткою логікою відбувається не лише на логічному рівні. У 1986 році в AT&T Bell Labs створювалися процесори з «прошитою» нечіткою логікою обробки інформації. У Європі і США ведуться інтенсивні роботи по інтеграції fuzzy команд в асемблери промислових контролерів вбудованих пристроїв (чіпи Motorola). Крім того, розробляються різні варіанти fuzzy- співпроцесорів, які контактують з ЦП через загальну шину даних, і концентрують свої зусилля на розмиванні ущільненні інформації та оптимізації використання правил (продукти Siemens Nixdorf). Та все ж по проведених аналізах вартості продукції дешевше «емулювати» нечітку логіку, хоча складним питанням є трансляція fuzzy-системи на традиційну мову програмування. Компанія Aptronix пропонує використовувати мову Java, що має все необхідне для досить адекватного відтворення інструкцій нечіткої логіки додатка методами мови. Крім того, використання Java API відкриває нові перспективи для дослідження fuzzy-систем у взаємодії. Internet, як глобальне середовище поширення Java-додатків, ідеально підходить для інтеграції прикладних пристроїв, створених за допомогою алгоритмів нечіткої логіки. Включення JavaBeans і Java сервлетів в комплекти розробника додатків представляє широкі можливості по програмуванню бізнес – логіки і обробки даних, уникаючи залежності від клієнтської операційної системи і призначеного для користувача інтерфейсу.

Сьогодні на світовому ринку програмних ресурсів представлено більше 100 пакетів, що в тому або іншому вигляді використовують нечітку логіку. У трьох десятках СУБД реалізована функція нечіткого пошуку. Власні програми на основі нечіткої логіки анонсували такі гіганти як IBM, Oracle та інші. Небагато знають, що нечіткій логіці зобов'язано своїм народженням і нове покоління систем імітаційного моделювання. Більшість програмних комплексів, що використовуються в світі для економічного, політичного і фінансового моделювання, базуються на методах т.з. динаміки систем («system dynamics»). А остання, у свою чергу, використовує апарат нечітких когнітивних схем (FCM), запропонованих Коско на початку 80-х і вперше випробуваних «в бойових умовах» під час політичної кризи в Південній Африці. У ті дні уряд США встав перед необхідністю приймати важливі військово-політичні рішення в умовах неповноти і явної невірогідності інформації, що поступала із-за океану. Ціна можливої помилки була вельми висока - на карті стояла доля крупних американських інвестицій. Традиційні методи пасували перед складним неформалізованим задачами. І тоді була побудована когнітивна модель ситуації, заснована на якісних викладеннях аналітика Уїльямся (Williams). Виявилось, що заплутаний клубок причинно-наслідкових зв'язків укладається в компактну графову модель, верхній рівень якої містить всього дев'ять ключових елементів, що повністю визначають розвиток ситуації. З тих пір без систем когнітивного моделювання не обходиться жоден ситуаційний центр військового і політичного керівництва західних країн. Першовідкривачем ринку став пакет iThink, що вже встиг продемонструвати свої можливості при моделюванні виборів Президента Росії. Модель розвитку політичної ситуації, зроблена за допомогою пакету iThink в середині травня і опублікована на початку червня, точно визначила співвідношення електорату основних претендентів - 34% проти 30% і передбачила результат другого туру виборів задовго до початку першого. Примітно, що відхилення результатів найпершого прогнозу, зробленого за півтора місяці до голосування, від точних відповідей «уклалися» в рамки погрішності методів, вживаних соціологічними службами. Досить вірогідно, що пакет iThink в недалекому майбутньому стане і першовідкривачем нового ринку України - ринку послуг з підвищення прибутковості бізнесу (т.з. BPR - Business Processing Reengineering).

Проте перераховані вище програми - це складні комплексні системи, що вимагають певних зусиль по освоєнню і налаштуванню. На іншому полюсі ринку знаходиться сімейство легких і компактних програм, заснованих на нечіткій алгебрі. Їх найбільш яскравим представником є пакет FuziCalc американської фірми FuziWare, який є порівняно молодим (1995 рік), але встиг завоювати популярність як недорогий інструмент, що дозволяє проводити швидкі (приблизні) розрахунки в різних областях бізнесу і отримувати результати із сповна прийнятною мірою точності. Зовні FuziCalc - це звичайна електронна таблиця, і доки проводяться точні обчислення, різниця неощутима. Проте традиційна електронна таблиця втратить працездатність при першому ж нечітко введеному значенні. FuziCalc пропонує інший шлях, значно простіший. Поля, значення яких відомі неточно, позначаються спеціальним значком (у FuziCalc це сірий трикутник). Самі значення в простому випадку представляються четвіркою чисел (мінімум, максимум і найбільш імовірний діапазон). Наприклад: «Зазвичай в магазині буває від 30 до 50 продажів в день, але ніколи не менше 10 і не більше 80». У графічному представленні такому вислову відповідає трапецієвидна функція розподілу (втім, пакет дозволяє описувати і значно складніші функції). Підсумковий результат обчислень буде представлений подібними ж четвірками чисел, наприклад: «Завтрашній прибуток найімовірніше знаходитиметься в діапазоні 1050 - 1200 доларів, в найгіршому випадку - близько 800, в найкращому – 1200». Унікальна здатність пакету проводити швидкі оціночні обчислення без накопичення помилки міцно «прописала» його в арсеналі різних служб швидкого реагування - рятувальників з МНС і ін. Там, де вихідні дані неточні і неповні, а швидкість здобуття перших оцінок критична - нечітка алгебра практично не має альтернатив.

У складі пакету поставляються декілька прикладів вирішення задач. Робоче середовище пакету має виглядає: (рис. 6.28)

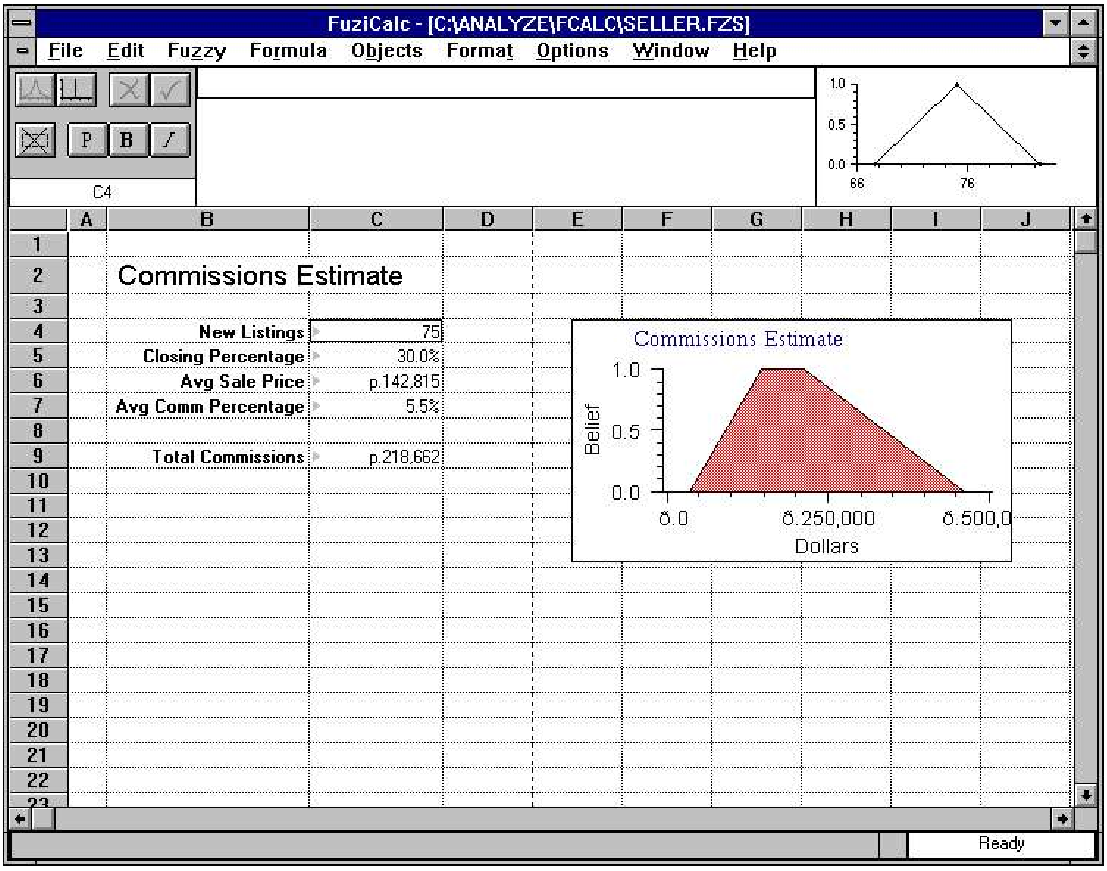


Рис. 6.28. Головне меню пакету FuziCalc.

На рисунку 6.28 показаний приклад рішення задачі оцінки прибутку при роботі фірми на ринку нерухомості. Постановка задачі така: менеджер планує діяльність фірми, що працює на ринку нерухомості наступного року. Цільова функція задачі – діапазон прибутку, на який можна розраховувати.

Для вирішення задачі існують чотири нечіткі твердження, виявлених із статистики діяльності фірми за декілька минулих років:

- Протягом кожного року у фірму приходять приблизно 75 потенційних клієнтів.
- З потенційних клієнтів приблизно 30% здійснюють операції.
- Вартість нерухомості, що фігурує в операціях, складає приблизно $ 142 815.
- За проведену операцію з кожного клієнта береться приблизно 5.5% комісійних.

Якщо просто перемножити ці чотири значення, ми отримаємо цифру $ 176 733. Така сума прибутку за рік, якщо її обчислювати звичайним способом. При цьому менеджер ясно усвідомлює, що:

- коли він говорить про 75 потенційних клієнтів в рік, то в різні роки виходить по-різному, але абсолютно точно відомо, що ніколи не бувало менше 67 і ніколи не було більше 87 (рис. 6.29).

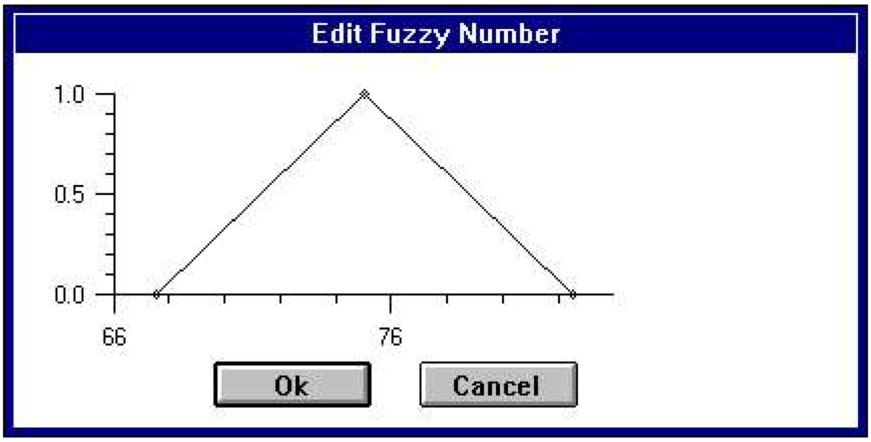


Рис. 6.29. Неточна функція клієнтів.

- коли він говорить про 30% потенційних клієнтів, що здійснюють операції, насправді це значення, як правило, змінюється в межах 25-35%, але ніколи не було менше 10% і ніколи не було більше 50 % (рис. 6.30).

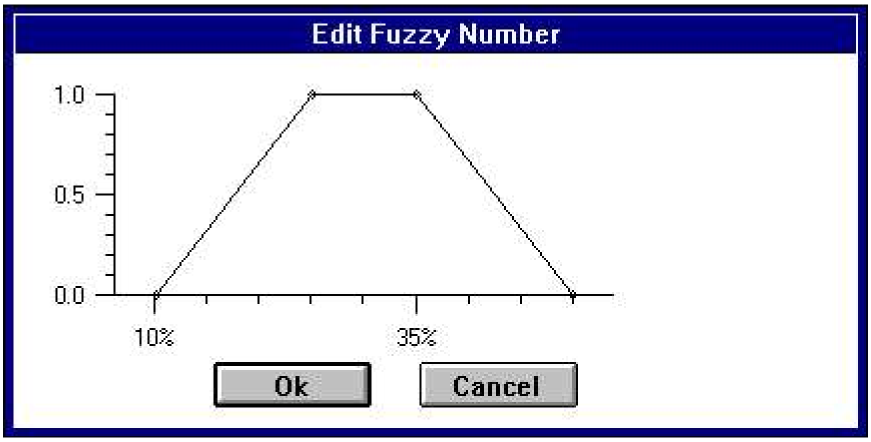


Рис. 6.30. Нечітка функція операцій.

- коли він говорить про вартість нерухомості в $ 142 815, то фактично вартість різних об'єктів операцій розподіляється таким чином: найчастіше відбуваються операції за ціною $ 138 000 – $ 140 000, але ніколи не дешевше $ 130 000 і не дорожче $ 150 000. Звернете увагу на злам графіка і відхід в точку, відповідну $ 160 000. Тут менеджер має на увазі, що наступного року фірма спробує проводити операції з дорожчою нерухомістю, але не більше $ 160 000 (рис. 6.31).

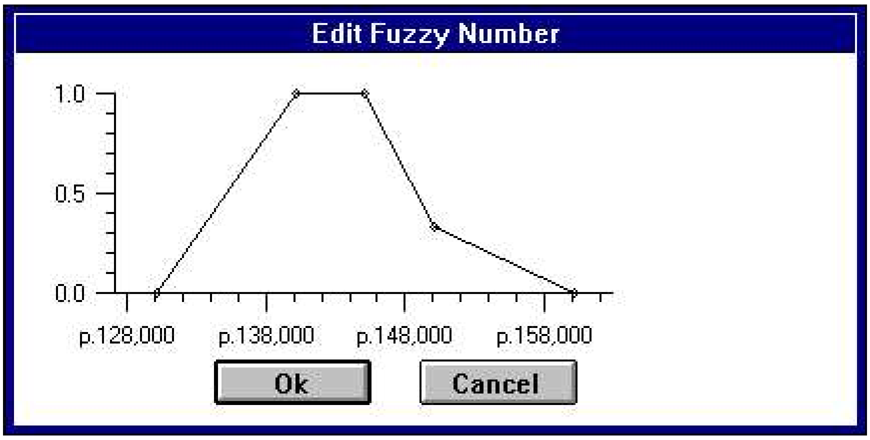


Рис. 6.31. Неточна функція вартості нерухомості.

