НАЙПРОСТІШІ ТИПИ РІВНЯНЬ НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

До такого типу рівнянь відносяться рівняння вигляду:

$$\boxed{F(x, y, y') = 0} \qquad (1)$$

Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно y', то отримаємо одне або декілька рівнянь вигляду:

$$y' = f_i(x, y) \qquad (i = 1,2...) \qquad (2)$$

Інтегруючи рівняння (2) знаходимо розв'язок початкового рівняння (1). Для кожного з рівнянь (2) ми отримаємо сім'ю інтегральних кривих, що відрізняються константами. Тоді інтегральними кривими будуть також криві, складені з двох кривих різних сімей, якщо вони мають в загальній точці загальну дотичну.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$$

• Розглянемо це рівняння як квадратне рівняння відносно y':

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$y' = \frac{x + y \pm \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}}{2} = \frac{x + y \pm \sqrt{(x-y)^2}}{2} = \frac{(x+y) \pm (x-y)}{2}.$$

1) $y' = x$, $\quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2}{2} + C_1$;

2) $y' = y$ $\quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^x$.

До інтегральних кривих будуть відноситись також криві, які складаються з частини параболи і частини показникової функції при умові, що в спільній точці вони мають спільну дотичну. Наприклад при $C_1 = \dfrac{1}{2}$, і $C_2 = e^{-1}$ будемо мати наступну складену інтегральну криву

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{2}, & -\infty < x \le 1 \\ e^{x-1}, & 1 \le x < +\infty \end{cases}$$

яка також буде розв'язком (рис. 1).

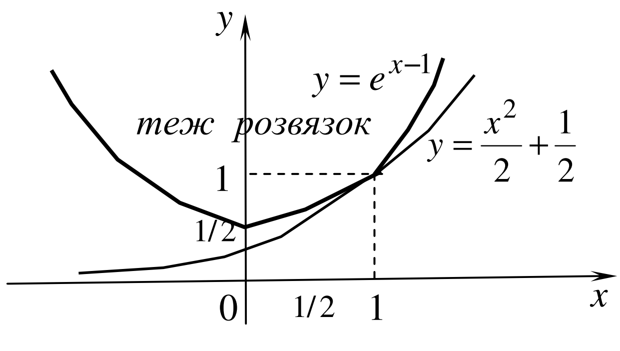

*Рис.*1

Далеко не завжди (1) може бути розв'язане відносно y' і ще рідше отримані рівняння (2) легко інтегрується. У зв'язку з цим розв'язки рівнянь виду (1) доводиться шукати іншими методами , кожний з яких працює в деякому частинному випадку. Розглянемо ці випадки.

1. Рівняння має вигляд:

$$\boxed{F(y')=0} \tag{3}$$

причому існує принаймні один дійсний корінь $y'=k_i$ цього рівняння. Оскільки рівняння (3) не містить ні x, ні y, то $k_i=const$. Інтегруючи рівняння

$y'=k_i$, отримаємо: $y=k_i x+C$, або $k_i=\dfrac{y-C}{x}$, але k_i є коренем рівняння (3), тобто $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right)=0$. Це і є розв'язок рівняння (3).

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння.

$$(y')^3-(y')^2+y'+3=0.$$

• Оскільки $F(y')=(y')^3-(y')^2+y'+3$, то

$$y'=0 \qquad F(0)=3$$

$$y'=-2 \qquad F(-2)=-11,$$

то функція F має корінь. Тоді, згідно вищевикладеного, будемо мати наступний розв'язок

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3-\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+\left(\frac{y-C}{x}\right)+3=0. \bullet$$

2. Рівняння має вигляд:

$$\boxed{F(x,y')=0} \tag{4}$$

Замінимо рівняння (4) двома параметричними рівняннями:

$$x=\varphi(t)$$

$$y'=\psi(t)$$

Тоді отримаємо

$$dy=y'dx=\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$$

$$y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C$$

Таким чином розв'язок рівняння (4) визначається параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C \end{cases}$$

Зауваження. Якщо (4) має вигляд $\boxed{x=F(y')}$ то слід покласти $y'=t$.

