РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

Повний диференціал функції двох змінних має вигляд:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Диференціальні рівняння першого порядку вигляду:

$$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0} \qquad (1)$$

називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2)$$

Для того, щоб (1) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалось наступна умова:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}. \qquad (3)$$

Дійсно, диференціюючи (2), отримаємо:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Прирівнюючи ліві частини, приходимо до виразу (3).

Якщо (1) є рівняння в повних диференціалах, то воно може бути представлене у вигляді:

$$du = 0 \qquad (4)$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$u(x, y) = C \qquad (5)$$

де C – деяка константа. Тобто задача зводиться до відшукання функції u, яка може бути знайдена наступним чином.

Оскільки дане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах, то $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$. Проінтегруємо цей вираз по x. Отримаємо

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y) \qquad (6)$$

(після інтегрування виникла не константа, а деяка функція від y, оскільки до інтегрування була частинна похідна по x).

Для відшукання $\varphi(y)$ скористаємось співвідношенням

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x, y)dx + \varphi(y)\right] \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x, y) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x, y)dx + \varphi(y)\right] = Q(x, y).$$

Інтегруючи останнє рівняння знаходимо функцію $\varphi(y)$, далі підставляємо її у (6), а (6) у (5) і отримаємо шуканий розв'язок.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$$

- Перевіримо, чи виконана умова (3):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже рівняння є рівнянням в повних диференціалах.

$$u = \int \frac{y}{x}dx = y\ln x + \varphi(y) \;\Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \ln x + \varphi'(y) = y^3 + \ln x,$$

$$\varphi'(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^4}{4}; \qquad u = y\ln x + \frac{y^4}{4} = C. \bullet$$

В деяких випадках коли ліва частина рівняння (1) не є повним диференціалом, вдається підібрати функцію $\mu = \mu(x, y)$ таку, після домноження на яку рівняння стає рівнянням в повних диференціалах. Така функція називається *інтегруючим множником.*

Зауважимо, що при множенні рівняння на інтегруючий множник, можлива поява зайвих частинних розв'язків, що перетворюють його на нуль. Крім того, можлива втрата частинних розв'язків у випадку коли цей множник може обертатись на нескінченність.

Зрозуміло, що функція $\mu(x, y)$ повинна задовольняти рівнянню:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \tag{7}$$

Дійсно, після множення рівняння (1) на $\mu(x, y)$ отримаємо рівняння:

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \tag{8}$$

яке є рівнянням в повних диференціалах, тобто повинна виконуватися умова (7).

У загальному випадку інтегрування рівняння (7) ще важче, ніж початкового. В деяких випадках вдається зробити підбір його частинних розв'язків вважаючи $\mu(x, y)$ функцією тільки від x, тільки від y, від $\frac{x}{y}$, від $x^2 + y^2$.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\left(x^2 + y\right)dx - xdy = 0$$

- $$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже початкове рівняння не є рівнянням в повних диференціалах.

Спробуємо підібрати інтегруючий множник $\mu = \mu(x, y)$. Припустимо, що він вже підібраний. Тоді повинна виконуватися умова

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(\mu(x^2+y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(-x))}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(x^2+y\right)+\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}(-x)-\mu .$$

Припустимо, що $\mu=\mu(x)$. Тоді отримаємо

$$\mu=-x\frac{d\mu}{dx}-\mu \quad \Rightarrow \quad x\frac{d\mu}{dx}=-2\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \mu=\frac{1}{x^2}.$$

Домножимо початкове рівняння на отриманий множник. Отримаємо рівняння:

$$\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0.$$

Перевіримо, чи буде це рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже маємо рівняння в повних диференціалах.

$$u=\int\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx=x-\frac{y}{x}+\varphi(y) \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi=C; \qquad x-\frac{y}{x}=C. \bullet$$

Зауваження. Зауважимо, що якщо початкове рівняння має вигляд (1), то його не треба зразу розглядати як рівняння в повних диференціалах, а спочатку спробувати звести до рівнянь більш простого типу. Наприклад, розглянемо рівняння

$$xydx+(x+1)dy=0$$

$$\bullet \ xydx=-(x+1)dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-xy}{x+1}.$$

Це рівняння із подільними змінними

$$\frac{dy}{y}=\frac{-x}{x+1}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{(x+1)-1}{x+1}dx+C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y|=-x+\ln|x+1|+C \bullet$$