- коли він говорить про комісійні в 5.5%, то насправді в різних випадках розмір комісійних розподіляється частішим всього в межах 5-6%, але не менше 4% і не більше 7% (рис. 6.32).

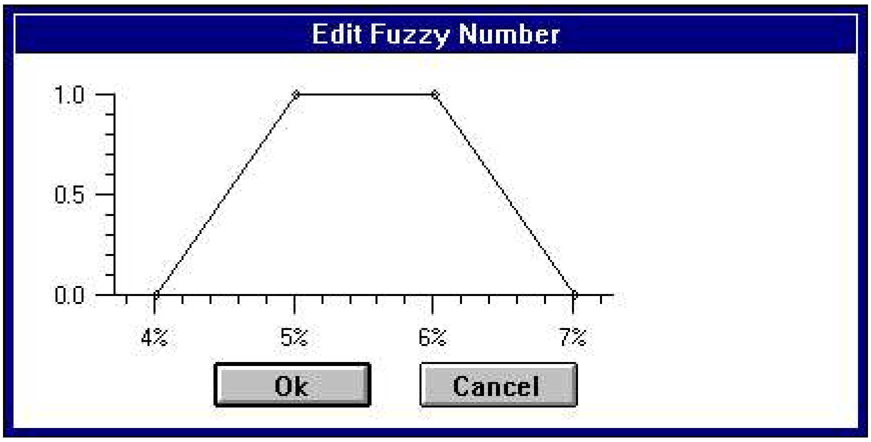


Рис. 6.32. Неточна функція комісійних виплат.

Система при такій постановці задачі результат обчислює перемножуванням інтегралів, що описують дані криві. Оскільки типи кривих відомі, число їх також відомо, то вживання 5 стандартних функцій, що описують ці криві робить обчислення практично миттєвими. У даному прикладі бачимо, що, побудувавши 4 нечітких твердження і перемноживши їх значення, відповідь можна побачити таку: «найбільш достовірне значення прибутку знаходитиметься в межах $ 150 000 – $ 200 000» (рис. 6.33).

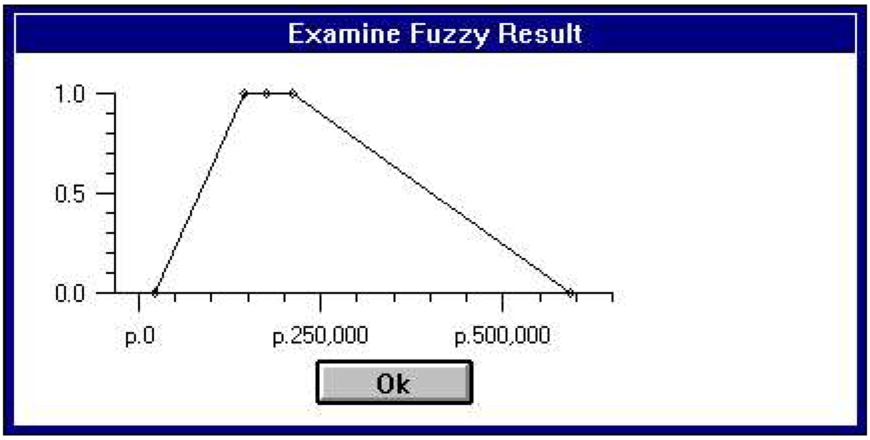


Рис. 6.33. Неточна функція прибутку.

Іншим відомим програмним продуктом є пакет CubiCalc фірми HiperLogic - управління динамічними системами. Ефективність вживання CubiCalc в задачах така, що відома організація КОКОМ (США), та, що свого часу стежила за тим, аби нові американські технології в комп'ютерній області не підвищували чужий воєнно-промисловий потенціал, накладала дуже жорсткі обмеження на поширення цього пакету. Робоче середовище інструменту представлено на рисунку 6.34.

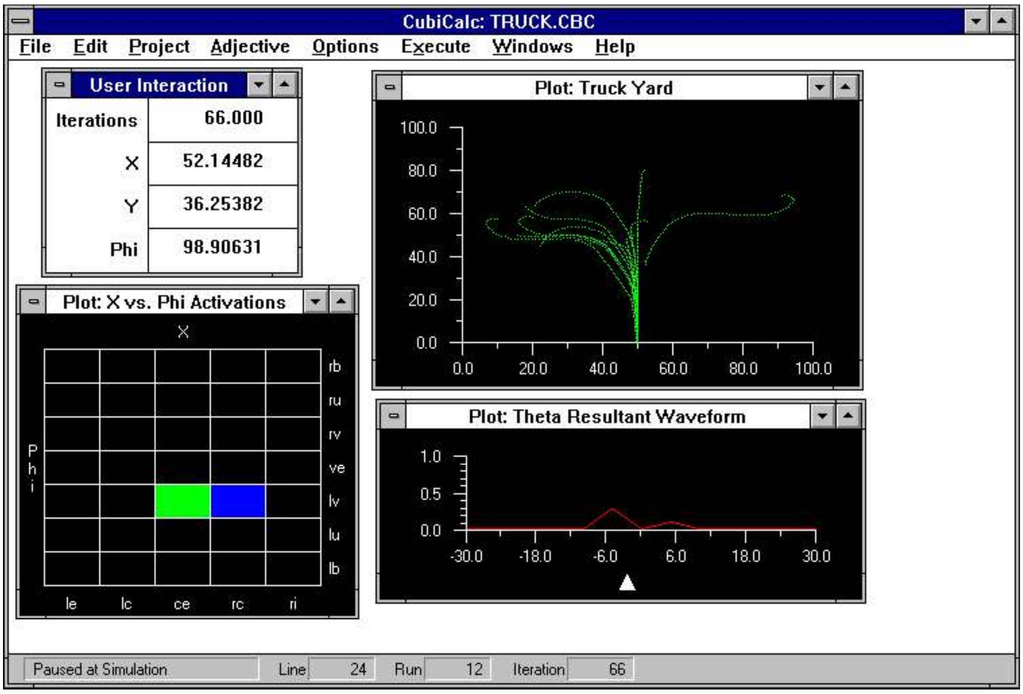


Рис. 6.34. Загальний вигляд пакету CubiCalc.

Розглянемо один з прикладів, що увійшов до всіх підручників нечіткої математики. Вантажівка заїжджає в гараж. Вантажівка досить довга, а гараж досить вузький (рис. 6.35). Кращі результати виходять, коли на підніжку трака встає помічник і, користуючись критеріями: «трохи лівіше… ще лівіше… стоп… тепер трохи назад і вправо», разом з водієм досягає бажаного результату. В принципі, задачу можна ускладнювати скільки завгодно: замість вантажівки це може бути важкий літак, замість гаража - другий літак, шуканий результат – заправка в повітрі, при входящій умови – бовтанка і так далі.

Нас цікавлять принципи, по яких може функціонувати подібна система, а також те, як ці принципи звести в деяку систему. Причому задача ставиться так, що будь-яка вантажівка з будь-якої точки двору за будь-яких умов повинна заїжджати у ворота, розташовані в будь-якому місці двору. Якщо задачу вирішувати класичними засобами, то доведеться писати системи рівнянь, що описують вантажівку, гараж, можливі зовнішні чинники, алгоритми управління і інше.

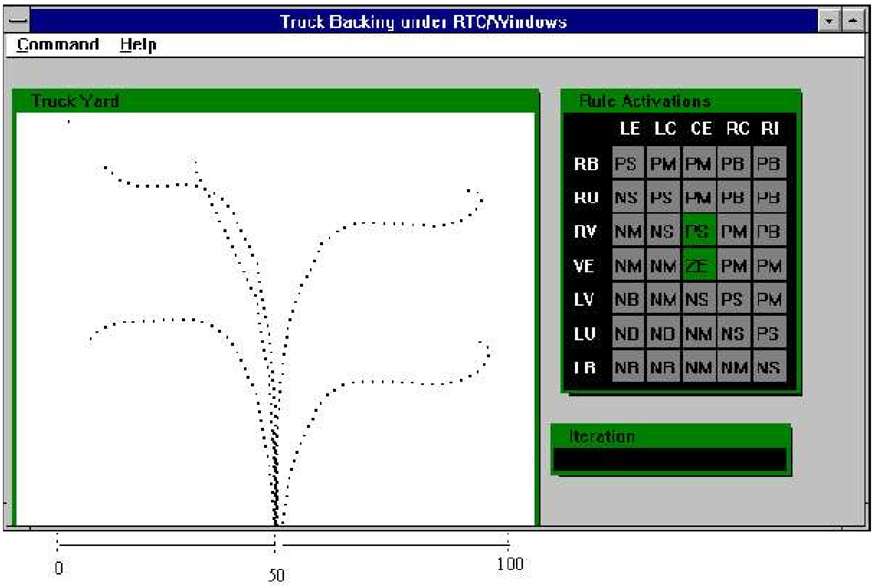


Рис. 6.35. Моделювання ситуації в пакеті CubiCalc.

Розглянемо, як таку задачу вирішує CubiCalc. По-перше, визначимо змінні, якими будемо оперувати. Для цього використаємо меню PROJECT/VARIABLES. На вході заміряємо «азимут вантажівки відносно воріт» (у градусах, 0.360) і її «зміщення відносно осі воріт» (у метрах, 0.100). Цільова функція – відхилення керма, причому таке, що на в'їзді до воріт вантажівка повинна рухатися строго уздовж їх осі. Тому на виході задаємо змінну «поворот керма» в градусах (- 30.+30). Оскільки, як вже було сказано, нам важливі принципи, для кожної змінної визначимо ряд нечітких розподілів, відповідним поняттям «лівіше-правіше» для азимута, відхилення керма і зміщення відносно воріт

В меню PROJECT/ADJECTIVES FOR це виглядатиме так:

- для азимута (мається на увазі, що азимут 90 градусів відповідає напряму на ворота) (рис. 6.36).

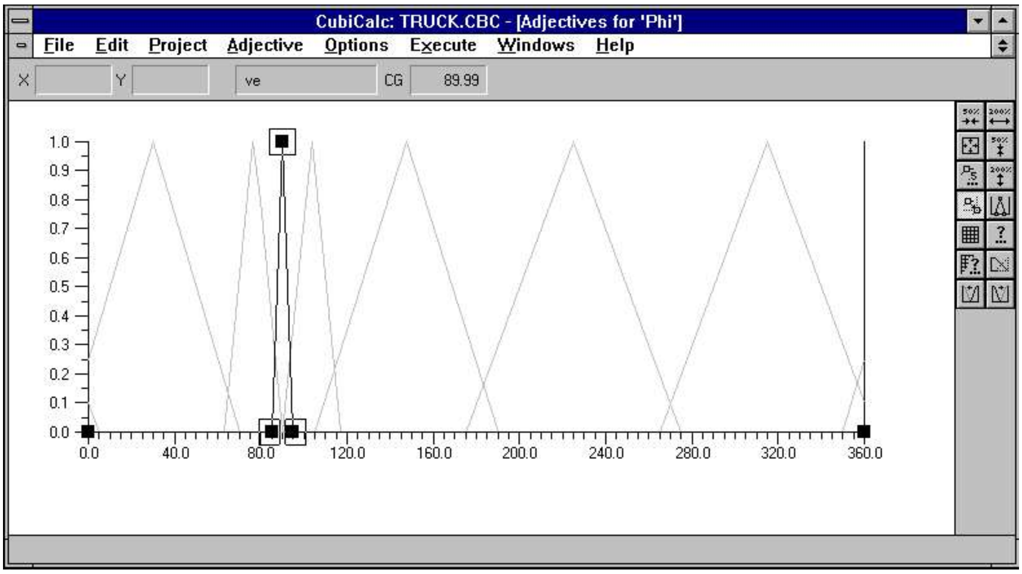


Рис. 6.36. Задання азимуту в пакеті CubiCalc.

Як видно зі схеми, всі значення, які лежать між 85 і 95 градусами азимута, відповідають критерію «точно прямо». Тут же описані розподіли значень азимута, відповідні критеріям «лівіше, вліво, глибоко вліво; правіше, вправо, глибоко вправо». Для кожного розподілу задається своя внутрішня (temporary) змінна – вони знадобляться пізніше, для створення правил.

- Для зміщення відносно воріт (мається на увазі, що значення 0.49 м відповідають «ліво», 51.100 м – «право». Значення 50 м- відповідає критерію «точно у ворота» (рис. 6.37).

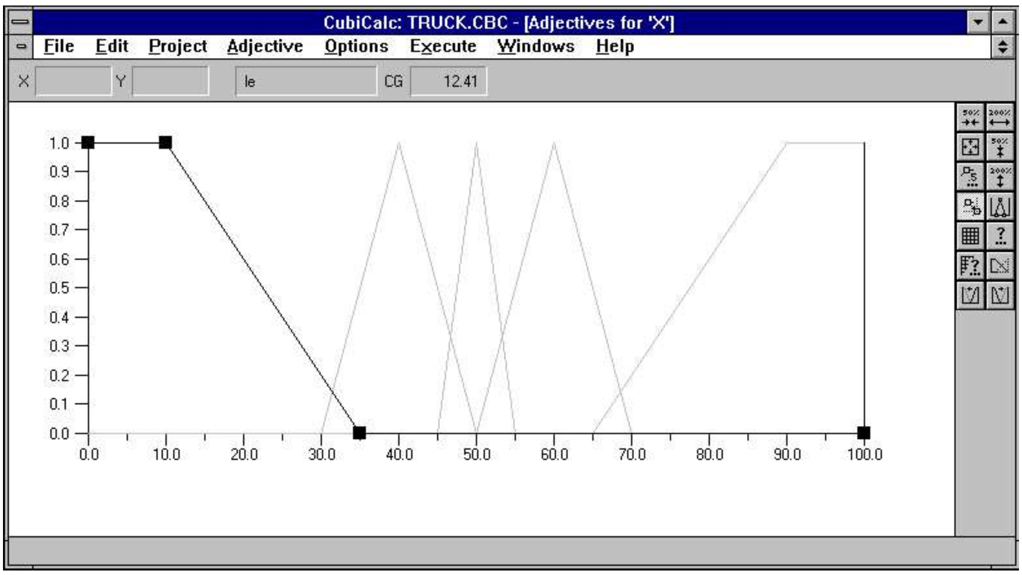


Рис. 6.37. Задання змінної «зміщення відносно воріт».