Приклад.

$$x = (y')^3 - y' - 1$$

- $y' = t$, $\qquad x = t^3 - t - 1$,

$dy = y'dx = t(3t^2 - 1)dt \qquad \Rightarrow \qquad y = \int t(3t^2 - 1)dt = 3\dfrac{t^4}{4} - \dfrac{t^2}{2} + C$

Розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1 \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 - \dfrac{t^2}{2} + C \end{cases}. \bullet$$

3. Рівняння має вигляд:

$$\boxed{F(y, y') = 0} \qquad (5)$$

Як і у попередньому випадку рівняння (5) замінимо двома параметричними рівняннями:

$$y = \varphi(t)$$
$$y' = \psi(t)$$

Враховуючи що $dx = \dfrac{dy}{y'}$, отримуємо:

$$dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C$$

Таким чином розв'язок рівняння (5) дається параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C \end{cases}$$

Зауваження. Якщо (5) має вигляд $\boxed{y = F(y')}$ тоді слід покласти $y' = t$.

Приклад.

$$y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5$$

- $y' = t$, $\quad y = t^5 + t^3 + t + 5$, $\qquad dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{(5t^4 + 3t^2 + 1)dt}{t} \qquad \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad x = \int (5t^3 + 3t + \frac{1}{t})dt = \dfrac{5}{4}t^4 + \dfrac{3}{2}t^2 + \ln|t| + C$.

Тому розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} y = t^5 + t^3 + t + 5 \\ x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + C \end{cases}. \bullet$$

4. Якщо рівняння $F(x, y, y') = 0$ розв'язане відносно y, тобто зводиться до вигляду

$$\boxed{y = f(x, y')},$$

то його розв'язок може бути знайдений за допомогою ведення параметра $y' = t$.

Тоді $y = f(x,t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Інтегруючи останнє рівняння знаходимо:

$$x = x(t) \text{ або } t = t(x).$$

Останнє співвідношення сумісно із залежністю $y = f(x,t)$ визначає розв'язок рівняння у параметричному вигляді.

Приклад.

$$y = (y')^2 + xy' - x$$

- $y' = t$, $\quad y = t^2 + xt - x$

$$\frac{dy}{dx} = t - 1 + 2t\frac{dt}{dx} + x\frac{dt}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad 2t\frac{dt}{dx} + x\frac{dt}{dx} = 1 \left| \cdot \frac{dx}{dt} \right. \qquad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dx} - x = 2t$ – лінійне рівняння. Заміна $x = u(t) \cdot v(t)$

$$u'v + uv' - uv = 2t$$

$$u' - u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = dt \quad \Rightarrow \quad \ln u = t \quad \Rightarrow \quad \underline{u = e^t}$$

$$e^t v' = 2t \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{2t}{e^t} \quad \left\| \begin{array}{l|l} u = t & du = dt \\ dv = e^{-t}dt & v = -e^{-t} \end{array} \right\| \Rightarrow \underline{v = 2\left[-te^{-t} - e^{-t}\right] + C},$$

$$x = uv = Ce^t - 2t - 2.$$

Остаточно розв'язок рівняння записуємо у вигляді:

$$\begin{cases} y = t^2 + (t-1)(Ce^t - 2t - 2) \\ x = Ce^t + 2t - 2 \end{cases}. \bullet$$

5. Якщо рівняння $F(x,y,y')=0$ розв'язане відносно x , тобто зводиться до вигляду

$$\boxed{x = f(y,y')},$$

то воно інтегрується аналогічно попередньому випадку. Припускаючи $y'=t$ приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = f(y,t) \\ \dfrac{1}{t} = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{dt}{dy} \end{cases}$$

з якої знаходимо загальний розв'язок рівняння у явному або параметричному вигляді.

Приклад.

