ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Математичний опис різних процесів та явищ матеріального світу приводить в багатьох випадках до рівнянь що містять шукану функцію під знаком похідної чи диференціала. Такі рівняння називають *диференціальними*.

Розглянемо приклад що приводить до диференціального рівняння.

Приклад. З висоти H без початкової швидкості V кинуто тіло. Знайти закон його руху, якщо на нього окрім сили тяжіння діє сила опору середовища, що пропорційна швидкості.

- $x(t) = ?$

За другим законом Ньютона маємо:

$$ma = \sum F \; ; \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt},$$

де k – коефіцієнт пропорційності опору середовища.

Маємо диференційне рівняння. Його розв'язком є функція:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t$$

Переконаємося у цьому. Підставимо цей вираз до рівняння:

$$m\left[C_2\frac{k^2}{m^2}e^{-\frac{k}{m}t}\right] = mg - k\left[-C_2\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Для відшукання сталих C_1 та C_2 залучимо додаткові умови:

$$x\big|_{t=0} = H, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Задовольняючи цим умовам отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = H \\ -\frac{k}{m}C_2 + \frac{mg}{k} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = \frac{m^2 g}{k^2} \\ C_1 = H - \frac{m^2 g}{k^2} \end{cases}.$$

Підставляючи знайдені вирази C_1 та C_2 до формули $x(t)$ отримуємо відповідь задачі:

$$x(t) = H - \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{m^2 g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t \bullet$$

Введемо декілька означень.

Означення 1. *Звичайним диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію *y(x)* та її похідні y', y'',…, $y^{(n)}$.

Символічно диференційне рівняння записується у вигляді:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Означення 2. Якщо невідома функція, яка входить до диференціального рівняння, є функцією двох і більше незалежних змінних, то маємо *диференційне рівняння з частинними похідними*.

Означення 3. *Порядком диференціального рівняння* називається порядок найвищої похідної, що входить в рівняння.

Означення 4. *Загальним розв'язком диференціального рівняння* називають вираз вигляду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

($C_1, C_2, ..., C_n$ – константи, кількість яких залежить від порядку диференціального рівняння), після підстановки якого в диференціальне рівняння воно обертається на тотожність.

Якщо константам $C_1, C_2, ..., C_n$ надати якісь певні значення, то отримаємо *частинний розв'язок*.

Означення 5. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*.