• для повороту керма (+/- 30 градусів) (рис. 6.38).

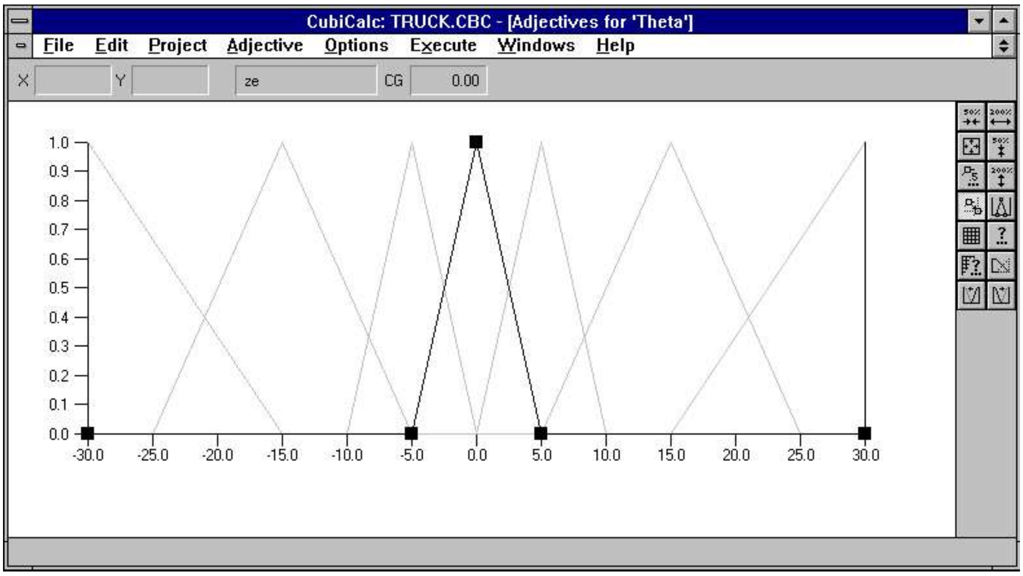


Рис. 6.38. Задання змінної «поворот керма».

Далі в меню PROJECT/VARIABLES задаємо: проміжні змінні (кожному нечіткому критерію «лівіше», «правіше» і тому подібне задається своя змінна); константи, що використовуються при розрахунках (в даному випадку – швидкість) (рис. 6.39).

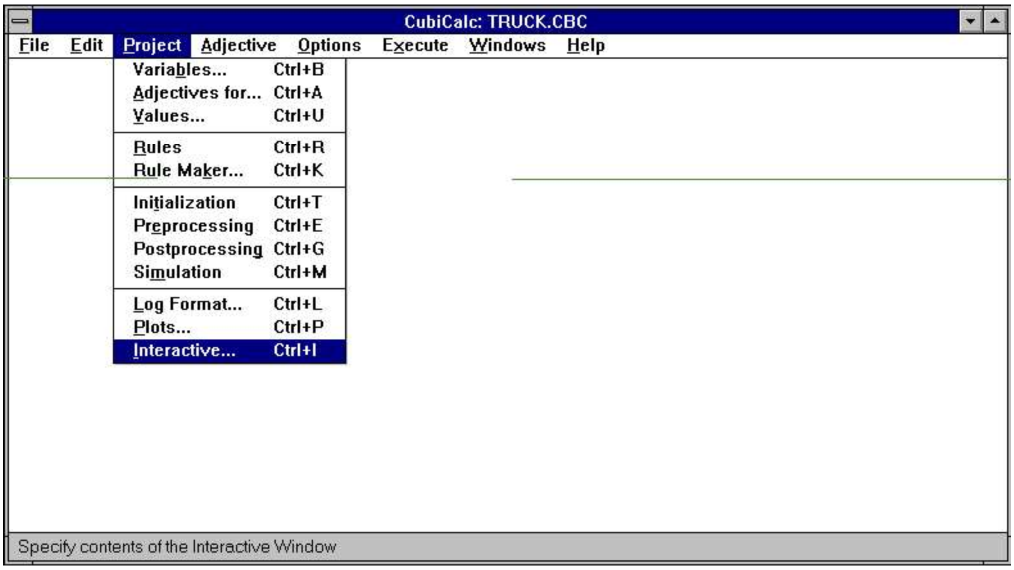


Рис. 6.39. Задання даних в меню PROJECT/VARIABLES.

Застосовуя меню PROJECT/INITIALIZATION, виконаємо ініціалізацію системи (параметри запуску), в даному випадку – випадкове розташування вантажівки у дворі, а за допомогою меню PROJECT/PREPROCESSING ../POSTPROCESSING, ../SIMULATION - відповідно, передобчислювання (до роботи Fuzzy - частини системи), постобчислення і проміжні обчислення. Меню PROJECT/LOG FORMAT ../PLOT, ../INTERACTIVE дозволяє задавати змінні, значення яких спостерігаються в процесі роботи, побудову значень вказаних змінних в графічному вигляді, управління значеннями змінних в процесі роботи.

Особливо слід сказати про меню PROJECT/RULES. Правила (у нашому сенсі - принципи) роботи системи виглядають таким чином (рис. 6.40).

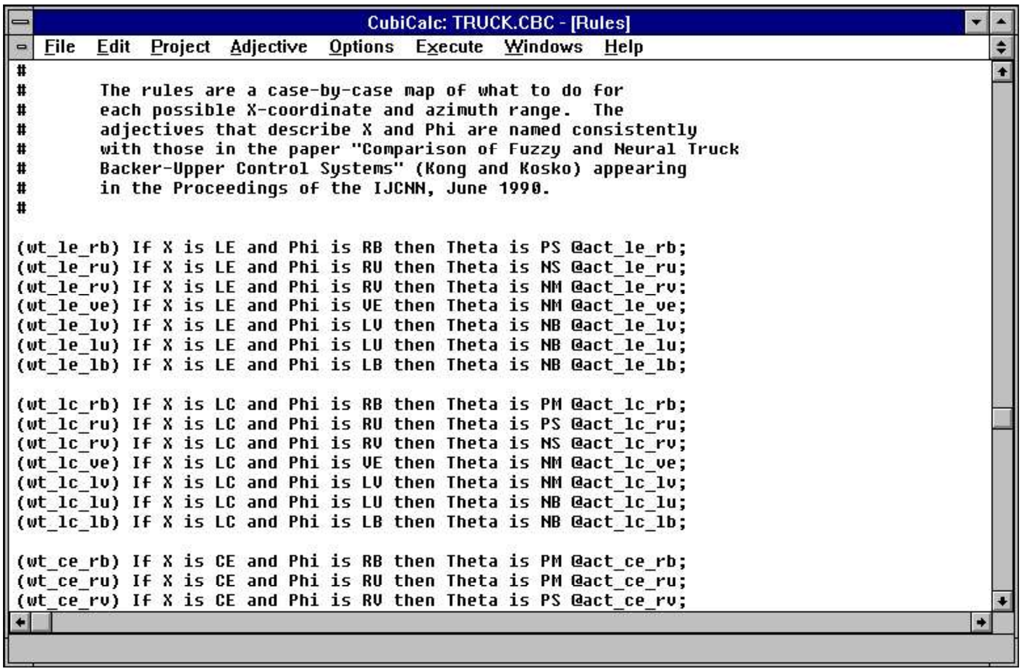


Рис. 6.40. Правила в меню PROJECT/RULES.

Як видно з малюнка 6.40, правила задаються у формі, інтуїтивно зрозумілій користувачеві: “**якщо** змінна X має значення Y (і/або змінна Z має значення F, і/або …) **то** змінна A набуває значення B, **інакше** змінна A набуває … і так далі. Наприклад, «**якщо** ніс вантажівки дивиться **вліво** і сама вантажівка знаходиться **лівіше** відносно воріт, то треба повернути кермо **глибоко вправо** і просунутися на наступний крок». Тобто виконується стандартна схема «якщо –

то – інакше». Для автоматичної побудови правил існує опція RULEMAKER. На останок в меню EXECUTE можна запустити отриману систему в безперервному або циклічному режимі і вивести додатковий екран для управління системою.

Отже, задача управління вантажівкою вирішена. Часу на її рішення було потрібно мало. Складність полягає в тому, аби правильно формалізувати потік даних і виділити в ньому змінні. Слід зазначити, що за допомогою CubiCalc успішно вирішуються задачі динамічного управління у фінансовому плануванні, технологічні процеси, моделювання складних наочних областей з параметрами, що якісно змінюються, порівняльно-оцінні задачі.

Для формалізації даних і виявлення правил широкого поширення набула програма Rule Maker для CubiCalc. Це є додаток до пакету CubiCalc. Її призначення – обробка масивів даних, виділення в масивах груп даних по деяких ознаках (кластеризація), виявлення зв'язків між виділеними групами (побудова правил). Оскільки границі кластерів задаються нечітко, можливі альтернативні висновки з вказівкою мірі їх достовірності, тобто операція за критеріями «краще-гірше”», «можливо» і так далі (рис. 6.41)

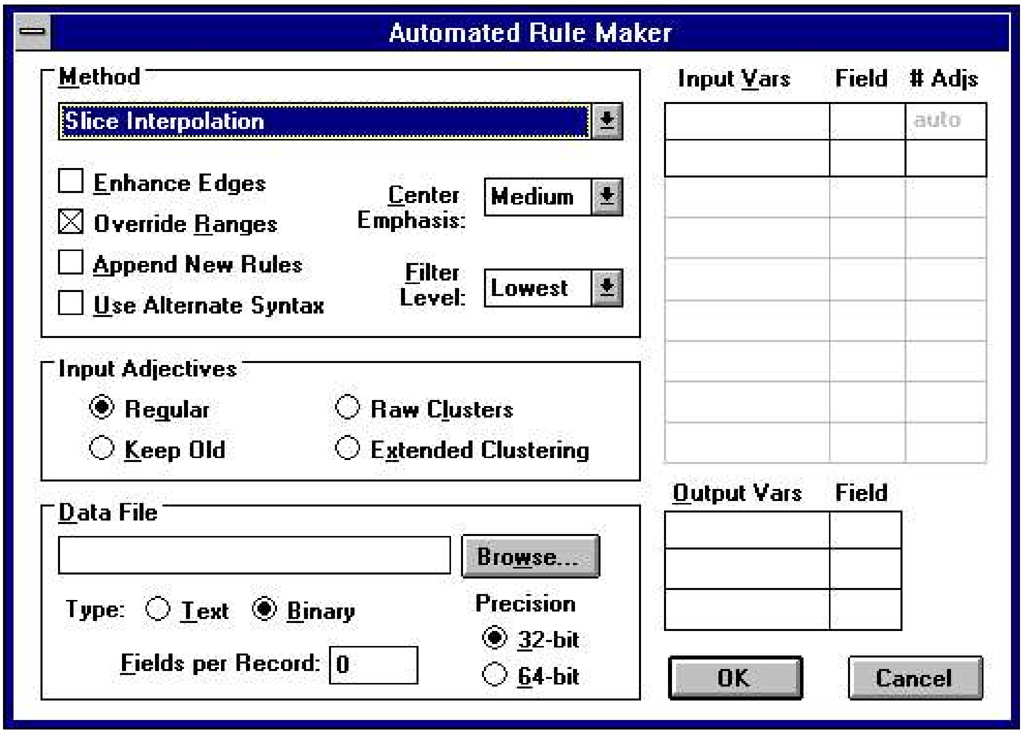


Рис. 6.41. Вигляд робочої області програми.

Задача знаходження правил вирішується в два прийоми:

1. *Кластеризація даних*. Термін «кластер» точно трактується як «точка концентрації». Тобто під кластеризацією в даному випадку розуміється знаходження областей (діапазонів значень), де співвідношення «вхід-вихід» зустрічається найчастіше. Ці діапазони описуються як fuzzy-змінні відповідно для входів і виходів. Оскільки границі кластерів описуються нечітко, це дозволяє відразу задавати деяку точність обчислень.

2. *Виявлення кореляційних залежностей між вхідними і вихідними значеннями*. Відмінність від класичного методу в тому, що кореляції шукаються і обчислюються не між змінами даних, а між змінами у межах знайдених кластерів. Результат виражається в наборі правил, що відображається в меню RULES. Тобто система знову ж таки оперує на рівні принципів поведінки об'єкту. На рисунку 6.42 показано, як працює механізм кусочно-лінійної інтерполяції функції при представленні її програмою Rule Maker. Також можливий механізм згладженої інтерполяції.

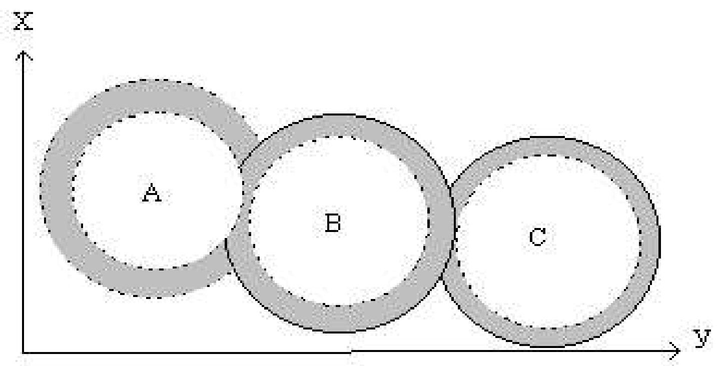


Рис. 6. 42. Механізм інтерполяції в Rule Maker.

На принципах нечіткої алгебри побудований ще один програмний продукт «Бізнес-прогноз». Призначення цього пакету - оцінка ризиків і потенційної прибутковості різних бізнес-планів, інвестиційних проектів і просто ідей по розвитку бізнесу. «Ведучи» користувача за сценарієм його задуму, програма задає низку запитань, що допускають як точні кількісні відповіді, так і наближені якісні оцінки, - типа «малоймовірно», «міра ризику висока» і так далі. Узагальнивши всю отриману інформацію у вигляді єдиної схеми бізнес-проекту, програма не лише виносить остаточний вердикт про ризикованість проекту і очікуваних прибутках, але і вказує критичні точки і слабкі місця в авторському задумі. Від аналогічних іноземних пакетів «Бізнес-прогноз» відрізняється простотою і дешевизною.