$x = y'\cos y'$

- $y'=t$, $\quad x = t\cos t \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{t} = \dfrac{dx}{dy} = (\cos t - t\sin t)\dfrac{dt}{dy} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \int t\cos t dt - \int t^2 \sin t dt + C = \int t\cos t dt - (-t^2\cos t + 2\int t\cos t) + C =$$

$$= t^2\cos t - \int t\cos t dt + C =$$

$$\left\| \begin{matrix} u = t^2 & du = 2tdt \\ dv = \sin t dt & v = -\cos t \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos t & v = \sin t \end{matrix} \right\|$$

$$= t^2\cos t - t\sin t - \cos t + C.$$

Отже розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t^2\cos t - t\sin t - \cos t + C \end{cases}. \bullet$$

У якості прикладу застосування викладеного методу, розглянемо лінійні рівняння відносно x та y виду

$$\boxed{y = x\varphi(y') + \psi(y')},$$

які найчастіше зустрічаються в додатках та мають назву *рівняння Лагранжа.*

$y'=t$, $\qquad y = x\varphi(t) + \psi(t)$,

$$y' = t = \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx}\bigg|\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$[t-\varphi(t)]\cdot\frac{dx}{dt} - x\varphi'(t) = \psi'(t)$$

Інтегруючи отримане лінійне рівняння, знаходимо $x = x(t)$ і приєднуючи рівняння $y = x\varphi(t) + \psi(t)$ отримаємо параметричні рівняння, які визначають шукані інтегральні криві.

Окрім цього легко бачити, що при домноженні на $\frac{dx}{dt}$ були втрачені розв'язки $t = t_i = const$, де t_i - корінь рівняння $t - \varphi(t) = 0$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння Лагранжа:

$$y = 2xy' - (y')^3$$

- $y' = t$, $\qquad y = 2xt - t^3 \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = t = 2t + 2x\frac{dt}{dx} - 3t^2\frac{dt}{dx}\Big| \cdot \frac{dx}{dt}$$

1) $t = 0$ – втрачений розв'язок.

2) $-t\frac{dx}{dt} - 2x = -3t^2 \quad \Rightarrow \quad t\frac{dx}{dt} + 2x = 3t^2$ – лінійне рівняння.

$$x(t) = u(t) \cdot v(t)$$

$$tu'v + tuv' + 2uv = 3t^2,$$

$$tu' + 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dt}{t} \quad \Rightarrow \quad \underline{u = \frac{1}{t^2}}$$

$$t \cdot \frac{1}{t^2}v' = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad v' = 3t^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{v = \frac{3}{4}t^4 + C}$$

$$x(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{C}{t^2}$$

Розв'язок має вигляд:

1) $t = 0 \Rightarrow y = 0$

2) $\begin{cases} x = \frac{3}{4}t^2 + \frac{C}{t^2} \\ y = 2\left(\frac{3}{4}t^3 + \frac{C}{t}\right) - t^3 \end{cases}$. •

У частинному випадку коли $\varphi(y') = y'$ ми отримаємо *рівняння Клеро*:

$$\boxed{y = xy' + \psi(y')}$$

Його розв'язок шукаємо у такому самому вигляді, як і рівняння Лагранжа:

$$y' = t, \qquad y = xt + \psi(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t + \psi'(t)\frac{dt}{dx} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dx}\left[x+\psi'(t)\right]=0$$

1) $\frac{dt}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad t = const = C$

$$y = Cx + \psi(C) \tag{6}$$

Маємо одно параметричне рівняння прямих

2) $x+\psi'(t)=0$

В цьому випадку розв'язок визначається параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} y = xt + \psi(t) \\ x + \psi'(t) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння Клеро:

$$y = xy' - \left(y'\right)^2 .$$

• Згідно (6) маємо:

1) $y = Cx - C^2$

Згідно (7) маємо:

2) $\begin{cases} y = xt - t^2 \\ x + (-2t) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2t, \qquad y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}.$