ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, що містить y і y' в першій степені. Воно має вигляд:

$$\boxed{y' = p(x)y + q(x)} \qquad (1)$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння називається *однорідним*. Його розв'язок матиме наступний вигляд:

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| - \ln|C| = \int p(x)dx \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad y = Ce^{\int p(x)dx} \qquad (2)$$

Для відшукання розв'язку неоднорідного рівняння використовується два методи:

а) Метод варіації довільних сталих

За цим методом розв'язок рівняння (1) шукаються у вигляді (2), припускаючи, що C є не константою, а деякою *функцією* від x, тобто

$$y(x) = C(x)e^{\int p(x)dx} \qquad (3)$$

Підставляючи (3) у (1), приходимо до рівняння для відшукання функції $C(x)$:

$$C'e^{\int p(x)dx} + Ce^{\int p(x)dx}p(x) = p(x)Ce^{\int p(x)dx} + q(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = q(x)e^{-\int p(x)dx},$$

$$C(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + \overline{C}, \qquad (4)$$

де $\overline{C}$ – константа інтегрування.

Підставляючи (4) у (3) отримуємо розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = e^{\int p(x)dx}\left[\overline{C} + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right]$$

Більш простим методом розв'язання лінійних рівнянь є метод підстановки.

б) Метод підстановки

За цим методом розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій:

$$y(x) = u(x)v(x) \qquad (5)$$

Підставляючи (5) у (1) отримуємо:

$$u'v + uv' = p(x)uv + q(x)$$

$$v[u' - p(x)u] + uv' = q(x) \qquad (6)$$

Оберемо $u(x)$ таким чином, щоб вираз у дужках обернувся на нуль, тобто знайдемо $u(x)$ як розв'язок диференціального рівняння $u' - p(x)u = 0$. Це рівняння з подільними змінними. Відшукавши будь який *частинні* *розв'язок* цього рівняння (максимально простого вигляду) і підставляючи цей розв'язок у (6), приходимо до рівняння для відшукання функції $v(x)$: $uv' = q(x)$ з подільними змінними.

Приклад.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2$$

• Приймемо $y(x) = u(x)v(x)$. Отримаємо

$$u'v + uv' = \frac{uv}{x} + x^2 \qquad \Rightarrow \qquad v\left[u' - \frac{u}{x}\right] + uv' = x^2;$$

$$u' - \frac{u}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{u = x}$ – частинний розв'язок (поклали $C = 0$). Тоді

$$xv' = x^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{v = \frac{x^2}{2} + C}; \quad \Rightarrow \quad y(x) = u(x)v(x) = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right). \bullet$$

До лінійних диференціальних рівнянь можуть бути зведені деякі інші рівняння. Розглянемо їх.

а) Рівняння Бернуллі.

Воно має вигляд:

$$y' = p(x)y + q(x)y^m$$

$m \neq 0$, $m \neq 1$, інакше маємо лінійне $(m = 0)$ і рівняння з подільними змінними $(m = 1)$.

Покладемо $z = \dfrac{1}{y^{m-1}} \quad \Rightarrow \quad z = y^{1-m}$.

Тоді $\dfrac{dz}{dx} = (1-m)\dfrac{1}{y^m}\dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^m}{1-m}\dfrac{dz}{dx}$.

Підставляючи у дане рівняння останній вираз отримаємо

$$\frac{y^m}{1-m}\frac{dz}{dx} = p(x)y + q(x)y^m \Big| : y^m \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx} = p(x)\frac{1}{y^{m-1}} + q(x).$$

Оскільки $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$, то

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx} = p(x)z + q(x).$$

Прийшли до лінійного рівняння.

Зауважимо, що розв'язок рівняння Бернуллі можна відшукувати у вигляді $y(x) = u(x)v(x)$ аналогічно тому, як це робили для лінійних рівнянь.

Приклад. Знайти розв’язок рівняння:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}.$$

• Зробимо підстановку $y(x) = u(x)v(x)$.

$$u'v + uv' = \frac{uv}{x} + \frac{x^2}{uv}, \qquad u' = \frac{u}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{u = x}.$$

Тоді

$$xv' = \frac{x^2}{xv} \qquad \Rightarrow \qquad vdv = dx \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\frac{v^2}{2} = x + C}. \qquad y^2 = x^2(2x + 2C).$$ •

б) Рівняння Рікатті

Воно має вигляд:

$$y' = p(x)y + q(x)y^2 + f(x)$$

В загальному вигляді це рівняння не інтегрується, але може бути зведено заміною змінних до рівняння Бернуллі, якщо відомий деякий частинний розв’язок $y_1(x)$ цього рівняння.

Поклавши $y = z + y_1$ і підставляючи у початкове рівняння отримаємо:

$$z' + y_1' = p(x)z + p(x)y_1 + q(x)z^2 + 2q(x)zy_1 + q(x)y_1^2 + f(x)$$

Оскільки $y_1(x)$ – розв’язок, то $y_1' = p(x)y_1 + q(x)y_1^2 + f(x)$ (підкреслені члени взаємно знижуються) і для відшукання z отримаємо рівняння

$$z_1' = (p(x) + 2q(x)y_1)z + q(x)z^2.$$

Це рівняння Бернуллі.

Приклад. Знайти розв’язок диференціального рівняння

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

• Це рівняння Ріккаті. Потрібний деякий частинний розв’язок. Частинним розв’язком може бути функція $y_1 = \frac{1}{x}$ (підбором). Згідно вищевикладеному, розв’язок будемо шукати у вигляді $y = z + \frac{1}{x}$. Підставимо в рівняння:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = z^2 + \frac{2z}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}.$$

Отримали рівняння Бернуллі. Зробимо підстановку $z = uv$.

$$u'v + uv' = u^2v^2 + \frac{2uv}{x},$$

$$u' = \frac{2u}{x} \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = 2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln\left|x^2\right| \Rightarrow \quad \underline{u = x^2}$$

Тоді

$$x^2 v' = x^4 v^2 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v^2} = x^2 dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{v} = \frac{x^3}{3} + C \;\Rightarrow\; \underline{v = -\frac{3}{x^3 + 3C}}.$$

$$z = -\frac{3x^2}{x^3 + 3C}, \qquad y = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 + 3C} \;\bullet$$