Механізми нечітких обчислень представлені у вже відомому пакеті PolyAnalyst, зокрема, модуль Classify (CL) - класифікатор на основі нечіткої логіки. Алгоритм CL призначений для класифікації записів на два класи. У основі його роботи лежить побудова функції приналежності і знаходження порогу розділення на класи. Функція приналежності набуває значень від окресності 0 до окресності 1. Якщо повертаємо значення функції для даного запису більше порогу, то цей запис належить до класу «1», якщо менше, то до класу «0» відповідно. Цільова змінна для цього модуля має бути логічного типа (рис. 6.43).

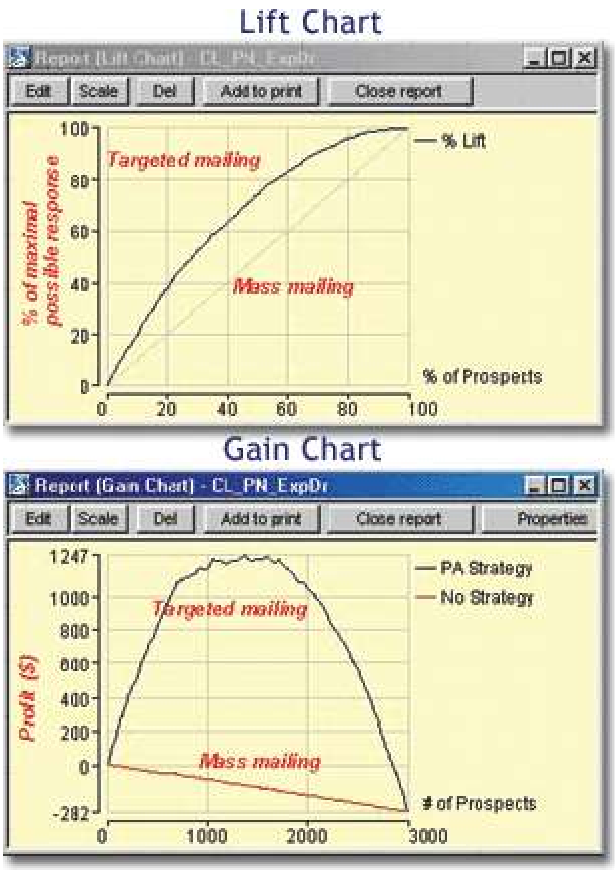


Рис. 6.43. Нечітка логіка в PolyAnalyst.

Алгоритм Discriminate (дискримінація) є модифікацією алгоритму CL. Він призначений для того, щоб з'ясувати, чим дані з вибраної таблиці відрізняються від останніх даних, включених в проект, іншими словами для виділення специфічних рис, що характеризують деяку підмножину записів проекту. На відміну від алгоритму CL, він не вимагає задання цільової змінної, досить вказати лише таблицю, для якої потрібно знайти відмінності.

Японський промисловий концерн Toshiba розробив новий програмний продукт Enfant (ENhanced Fuzzy And Neuro Tool), заснований на принципах нечіткої логіки. Структура базового блоку програми Enfant - т.з. Item (об'єкт, елемент) дозволяє будувати будь-які мережеві конструкції - семантичні і нейронні мережі, багатокаскадні управляючи комплекси і так далі. Річ у тому, що в структурі Item реалізована ідея універсального оброблювального елементу. Він здатний пропускати через себе два інформаційні потоки - прямий (Forward) і зворотний (Backward). При цьому вхідний потік, проходячи через Item, модифікується відповідно до поточного налаштування внутрішньої структури елементу, а зворотний потік, навпаки, може цю структуру міняти. Фахівці з нейронних мереж вже, ймовірно, взнали в подобі Item базову цеглинку для реалізації класичного нейромережевого алгоритму навчання back-propagation, а фахівці з теорії управління - універсальний контур зворотного зв'язку. А при чому тут нечітка логіка? Річ у тому, що до складу бібліотеки базових класів Enfant ENCL (Enfant Class Library) входять всі основні функції нечіткої логіки і нечіткої алгебри, а також можливості будь-якого комплексированія базових елементів. Пакет дозволяє будувати всілякі системи інтелектуального аналіза даних, управління, підтримки ухвалення рішень та ін. Ці системи можуть бути використані в освіті, дослідницьких роботах, моделюванні складних систем, створенні прототипів нових інтелектуальних пакетів.

Важливим елементом практичного впровадження теорії нечітких множин є можливість формування нечітких запитів до баз даних. Механізми нечітких запитів (fuzzy queries, flexible queries) до реляційних баз даних були вперше запропоновані в 1984 році і згодом отримали розвиток в роботах Д. Дюбуа и Г. Прада.

Велика частина даних, що обробляються в сучасних інформаційних системах, носять чіткий, числовий характер. Проте в запитах до баз даних, які намагається формулювати людина, часто присутні неточності і невизначеності. Не дивно, коли на запит в пошуковій системі Інтернету користувачеві видається множина посилань на документи, впорядковані по мірі релевантності запиту. Тому що текстовій інформації спочатку властива нечіткість і невизначеність, причинами якої є семантична неоднозначність мови, наявність синонімів і так далі. З базами даних інформаційних систем, або з чіткими базами даних ситуація інша. Нечіткі запити неможливо виконати засобами мови SQL.

Продемонструємо обмеженість чітких запитів на наступному прикладі. Хай потрібно отримати відомості про менеджерів по продажах не старше 25 років, в яких сума річних операцій перевищила 200 тис. грн. по такому-то регіону. Даний запит можна записати на мові SQL таким чином:

Select FIO from Managers

where (Managers.Age <= 25 AND Managers.Sum > 200000 AND

Managers.RegionID = 1)

Менеджер по продажах 26 років з річною сумою продажів в 400 тис. грн., або 19 років з сумою в 198 тис. грн. не попадуть в результат запиту, хоча їх характеристики майже задовольняють вимогам запиту. Нечіткі запити допомагають впоратися з подібними проблемами «пропажі» інформації.

Механізм роботи нечітких запитів заснований на теорії нечіткої множини. Формалізуємо нечітке поняття «Вік співробітника компанії». Це буде назва відповідною лінгвістичною змінною. Задамо для неї область визначення X=[18, 70], три лінгвістичні терми – «Молодий», «Середній», «Вище середнього» і побудуємо функції приналежності для кожного лінгвістичного терма. Для цього виберемо трапецеїдальні функції приналежності з наступними координатами: «Молодий»=[18, 18, 28, 34], «Середній»=[28, 35, 45, 50], «Вище середнього»=[42, 53, 60, 60] (рис. 6.44).

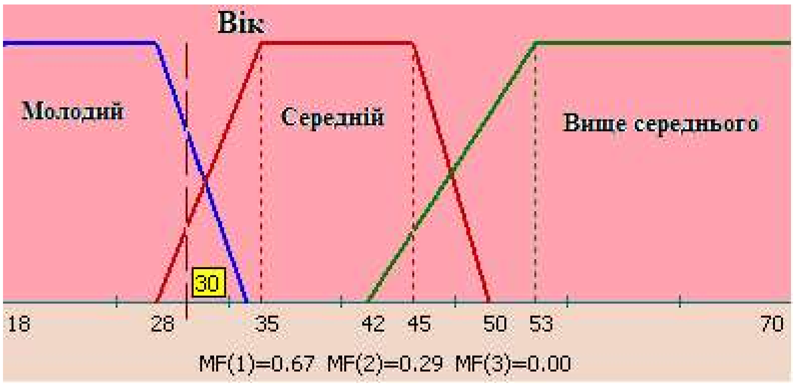


Рис. 6.44. Лінгвістична змінна «Вік».

Тепер можна обчислити міру приналежності співробітника 30 років до кожної з нечіткої множин: MF[Молодий](30)=0,67; MF[Середній](30)=0,29; MF[Вище середнього](30)=0.

Повернемося до прикладу з менеджерами по продажам. Для простоти передбачимо, що вся необхідна інформація знаходяться в одній таблиці з наступними полями: ID – номер співробітника, AGE – вік і SUM (річна сума операцій).

ID	AGE	SUM
1	23	120 500
2	25	164 000
3	28	398 000
4	31	489 700
5	33	251 900
…		

Визначимо ще одну лінгвістичну змінну для поля SUM з областю визначення X=[0, 600000], термами «Мала», «Середня» і «Велика» і побудуємо для них функції приналежності (рис. 6.45):
«Мала»=[0, 0, 0, 200000], «Середня»=[90000, 180000, 265000, 330000], «Велика»=[300000, 420000, 600000, 600000].

Рис. 6.45. Лінгвістична змінна «Річна сума операцій».

До такої таблиці можна робити нечіткі запити. Наприклад, отримати список всіх молодих менеджерів по продажах з великою річною сумою операцій, що на SQL запишеться так:

*Select * from Managers where (Age = «Молодий» AND Sum = «Велика»).*

Розрахувавши для кожного запису агреговане значення функції приналежності MF, отримаємо результат нечіткого запиту:

ID	AGE	SUM	MF
3	28	398 000	0,82
4	31	489 700	0,50

Записи 1, 2, 5 не попали в результат запиту, оскільки для них значення функції приналежності дорівнює нулю. Записів, що точно задовольняють поставленому запиту (MF=1), в таблиці не знайшлося. Менеджер по продажах 28 років і річною сумою 398000 відповідає запиту з функцією приналежності 0,82. На практиці зазвичай вводять порогове значення функції приналежності, при перевищенні якого записи включаються в результат нечіткого запиту.

Використовуючи нечіткі модифікатори, можна формувати і складніші запити:

*Select * from Managers where (Age = «<Більш-меньш Середній» AND Sum = «Середня»).*

Результат:

ID	AGE	SUM	MF
5	33	251 900	0,85

Часто потрібно оперувати не лінгвістичними змінними, а нечіткими аналогами точних значень. Для цього існує нечітке відношення «БІЛЯ» (наприклад, «Ціна близько 20»). Для реалізації подібних нечітких відношень аналогічно будується нечітка множина з відповідною функцією приналежності, але вже на деякому відносному інтервалі (наприклад [-5, 5]) для уникнення залежності від контексту. При обчисленні функції приналежності нечіткого відношення «Біля Q» (Q – деяке чітке число) виконується масштабування на відносний інтервал.

Проілюструємо вищесказане на прикладі таблиці з даними про коштовні папери. Хай вона має в своєму складі наступні поля: PRICE (вартість коштовного паперу), RATIO (відношення ціни до прибутку, price-to-earnings ratio), AYIELD (усереднений дохід за останній квартал, average yield, %).

ID	**PRICE**	**RATIO**	**AYIELD**
1	260	11	15,0
2	380	5	7,0
3	810	6	10,0
4	110	9	14,0
5	420	10	16,0

Хай потрібно знайти коштовні папери для покупки не дорожче $150, з прибутковістю 15% і відношенням ціни прибутку 11. Це еквівалентно наступному SQL-запиту:

*Select * from some table where ((PRICE <= 150) AND (RATIO = 11) AND (AYIELD = 15)).*

Результат такого запиту буде порожнім. Тоді сформулюємо цей же запит в нечіткому вигляді з використанням відношення «БІЛЯ»:

*Select * from some table where ((PRICE = «Близько 150») AND (RATIO = «Близько 11») AND (AYIELD = «Близько 15»)).*

Побудуємо нечітку множину для відношення «БІЛЯ» у відносному інтервалі [-5, 5]. Це буде трапеція з координатами [-2, -1, 1, 2] (рис. 6.46).

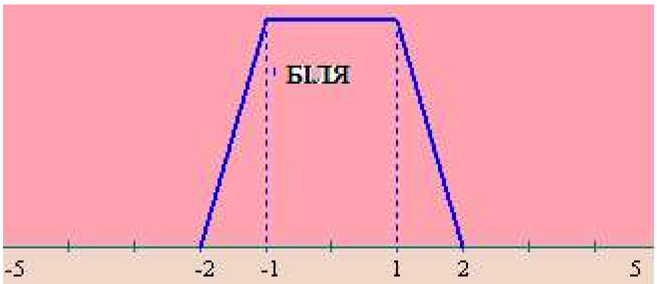


Рис. 6.46. Нечітка множина для відношення «Біля».

Розрахуємо значення нечіткого запиту «Ціна близько 250» для ціни 380. Заздалегідь задамо області визначення кожної лінгвістичної змінної: PRICE – [0, 1000], RATIO – [0, 20], AYIELD – [0, 20]. Значення 130 (отримане як різниця між 380 і 250) відмасштабуємо на інтервал [-5, 5], отримаємо величину x=1,3 і MF(1,3)=0,7. Застосувавши нечітке відношення «БІЛЯ» до кожного поля PRICE, RATIO і AYIELD і розрахувавши агреговане значення функції приналежності за допомогою операції нечітке «І», отримаємо наступний результат запиту:

ID	PRICE	RATIO	AYIELD	MF
1	260	11	15,0	1
4	110	9	14,0	0,9

Нечіткі запити перспективно використовувати в областях, де здійснюється вибір інформації з баз даних з використанням якісних критеріїв і нечітко сформульованих умов, наприклад, Direct Marketing. У прямому маркетингу дуже важливий етап виділення цільовій аудиторії, для якої застосовуватимуться різні інструменти Direct Marketing. Наприклад, це пряма поштова реклама (direct mail), що використовується при просуванні товарів і послуг організаціям і приватним особам. Проте для здобуття максимального ефекту від direct mail необхідний ретельний вибір адресатів. Якщо відбір адресатів буде ліберальним, то зростуть невиправдані витрати на прямий маркетинг, якщо дуже строгим – буде втрачений ряд потенційних клієнтів. Наприклад, компанія проводить рекламну акцію серед своїх клієнтів про нові послуги за допомогою прямої поштової розсилки. Служба маркетингу встановила, що найцікавіший новий вигляд послуги буде чоловікам середніх років, батькам сімейств з річним доходом вище середнього. Для здобуття списку адресатів до бази даних клієнтів, швидше за все, буде зроблений наступний запит: «вибрати всіх осіб чоловічої статі у віці від 40 до 55 років, що мають мінімум 1 дитину, річний дохід від 20 до 30 тисяч дол.». Такі точні критерії запиту можуть відсіяти множину потенційних клієнтів: чоловік 39 років, батько трьох дітей з доходом в 31 тисяча не попаде в результат запиту, хоча це потенційний споживач нової послуги.

