Основные свойства линейного дифференциального уравнения второго порядка и их решений

$$y'' + py' + qy = 0.$$

1) Если y_1 – первое частное решение, то $C_1 y_1$ также решение уравнения, т.е. если $L[y_1] = 0$, то $L[C_1 y_1] = 0$.
2) Если y_2 – второе частное решение, то $C_2 y_2$ также решение уравнения.
3) $C_1 y_1 + C_2 y_2$ – так же решение однородного линейного дифференциального уравнения, т.е. $L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = L[C_1 y_1] + L[C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] \equiv 0$.

Определение: Если $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, то $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называется линейно независимыми решениями. Если $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы между собой. н

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ называется определителем Вронского или вронскианом.

При $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda - const$, имеем: $y_1(x) = \lambda y_2(x)$, тогда $W(y_1, y_2) \equiv 0$.

Подставим y_1 и y_2 в $W(y_1, y_2)$:

$$W(y_1, y_1\lambda) = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda y_1 y_1' - \lambda y_1 y_1' \equiv 0.$$

Если $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$, то имеем только частное решение, второе необходимо определять.

Замечание: Не существует общих методов для нахождения в конечном виде общего решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. И только, если известно одно частное решение, то второе может быть определено.

Теорема: Если известно одно частное решение $y_1(x)$ ОЛДУ второго порядка с переменными или постоянными коэффициентами, то второе частное решение может быть определено интегрированием этого частного решения.

Пусть $y_1(x)$ есть первое частное решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$, тогда $y_1(x)$ и искомое $y_2(x)$ удовлетворяют ОЛДУ, т.е. $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$; $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$. Умножим первое равенство на y_2, второе на y_1 и вычтем

$$y_2 y_1'' + py_2 y_1' + qy_2 y_1 - y_1 y_2'' - py_1 y_2' - qy_1 y_2 = 0,$$

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' + p(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0.$$

Т.к. $W(y_1 y_2) = -y_2 y_1' + y_1 y_2'$,

то $W'(y_1 y_2) = -y_2' y_1' - y_2 y_1'' + y_1' y_2' + y_1' y_2'' = -y_2 y_1'' + y_1 y_2''$.

Тогда, имеем $W'(y_1 y_2) + pW(y_1 y_2) = 0$, $\dfrac{W'}{W} = -p(x)$ или $\dfrac{dW}{W} = -pdx$; $W(y_1 y_2) = Ce^{-\int p(x)dx}$. Отсюда $y_1 y_2' - y_2'' y_1' = Ce^{-\int pdx}$. Разделим на $y_1^2(x)$, тогда

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{Ce^{-\int pdx}}{y_1^2} \text{ или } \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int pdx}.$$

Интегрируя, имеем:

$$y_2(x) = y_1(x) \int Ce^{-\int p(x)dx} y_1^{-2} dx + C_1.$$

Если принять для $C = 1$ и $C_1 = 0$, то $y_2(x)$ запишется так:

$$y_2(x) = y_1(x) \int Ce^{-\int p(x)dx} y_1^{-2} dx.$$

Тогда общее решение ОЛДУ будет иметь вид:

$$y_{00}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \int Ce^{-\int p(x)dx} y_1^{-2} dx.$$