Аналогічним чином нечіткі запити можна використовувати при виборі туристичних послуг, підборі об'єктів нерухомості. Інструмент нечітких запитів дозволяє погоджувати формальні критерії і неформальні вимоги до круга потенційних клієнтів і задавати інтервали вибору потенційних клієнтів як нечітку множину. В такому разі клієнти, що не задовольняють якомусь одному критерію, можуть бути вибрані з бази даних, якщо вони мають хороші показники по інших критеріях.

Потужним засобом для практичного впровадження нечітких обчислень є *Fuzzy Logic Toolbox*, пакет прикладних програм, що входить до складу середовища MatLab. Він дозволяє створювати системи нечіткого логічного виводу і нечіткої класифікації в рамках середовища MatLab, з можливістю їх інтеграції в Simulink. Базовим поняттям Fuzzy Logic Toolbox є FIS-структура - система нечіткого виводу (Fuzzy Inference System). FIS-структура містить всі необхідні дані для реалізації функціонального відображення «входи-виходи» на основі нечіткого логічного виводу згідно певної схеми (рис. 6.47).

Fuzzy Logic Toolbox містить наступні категорії програмних інструментів:

- функції;
- інтерактивні модулі з графічним користувацьким інтерфейсом;
- блоки для пакету Simulink;
- демонстраційні приклади.

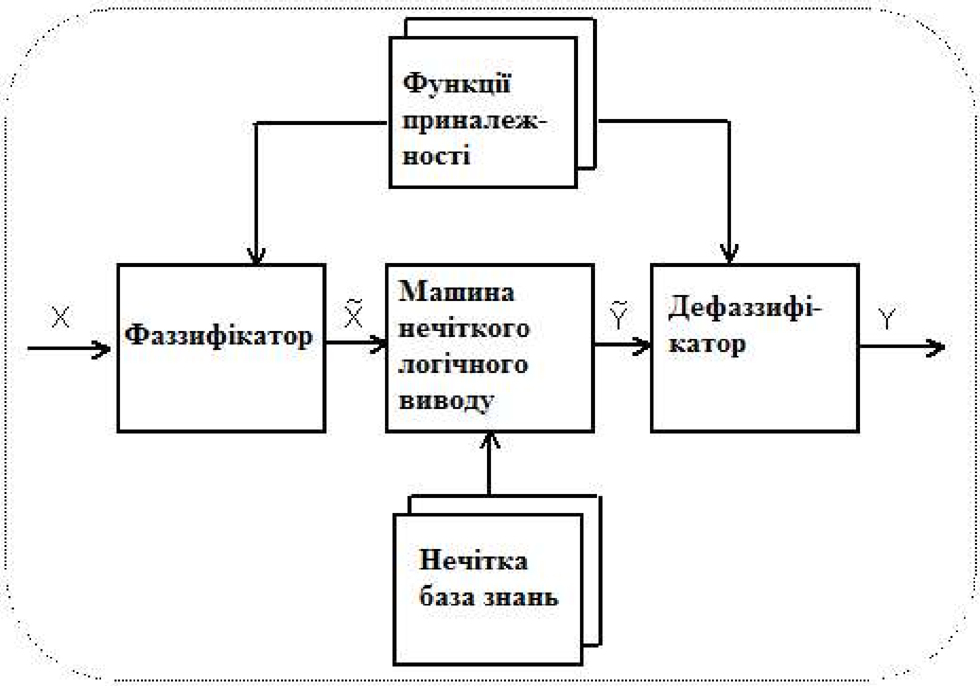


Рис. 6.47. Нечіткий логічний вивід.

Модуль Fuzzy дозволяє будує нечіткі системи двох типів - Мамдані і Сугено. У системах типа Мамдані база знань складається з правил вигляду «Якщо $x_1 =$низький і $x_2 =$середній, то $y=$високий». У системах типа Сугено база знань складається з правил вигляду «Якщо $x_1 =$низький і $x_2 =$середній, то $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$». Таким чином, основна відмінність між системами Мамдані і Сугено полягає в різних способах задання значень вихідної змінної в правилах, які створюють базу знань. У системах типа Мамдані значення вихідної змінної задаються нечіткими термами, в системах типа Сугено - як лінійна комбінація вхідних змінних.

Проектування систем типу Мамдані виконується таким чином:

- задаємо функції приналежності змінної x_1 (рис. 6.48);
- задаємо функції приналежності змінної x_2 (аналогічно);
- задаємо функції приналежності змінної y;
- на основі візуального спостереження за графіком формулюємо правила і вводимо їх в базу знань (рис. 6.49);
- виконуємо візуалізацію нечіткого логічного виводу.

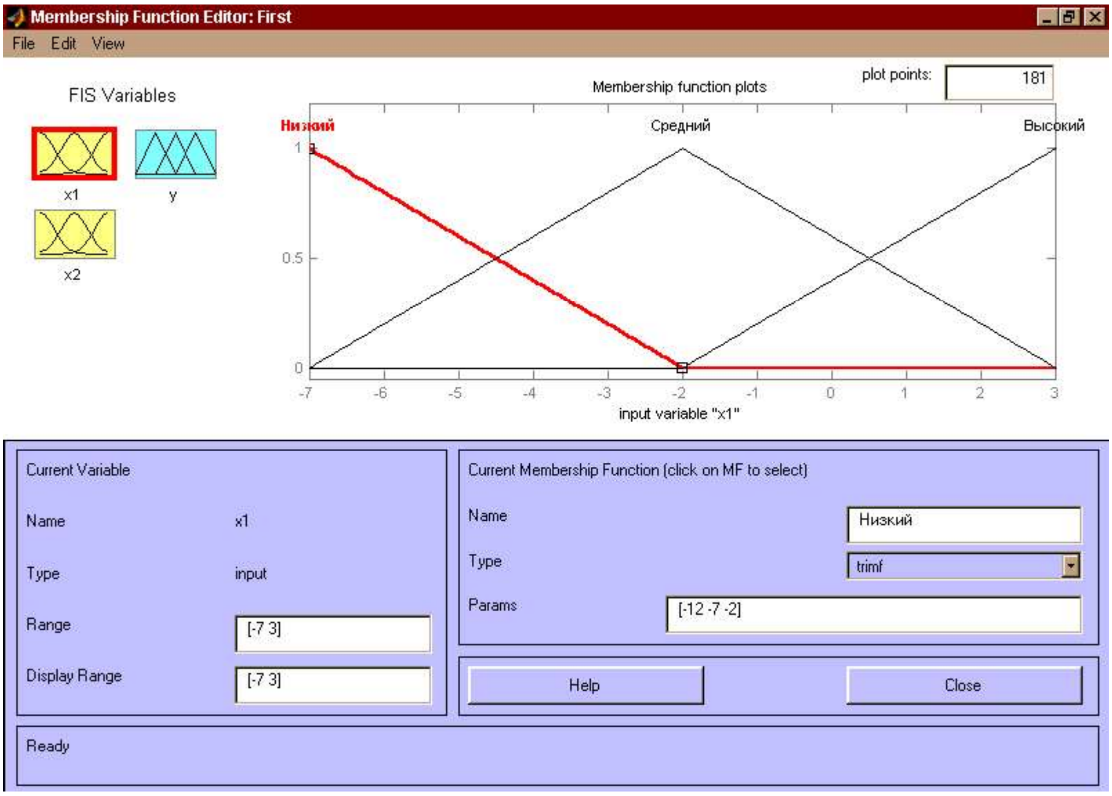


Рис. 6.48. Функції приналежності змінної x_1.

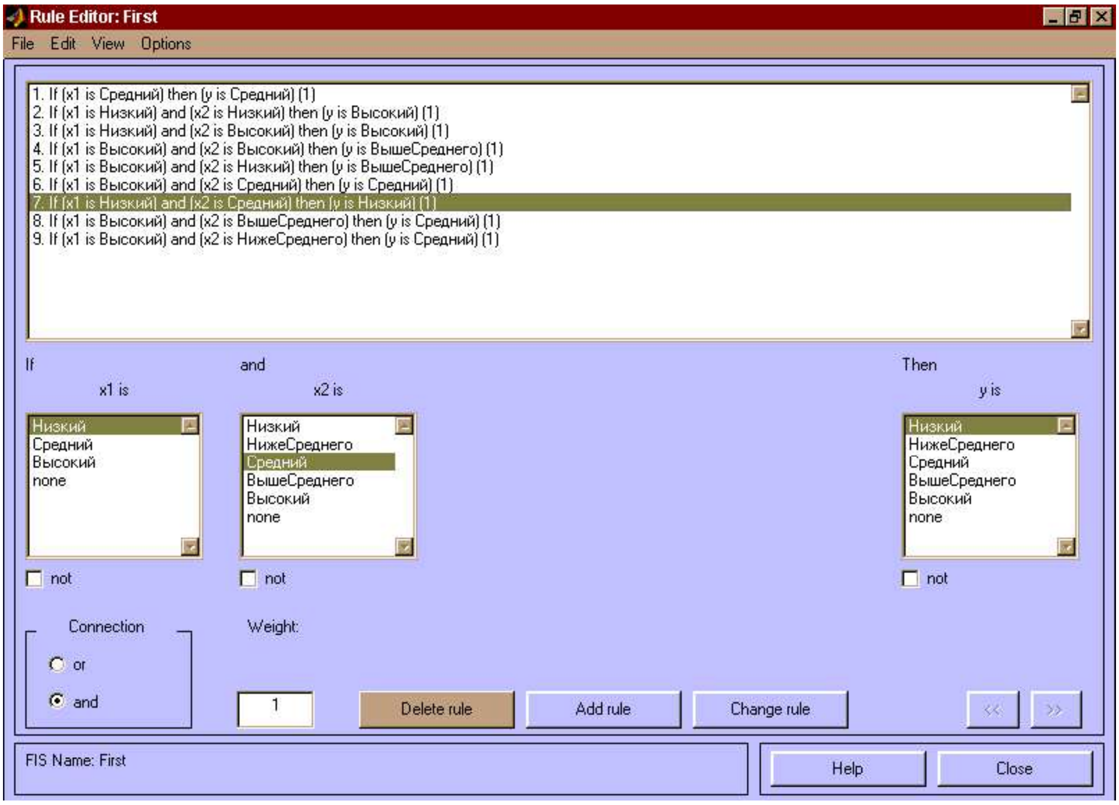


Рис.. 6.49. База знань в RuleEditor.

6.4. Сучасна практика застосування нечітких методів

Найбільш вражаючою властивістю людського інтелекту є здатність приймати правильні рішення в обстановці неповної і нечіткої інформації. Побудова моделей наближених до міркувань людини і використання їх в комп'ютерних системах майбутніх поколінь представляє сьогодні одну з найважливіших проблем науки. Зміщення центру досліджень нечітких систем у бік практичних застосувань привів до постановки цілого ряду проблем таких, як створення нечітких систем інтелектуального аналізу даних, нечіткого фінансового менеджменту, інструментальних засобів розробки, методів розрахунку і розробки нечітких систем управління і багато що інше. Розглянемо деякі з таких проблем [23, 27, 28, 77].

Прийняття рішень в нечітких умовах. У 1970 році Беллман і Заде опублікували статтю «Decision - Making in Fuzzy Environment», яка послужила відправною точкою для більшості робіт по нечіткій теорії прийняття рішень. У тій роботі розглядається процес прийняття рішень в умовах невизначеності, коли цілі і обмеження задані нечіткою множиною. Прийняття рішення - це вибір альтернативи, яка одночасно задовольняє і нечітким цілям, і нечітким обмеженням. У цьому сенсі, цілі і обмеження є симетричними відносно рішення, що стирає відмінності між ними і дозволяє представити рішення як злиття нечітких цілей і обмежень.

Хай $X = \{x\}$ - множина альтернатив. Нечітку мету $\widetilde{G}$ ототожнюватиме з нечіткою множиною $\widetilde{G}$ в X. Наприклад, якщо альтернативами є дійсні числа, тобто $X = R$, а нечітка мета сформульована як «x має бути близько 10», то її можна представити нечіткою множиною з такою функцією приналежності

$$\mu_G(x) = \frac{1}{1 + (x - 10)^2}$$

Аналогічним чином нечітке обмеження $\widetilde{C}$ визначається як деяка нечітка множина на універсальній множині X. Наприклад, нечітке обмеження «x має бути значно більше 8» при $X = R$ можна представити нечіткою множиною з такою функцією приналежності

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, x < 5 \\ \dfrac{1}{1 + \exp(-0.8(x-8))}, x \geq 5 \end{cases}.$$

Нечітке рішення $\widetilde{D}$ також визначається як нечітка множина на універсальній множині альтернатив X. Функція приналежності цієї нечіткої множини показує наскільки добре рішення задовольняє нечітким цілям «І» обмеженням. Логічній операції «І», яка зв'язує цілі і обмеження, відповідає операція пересічення нечітких множин. Отже, рішення - це пересічення нечіткої мети з нечітким обмеженням

$$\widetilde{D} = \widetilde{G} \cap \widetilde{C}.$$

Приклад. Нечітка мета $\widetilde{G}$ і нечітке обмеження $\widetilde{C}$ сформульовані так:

$\widetilde{G}$: «x має бути близько 10» та $\widetilde{C}$: «x має бути значно більше 8».

Функції приналежності нечітких множин $\widetilde{G}$ і $\widetilde{C}$ задані вищеприведеними виразами. Необхідно знайти нечітке рішення $\widetilde{D}$.

Нечітке рішення $\widetilde{D}$ знайдемо як операцію пересічення вказаних нечітких множин. Враховуючи, що пересіченню нечітких множин відповідає операція мінімуму над функцією приналежності, отримуємо

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0, x < 5 \\ \min\left(\dfrac{1}{1 + \exp(-0.8(x-8))}, \dfrac{1}{1 + (x-10)^2}\right), x \geq 5 \end{cases}.$$

Взаємозв'язок між нечіткими метою, обмеженням і рішенням показана на рис. 6.50. Мета і обмеження конфліктують між собою, тому в нечіткій множині $\widetilde{D}$ немає жодного елементу з мірою приналежності рівною 1. Значить, не існує альтернативи, яка повністю задовольняє і меті, і обмеженню. Як чітке рішення в таких випадках зазвичай вибирають альтернативу з максимальною мірою приналежності нечіткій множині $\widetilde{D}$.

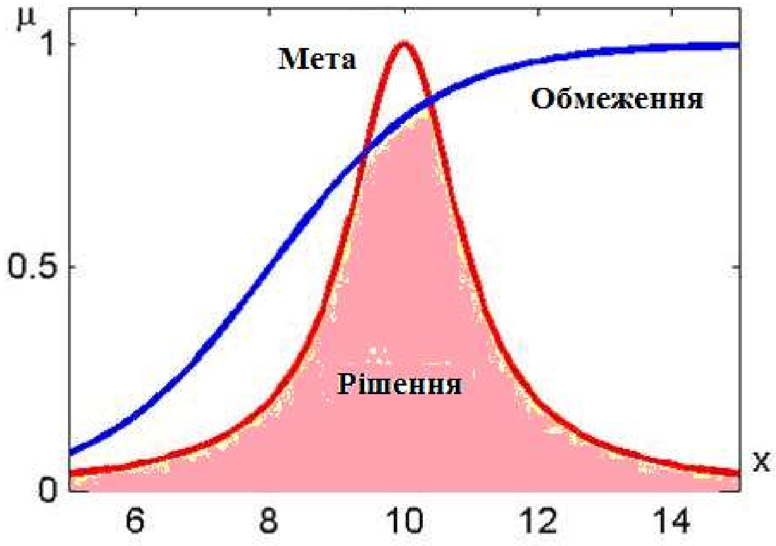


Рис. 6.50. Взаємозв’язок між нечіткими множинами.

При прийнятті рішень за схемою Беллман - Заде не робиться жодної відмінності між метою і обмеженнями. Всяке розділення на мету і обмеження є умовним. Можна поміняти місцями мету з обмеженням, при цьому рішення не зміниться. У традиційній теорії прийняття рішень подібні заміни функції переваги на обмеження недопустимі. Проте, і тут прослідковується деяка прихована схожість між цілями і обмеженнями. Вона стає явним при використанні методу невизначених множників Лагранжа і штрафних функцій, коли мета і обмеження об'єднуються в одну функцію. У загальному випадку, коли є n цілей і m обмежень, результуюче рішення за схемою Беллмана - Заде визначається пересіченням всіх цілей і обмежень $\widetilde{D} = \widetilde{G}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{G}_n \cap \widetilde{C}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{C}_m$, і відповідно $\mu_D = \mu_{G_1} \cap \ldots \cap \mu_{G_n} \cap \mu_{C_1} \cap \ldots \cap \mu_{C_m}$.

До цих пір передбачалося, що всі цілі і обмеження, що входять в $\widetilde{D}$, мають однакову важливість. Звичніше ситуація, в якій задоволення одним цілям і (або) обмеженням, важливіше чим іншим. Позначимо через $\alpha_i \in [0,1]$ - коефіцієнт відносної важливості і-ої цілі, а через $\beta_j \in [0,1]$ - коефіцієнт відносної важливості j-го обмеження $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$. Тоді функція приналежності рішення визначається так

$$\mu_D = (\mu_{G_1})^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge (\mu_{G_n})^{\alpha_n} \wedge (\mu_{C_1})^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge (\mu_{C_m})^{\beta_m} .$$

Чим менше коефіцієнт відносної важливості, тим відповідна нечітка множина мети або обмеження стає більш розмазаною, і, отже, її роль в прийнятті рішення знижується. На рис. 6.51 приведені нечіткі рішення при різних коефіцієнтах важливості мети і обмеження.

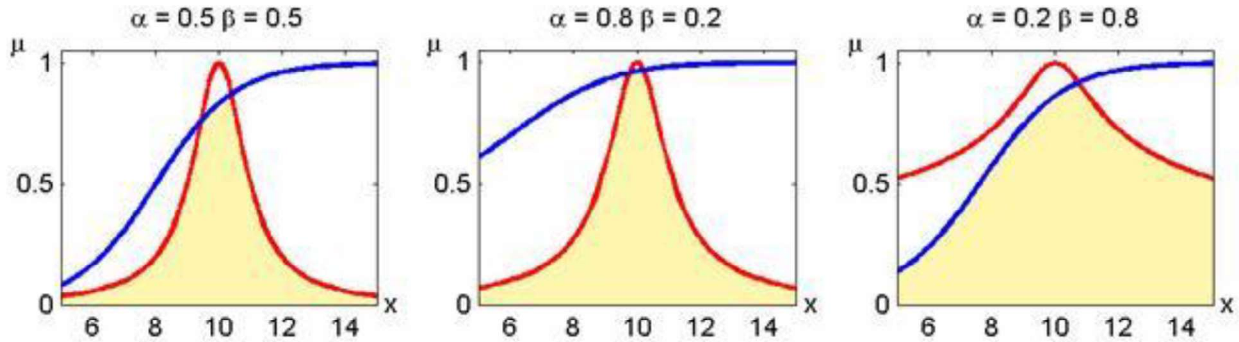


Рис. 6.51. Прийняття рішень при різній важливості мети і обмеження.

Важливою частиною нечіткого прийняття рішень є можливість проведення нечіткого багатокритеріального аналізу варіантів. Вважатимемо відомими

$X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ - множина варіантів, які підлягають багатокритеріальному аналізу;

$G = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$ - множина кількісних і якісних критеріїв, якими оцінюються варіанти.

Задача багатокритерійного аналізу полягає у впорядковуванні елементів множини X по критеріях з множини G.

Будемо вважати, що $\mu_{G_i}(x_j)$ - число в діапазоні [0,1], яке характеризує рівень оцінки варіанту $x_j \in X$ по критерію $G_i \in G$: чим більше число $\mu_{G_i}(x_j)$, тим вище оцінка варіанту x_j по критерію G_i. Тоді критерій G_i можна представити у вигляді нечіткої множини $\widetilde{G}_i$ на універсальній множині варіантів X

$$\widetilde{G}_i = \left\{ \frac{\mu_{G_i}(x_1)}{x_1}, \ldots, \frac{\mu_{G_i}(x_k)}{x_k} \right\}.$$

Знаходити ступені приналежності вищеприведеної нечіткої множини зручно *методом побудови функцій приналежності на основі парних порівнянь*. При використанні цього методу необхідно сформувати матриці парних порівнянь варіантів по кожному критерію. Загальна кількість таких матриць збігається з кількістю критеріїв і дорівнює n. Найкращим варіантом будемо той, який одночасно кращий по всіх критеріях. Нечітке рішення $\widetilde{D}$ знаходиться як пересічення приватних критеріїв

$$\widetilde{D} = \widetilde{G}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{G}_n = \left\{ \frac{\min \mu_{G_i}(x_1)}{x_1}, \ldots, \frac{\min \mu_{G_i}(x_k)}{x_k} \right\}$$

Згідно з отриманою нечіткою множиною $\widetilde{D}$, найкращим варіантом слід вважати той, для якого ступінь приналежності є найбільшою.

Розглянемо застосування нечіткого багатокритеріального аналізу на прикладі аналізу інноваційних проектів, зокрема, порівнянні техніко-економічного рівня трьох проектів (x_1, x_2, x_3), спрямованих до інноваційного фонду з метою отримання фінансування. Для оцінки техніко-економічного рівня проектів скористаємося такими критеріями:

G_1 - масштаб проекту;

G_2 - новизна проекту;

G_3 - пріоритетність напряму;

G_4 - ступінь опрацьовування;

G_5 - правова захищеність;

G_6 - екологічний рівень.

При експертному порівнянні проектів x_1, x_2, x_3 по критеріях $G_1, G_2, \ldots, G_6$ були отримані лінгвістичні вислови, показані в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2.

Парні порівняння проектів по шкалі Сааті.

Критерій	Парні порівняння
G_1	*Відсутність* переваги x_1 над x_2 *Істотна* перевага x_3 над x_1
G_2	*Майже істотна* перевага x_1 над x_3 *Слабка* перевага x_2 над x_3
G_3	*Істотна* перевага x_1 над x_2 *Явна* перевага x_1 над x_3
G_4	*Слабка* перевага x_2 над x_1 *Майже слабка* перевага x_3 над x_1
G_5	*Істотна* перевага x_1 над x_2 *Майже явна* перевага x_1 над x_3
G_6	*Майже істотна* перевага x_1 над x_2 *Майже слабка* перевага x_3 над x_1

Цим експертним висловам відповідають наступні матриці парних порівнянь:

$$A(G_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.2 \\ 1 & 1 & 0.2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad A(G_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1.35 & 4 \\ 0.75 & 1 & 3 \\ 0.25 & 0.33 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A(G_3) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0.2 & 1 & 1.4 \\ 0.14 & 0.71 & 1 \end{vmatrix}; \quad A(G_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0.33 & 0.5 \\ 3 & 1 & 1.5 \\ 2 & 0.67 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A(G_5) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0.2 & 1 & 1.2 \\ 0.17 & 0.83 & 1 \end{vmatrix}; \quad A(G_6) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0.5 \\ 0.25 & 1 & 0.13 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Застосовуючи отриману формулу до матрицями парних порівнянь, отримуємо наступну нечітку множину

$$\widetilde{G}_1=\left\{\frac{0.14}{x_1},\frac{0.14}{x_2},\frac{0.72}{x_3}\right\};\quad \widetilde{G}_2=\left\{\frac{0.5}{x_1},\frac{0.38}{x_2},\frac{0.12}{x_3}\right\};$$

$$\widetilde{G}_3=\left\{\frac{0.74}{x_1},\frac{0.15}{x_2},\frac{0.11}{x_3}\right\};\quad \widetilde{G}_4=\left\{\frac{0.17}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.33}{x_3}\right\};$$

$$\widetilde{G}_5=\left\{\frac{0.73}{x_1},\frac{0.15}{x_2},\frac{0.12}{x_3}\right\};\quad \widetilde{G}_6=\left\{\frac{0.31}{x_1},\frac{0.08}{x_2},\frac{0.61}{x_3}\right\}.$$

Згідно представленій теорії результат визначимо таким чином

$$\widetilde{D}=\left\{\frac{0.14}{x_1},\frac{0.08}{x_2},\frac{0.11}{x_3}\right\},$$

що свідчить про істотну перевагу проекту x_1 над проектом x_2, а також про слабку перевагу проекту x_1 над проектом x_3.

Концепція оцінки кредитоспроможності фізичних осіб. В даний час проблема своєчасного повернення кредитів, виданих фізичним особам, актуальна для більшості банківських установ. Її рішення значною мірою залежить від «якості» оцінки кредитоспроможності потенційних позичальників. У банківській сфері під кредитоспроможністю розуміється можливість і, що важливо, бажання контрагента виконувати зобов'язання по погашенню заборгованості. Найбільш достовірно це визначення відображає кредитна історія, тобто інформація про те, які кредити і в яких банках отримував позичальник, і як розплачувався по ним. У системі кредитування великої кількості банків, оцінка кредитної історії виконується експертом, який в основному спирається на свій досвід і інтуїцію, що може приводити до внесення в рішення суб'єктивних міркувань, що не мають достатніх підстав.

Зниження можливості впливу експерта на рішення і підвищення в ньому долі об'єктивних чинників може бути забезпечене формалізацією прогнозу поведінки позичальника і процедури ухвалення рішення про видачу кредиту. У зв'язку з цим актуальним є задача розробки уніфікованого підходу до оцінки кредитоспроможності фізичних осіб. Основою для впровадження подібної системи є кредитні історії, експертна оцінка яких є в значній мірі вербальним описом і внаслідок цього – нечітке. Одним із способів формалізації вербальних величин і перетворення їх в кількісні є застосування теорія нечітких множин Заде.

Розробка математичної моделі для аналізу якості виконання зобов'язань позичальника вимагає наявності адекватного формального представлення, яке б враховувало особливості кредитування фізичних осіб. Стосовно процесу оцінки кредитної історії лінгвістична змінна може бути задана у вигляді наступного набору: $\langle X, T, U, G, M \rangle$, де

X - лінгвістична змінна з ім'ям «кредитна історія».

T - множина значень лінгвістичною змінною X, областю визначення кожної з яких є множина U. У банківській практиці кредитну історію найчастіше класифікують по наступних категоріях: «позитивна», «прийнятна», «негативна».

U - набір кількісних характеристик, на підставі яких можливо визначити приналежність кредитної історії до значень, що входять в T. Наприклад, він може мати вигляд: $U = \{$«кількість прострочених платежів», «кількість днів в перебігу яких погашення не виконувалося» і т. д.$\}$.

G - синтаксичні правила, що породжують назву нових термів. Елементи множини G призначені для формування значень X, що деталізують кредитні історії. На основі комбінацій елементів $t \in T$ та $g \in G$, можуть бути введені додаткові значення множини T. Наприклад, при $G = \{$«не», «дуже», «більш-менш»$\}$, кредитній історії можуть бути надані наступні лінгвістичні значення: $\{$«не негативна», «більш-менш прийнятна», «не позитивна»$\}$.

M - семантичні правила, що задають функції приналежності нечітких термів, породжених синтаксичними правилами G.

Для вирішення задачі по визначенню рівня кредитоспроможності фізичних осіб розроблена концепція класифікації кредитних історій (рис. 6.52).

Вхідна інформація є вибіркою по кредитних історіях, яка використовується для навчання моделі. Відповідно до принципів побудови скорингових систем зазвичай розглядаються кредити позичальників, що розплатилися по своїх зобов'язаннях.

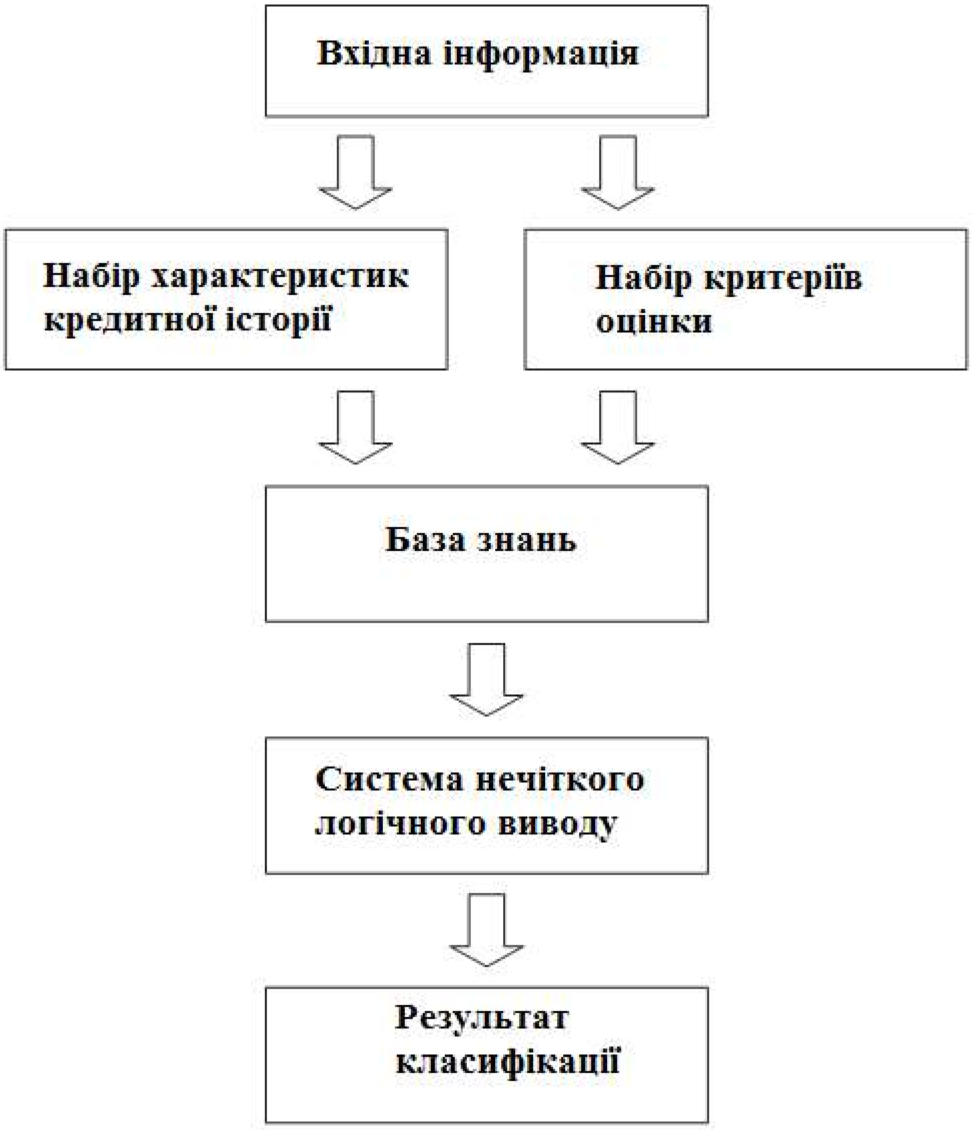


Рис. 6.52. Концепція класифікації кредитних історій.

Основним положенням концепції є побудова нечіткої бази знань, яка є відображенням знань і досвіду експерта у вигляді загального зведення правил, погодженого з політикою фінансово - кредитної організації по відношенню до кредитних ризиків, у вигляді умовних висловів: *Якщо* «Набор умов», *То* «Вивід». Наведемо приклад бази знань, орієнтованої на класифікацію «негативних» кредитних історій.

1. ЯКЩО $x_1 =$«багато», ТОДІ $y =$«висока».

2. ЯКЩО $x_1 =$«невелика кількість» І $x_2 =$«невеликий», ТОДІ $y =$«більш-менш низька».

3. ЯКЩО $x_1 =$«невелика кількість» І $x_2 =$«зовсім невеликий», ТОДІ $y =$«низька».

4. ЯКЩО $x_1 =$«багато» І $x_2 =$«невеликий», ТОДІ $y =$«більш-менш висока».

В правилах застосовані позначення: x_1 - загальна кількість пропущених періодів оплати, x_2 - максимальний термін недоплати в днях, y – можливість оцінки кредитної історії, як «негативної».

Математична інтерпретація дій експерта полягає в реалізації механізму, що дозволяє з певною мірою розділити кредитні історії, на категорії, найчастіше використовувані в банківській практиці. Рішення поставленої задачі можливе з використанням алгоритму нечіткого логічного виведення Мамдані, орієнтованого на роботу з гуманістичними системами, побудованими на підставі думок і припущень про змістовну сутність області дослідження.

Надалі, маючи в наявності інформацію про «хороші» і «погані» кредити і відомості, по відповідним їм клієнтам (анкетні дані, довідки про доходи, наявність у власності майна і т. д.) можлива побудова функціональної відповідності, що представляє залежність якості кредитної історії від характеристик позичальника. Таким чином, на етапі розгляду кредитної заявки, нечітка модель дозволить зробити висновок про найбільш імовірний рівень платіжної дисципліни потенційного клієнта.

Оцінка інвестиційних проектів. Як і в більшості задач економіки, при розрахунку показників інвестиційного проекту економісти стикаються з труднощами у вигляді неповноти, нечіткості або невизначеності вхідних даних. Для вирішення цих проблем існує досить багато способів, наприклад – вживання статистичних, або мінімаксних методів, проте, на практиці вони не завжди виявляються ефективними, а інколи навіть непридатними. Найбільш пристосованим до даних проблем виявився апарат, заснований на теорії нечітких множин.

Прикладом, що добре розкриває переваги «нечіткого підходу», є задача оцінки таких показників інвестиційних проектів, як чиста поточна вартість доходу (NPV) і внутрішня ставка прибутковості (IRR). У них поєднуються нечіткість і невизначеність даних, і неясність, розпливчатість оточення проекту. Розглянемо приклади, які показують потенційну застосовність «нечіткого підходу» як універсального апарату при оцінці ефективності інвестицій.

1. *Оцінка значення чистої поточної вартості доходу (NPV) інвестиційного проекту*. Як відомо, одним з основних показників ефективності інвестиційного проекту є показник NPV (Net Present Value) – чиста поточна вартість доходу.

$$NPV = -I + \sum_{i=0}^{N} \frac{\Delta V_i}{(1+r)^i}, \text{ де}$$

I - об'єм первинних інвестицій;

ΔV_i - оборотне сальдо поступлень і платежем в i періоді;

N - число періодів;

r_i - ставка дисконтування в i періоді.

Визначимо змінні, які можуть бути представлені в нечіткій формі. Величина I – можна лише приблизно знати, який об'єм первинних інвестицій матимемо в своєму розпорядженні на початок інвестиційного проекту. Величина ΔV_i – сальдо в конкретний рік також можна знати лише неточно. Величина r_i – досить важко точно визначити ставку дисконтування.

Після задання в нечіткій формі всіх вхідних даних проекту необхідно визначити кількість рівнів приналежності. При малій кількості рівнів точність результату може виявитися низькою, а при великому їх числі різко зростає обчислювальна складність розрахунків і трудомісткість обчислень. Для досягнення достатньої точності необхідно задати 4-5 рівнів, проте, ця рекомендація не є обов'язковою і залежить від умов задачі. Розрахуємо значення NPV для кожного з рівнів приналежності.

$$[NPV_1, NPV_2] = [-I_1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta V_{i2}}{(1+r_1)^r}, -I_2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta V_{i1}}{(1+r_2)^r}].$$

Потім, розраховані таким чином інтервали апроксимуємо по їх крайніх точках, отримаємо результат у вигляді нечіткої множини.

Проілюструємо дану методику на наступному прикладі. На початку інвестиційного проекту необхідно отримати близько 3 млн. грн. Передбачається, що термін реалізації проекту складе 2 роки, в кожен з яких він в середньому приноситиме 2 млн. грн. Ставка дисконтування передбачається на рівні приблизно 25%.

Як видно з умови, в задачі є нечіткі параметри, ознакою яких є слова «біля», «в середньому», «приблизно» і так далі. Представимо їх в нечіткій формі, і виразимо графічно.

- I =(2.9; 3; 3.1) – передбачається, що швидше за все на початок проекту отримаємо 3 млн. грн., але залежно від умов, можемо отримати від 2.9 до 3.1 млн. грн (мал. 6.53).

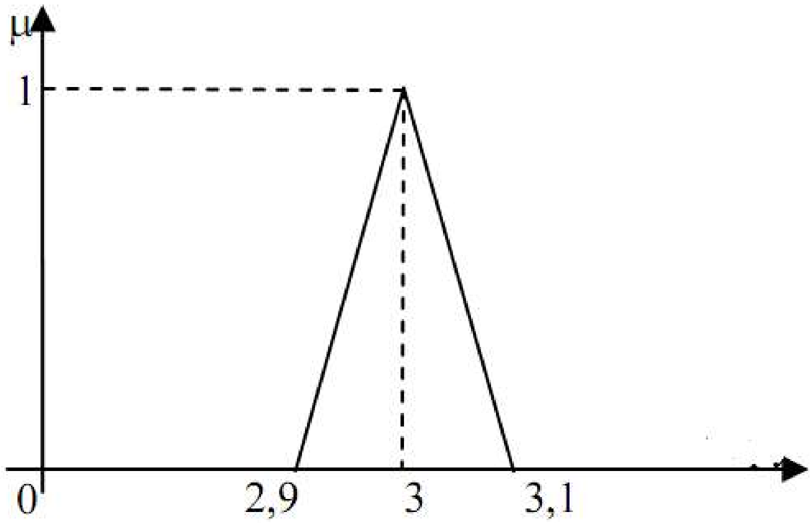


Рис. 6.53. Нечітке число «Розмір інвестицій».

- $\Delta V_1 = \Delta V_2 =$(1.3; 2; 2.7) – передбачається, що, швидше за все прибуток в кожен рік складе близько 2 млн. грн., проте він може коливатися в межах від 1.3 до 2.7 млн. грн (рис. 6.54).

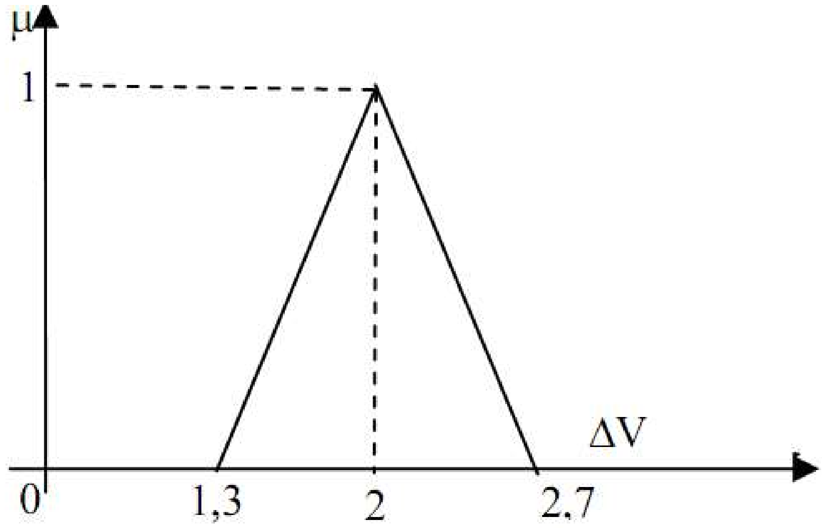


Рис. 6.54. Нечітка множина «Зворотне сальдо».

- $r_1 = r_2 =$(0.2; 0.25; 0.35) – ставка дисконтування може коливатися від 20% до 35%, але, швидше за все, вона складе 25% (рис. 6.55).

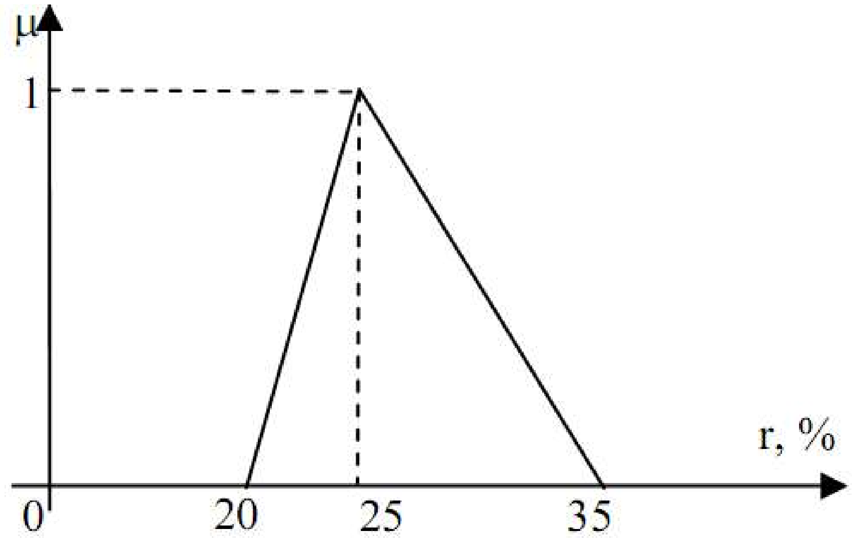


Рис. 6. 55. Нечітке число «Ставка дисконтування».

Для здобуття результату, що задовольняє по точності, досить задатися 5-ма рівнями приналежності. Розрахуємо для кожного з рівнів інтервал значень NPV. Результати обчислень занесемо в таблицю (табл. 6.3) і виразимо результат графічно (мал. 6.56).

Табл. 6.3.

Результати розрахунку NPV по α - рівням

α - рівень	I	ΔV	r	NPV
0	[2.9, 3.1]	[1.3, 2.7]	[0.2, 0.35]	[1.225, -1.424]
0.25	[2.925, 3.075]	[1.475, 2.525]	[0.2125, 0.325]	[0.875, -1.112]
0.5	[2.95, 3.05]	[1.65, 2.35]	[0.225, 0.3]	[0.534, -0.804]
0.75	[2.975, 3.025	[1.825, 2.175]	[0.2375, 0.275]	[0.203, -0.471]
1	[3, 3]	[2, 2]	[0.25, 0.25]	[-0.12, -0.12]

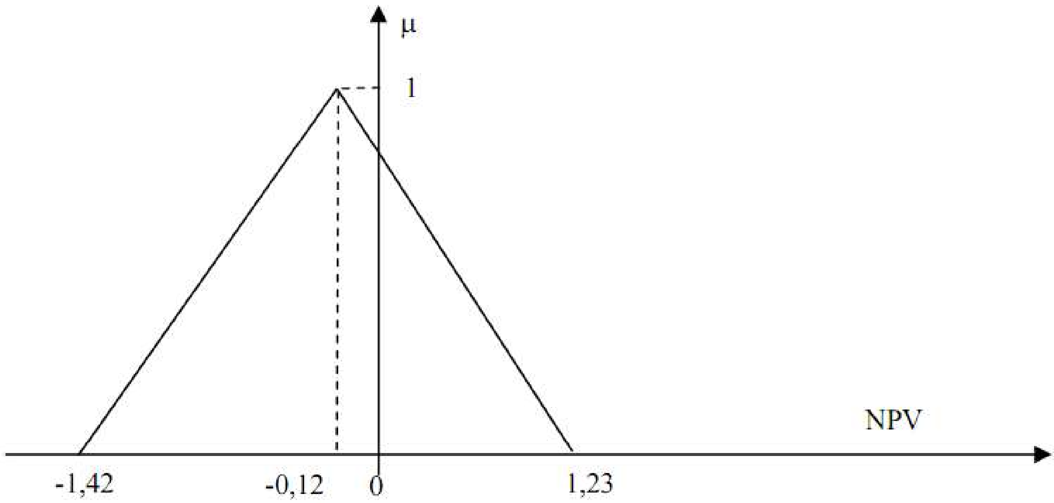


Рис. 6.56. Розраховане значення NPV.

Як видно з графіка, найбільш імовірне значення NPV знаходитиметься біля -0,12 млн. грн. Таким чином, швидше за все проект не принесе прибутку і буде збитковим. Проте, за деяких умов можливе набуття позитивного значення NPV. Ризик його негативних значень, можна визначити як співвідношення площі, яка потрапляє в негативну область і загальній площі отриманої фігури. А найбільш імовірне значення визначатиметься як аргумент точки, , що є центром тяжесті даної фігури.

2. *Оцінка внутрішньої ставки прибутковості (IRR - internal rate of return) інвестиційного проекту.* Іншим важливим показником ефективності інвестиційного проекту є показник внутрішньої ставки прибутковості IRR.

Даний показник дозволяє оцінити запас міцності проекту. Сенс його полягає в знаходженні значення ставки дисконтування r, яка обертає NPV в нуль, і зводиться до вирішення степенного рівняння

$$NPV = -I + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta V_i}{(1+r)^i} = 0\,.$$

Обґрунтування необхідності представлення даних в нечіткій формі представлене в попередньому прикладі. Вирішення ж рівнянь в нечіткому вигляді принципово не відрізняється від обчислення нечіткого вираження і зводиться до:

- визначенню кількості α - рівнів;
- рішенню на кожному рівні інтервальних степенних рівнянь

$$[-I_1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta V_{i2}}{(1+r_1)^r} = 0; -I_2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta V_{i1}}{(1+r_2)^r} = 0]$$

- апроксимації отриманого нечіткого значення.

Розглянемо приклад розрахунку IRR в нечіткій формі. Вихідні дані візьмемо з попередньої задачі: $I = (2.9;\ 3;\ 3.1)$, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = (1.3;\ 2;\ 2.7)$, $\alpha = 5$. Вирішуючи, послідовно для кожного рівня рівняння, отримаємо результат у вигляді таблиці (табл. 6.4).

Табл. 6.4.

Результати розрахунку IRR по α - рівням

α - рівень	I	ΔV	r
0	[2.9, 3.1]	[1.3, 2.7]	[-10.97%, 53.68%]
0.25	[2.925, 3.075]	[1.475, 2.525]	[-2.72%, 45.61%]
0.5	[2.95, 3.05]	[1.65, 2.35]	[5.42%, 37.57%]
0.75	[2.975, 3.025	[1.825, 2.175]	[13.49%, 29.54%]
1	[3, 3]	[2, 2]	[21.53%, 21.53%]

В результаті обчислень і апроксимації отримуємо результат, що виражається нечітким числом: $r =$ (-10,97%; 21,53%; 53,68%), і представимо його графічно (рис. 6.57).

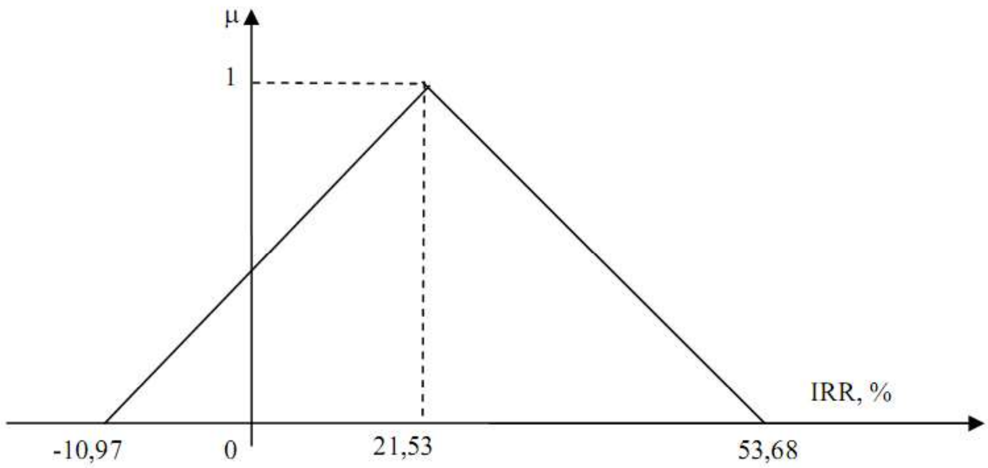


Рис. 6.57. Результат розрахунку IRR в нечіткій формі.

Таким чином, на прикладах показано, що розрахунки в нечіткій формі дають додаткові можливості для аналізу інвестиційних проектів. Це може бути корисно, тим більше що даний метод враховує все нечіткості і невизначеності у вихідних даних, що не дозволяє зробити жодна із загальноприйнятих методик.

Застосування нечітких множин в бізнесі. В даний час починають з'являтися інформаційні ресурси, в рамках яких агрегується інформація про діяльність сотень українських корпорацій. Весь цей накопичений об'єм даних серйозно ще ніким не досліджувався, - та і не було уявлення про те, як все це різноманіття кількісної та якісної інформації можна аналізувати в одному ключі. Сьогодні такий підхід до аналізу економічних даних нарешті сформувався - підхід Fuzzy Economics. Справа лише за тим, аби на основі розробленої методології створити системі інтелектуального аналізу, що виконують аналітичну обробку даних і вироблення оптимальних економічних рішень.

Однією з таких економічних проблем, яку дозволяють ефективно розв’язувати нечіткі методі є кваліметрія на базі агрегації ієрархій чинників. Нехай деяка властивість економічного об'єкту (фінансова стійкість підприємства, інвестиційна привабливість коштовного паперу, рівень менеджменту управляючої компанії, ринкова привабливість території під забудову і так далі) може бути представлено як деревовидна ієрархія чинників (рис. 6.58), причому:

- в рамках ієрархії визначені системи відношення переваги одних підвластивостей іншим для одного рівня ієрархії;
- підвластивості, що становлять низові ланки ієрархії, можуть бути виміряні як кількісно, так і якісно (у тому числі словесно).

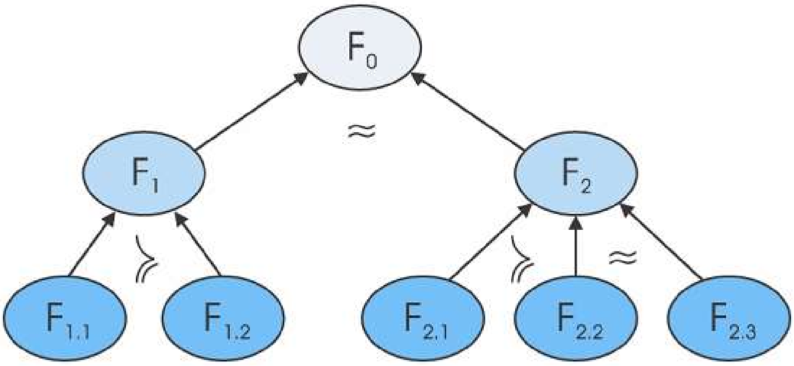


Рис. 6.58. Деревовидна ієрархія властивостей.

В цьому випадку, можна здійснити комплексну оцінку сили базової властивості, якщо:

- виробляти всі виміри на якісному базисі, виконуючи нечітку класифікацію кількісних чинників;
- для моделювання систем переваги застосовувати системи вагів Сааті або Фішберна;
- виробляти комплексування якісних рівнів чинників в рамках двовимірної згортки, де однією з систем вагів виступають ваги чинників, а іншою системою вагів – вузлові точки класифікатора.

Коли рівень сили комплексної властивості, що нормується на деякому стандартному носієві (наприклад, 01-інтервал), отриманий, можна виконати розпізнавання якісного рівня даної комплексної властивості на основі відповідного нечіткого класифікатора. Також, на підставі отриманої оцінки якості, можна виконувати зв'язаний аналіз якості об'єкту і деяких додаткових його властивостей (наприклад, ціни), аби виділяти такі об'єкти, для яких досягається наприклад, максимум якості при фіксованій ціні, або, навпаки, мінімум ціни при фіксованому рівні якості. Виділені об'єкти утворюють множину Еджворта - Парето. Перерахуємо характерні постановки економічних задач, де вживання нечітких обчислень досягає вражаючих результатів.

- *Стратегічне планерування*. Позиціювати бізнеси, описувати стан ринків, конкурентоспроможності, оцінювати сили і слабкості відповідних бізнесів – все це в чистому вигляді кваліметричні задачі, які можуть бути успішно поставлені і вирішені в нечіткій постановці. І саме на цьому принципі працює система стратегічного планерування, впроваджена в зарубіжному регіональному співтоваристві Сименс.
- *Комплексний аналіз стану корпорації*. Знову кваліметрична задача. Мистецтво полягає в тому, аби виділити чинники і оцінити їх ієрархію з відповідними системами переваги. У простому випадку, коли всі чинники укладаються у вектор, тоді комплексна оцінка досягається в ході двовимірної матричної агрегації поточних якісних рівнів чинників. В рамках цього підходу виявляється можливим одночасно аналізувати всі сторони життя корпорації (фінанси, управління, процеси, задоволеність клієнтів, стратегічне положення корпорації і так далі).
- *Оптимізація фондового портфеля*. Якщо прибутковість компоненти фондового портфеля – нечітка випадкова величина, то параметри відповідних імовірнісних розподілів – нечіткі числа. Якщо і ковариаційна матриця зібрана на нечітких числах, то можливо записати класичну задачу Марковіца в нечіткій постановці, вирішенням якої буде ефективна границя портфельної множини як криволінійна смуга в координатах «ризик-прибутковість».

Якщо розглядати прибутковість активу як нечітке число і нехтувати ефектом впливу ковариаційної матриці, то результуюча прибутковість портфеля – теж нечітке число. Якщо зафіксувати норматив гранично допустимої прибутковості портфеля, то можна оцінити ризик неефективності портфеля. І тоді можна відновити ефективну границю портфельної множини в координатах «очікувана прибутковість – ризик неефективності» портфеля.

- *Оцінка інвестиційної привабливості коштовних паперів*. Кваліметрична задача, де ієрархія формується на фундаментальних чинниках коштовних паперів (відношення ціна-доход, віддача на інвестований капітал, ліквідність активів, фінансова автономія емітента і так далі).

- *Прогнозування фондових індексів*. Якщо побудувати макроекономічну модель, де в якості екзогенних чинників моделі виступають прогнозні рівні макроекономічних параметрів регіону, в якому випускаються коштовні папери, а як виходи моделі виступають фондові індекси, то вихідні прогнози і зв'язки між чинниками усередині моделі можуть мати нечіткий вигляд. Відповідно, результуючі прогнози фондових індексів мають вигляд нечітких функцій.

- *Оцінка нерухомості*. Вибір земельної території під забудову, оцінка вартості будинку або квартири, аналіз перспективності відкриття торгівельної точки, оцінка раціональних рівнів «ціна-дохід» по об'єктах нерухомості – все це кваліметричні задачі.

- *Транспортна логістика*. Якщо ділянки транспортної мережі володіють нечіткою тривалістю перевезення, то розумно вибирати маршрут, що володіє, з одного боку, мінімальною середнечекаємою тривалістю, а, з іншого боку, мінімальним ризиком зриву плану за витратами на перевезення. Всі відповідні оптимальні маршрути утворюють множину Еджворта - Парето.

- *Вибір корпоративної інформаційної системи*. Приклад задачі, де кваліметрія виконується відразу по декількох розрізах (опційні ефекти від впровадження системи, інформаційні ефекти, господарські ризики). При цьому з'являється додатковий рівень невизначеності, пов'язаний з неточністю виміру якісних чинників. Відповідно, з портфеля всіляких послідовностей впровадження модулів інформаційної системи можна виділити підмножину Еджворта - Парето, якщо розглядати його в координатах «інтегральний ефект – невизначеність виміру ефекту».

- *Аналіз новинного фону*. Сьогодні на фондових ринках всі новини про коштовні папери збираються і розподіляються у відповідних розділах інформаційних порталів в автоматичному режимі. Існують технології смислового розпізнавання тексту. Ці технології можуть бути доповнені технологіями нечіткої класифікації новин, з точки зору їх:

а) корисності для одержувача новин;

б) рівня тривожності відносно стану емітента коштовного паперу.

Всі ці задачі по суті є кваліметричними.

Одним з перспективних напрямів розвитку систем нечітких обчислень є широке застосування нечітких нейромереж. Необхідно відзначити, що глибинна інтеграція нечітких систем і нейромереж пов'язана з розробкою нової архітектури елементів нейромережі. Тобто необхідний перехід від класичних нейронів до нечітких нейронів. Зміна елементу нейромережі для адаптації до нечітких систем може стосуватися вибору функції активації, реалізації операцій складання і множення, оскільки в нечіткій логіці складання моделюється будь-якою трикутною нормою ($\max, a+b-ab$), а операція множення – трикутною нормою ($\min, ab$). Нечітка нейромережа функціонує стандартним чином на основі чітких дійсних чисел. Нечіткою є лише інтерпретація результатів.

Тест.

1. Під поняттям «м’які обчислення» Ви розумієте:

а) сукупність технологій, які пристосовані до роботи з точними, кількісними або якісними даними;

б) сукупність технологій, які пристосовані до роботи з точними, визначеними та істинними даними;

в) сукупність технологій, які пристосовані до роботи з неточними, невизначеними або частково істинними даними.