РІВНЯННЯ ІЗ ПОДІЛЕНИМИ І ПОДІЛЬНИМИ ЗМІННИМИ

Розглянемо диференційне рівняння виду:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \qquad (1)$$

Перетворимо його до виду:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \quad (f_2 \neq 0) \qquad (2)$$

Вважаючи y відомою функцією від x, (2) можна розглядати, як рівність двох диференціалів. Тоді невизначені інтеграли від них будуть відрізнятись постійним доданком C:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \qquad (3)$$

Ми отримали співвідношення яке зв'язує шукану функцію y, незалежну змінну x та довільну константу C, тобто отримали *загальний інтеграл (загальний розв'язок)* рівняння (2).

Диференційне рівняння типу (2), тобто рівняння:

$$\boxed{M(x)dx + N(y)dy = 0} \qquad (4)$$

називається *рівнянням із поділеними змінними.*

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\int M(x)dx + \int N(y)dy = C} \qquad (5)$$

Рівняння виду:

$$\boxed{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0} \qquad (6)$$

називається *рівнянням із подільними змінними*, оскільки шляхом ділення на $N_1(y)M_2(x)$ воно приводиться до рівняння із поділеними змінними:

$$\boxed{\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0}.$$

Зауважимо, що при діленні можлива втрата частинних розв'язків, які перетворюють на нуль добуток $N_1(y)M_2(x)$. Якщо функції $N_1(y)$ та $M_2(x)$ можуть бути розривними, то можлива поява зайвих розв'язків, що перетворюють на нуль множник $\frac{1}{N_1(y)M_2(x)}$ $\left(N_1(y) \to \infty,\ M_2(x) \to \infty\right)$.

Приклади. Знайти розв'язки диференціальних рівнянь:

1) $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$.

- $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0 \,\Big|\, :(1+y^2):(1+x^2)$

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \frac{y}{1+y^2}dy = C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=C\ \bullet$$

2) $\dfrac{dx}{dt}=4t\sqrt{x}$, $\quad x(1)=1$. Маємо задачу Коші.

• $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=4tdt \quad\Rightarrow\quad \int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\int 4tdt+C$

$2\sqrt{x}=2t^2+2C \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}=t^2+C \Rightarrow \quad x=(t^2+C)^2$.

Таким чином, маємо загальний розв'язок $x=(t^2+C)^2$. Для відшукання константи C скористаємося додатковою умовою $x(1)=1$:

$1=(1^2+C)^2 \quad\Rightarrow\quad C=0$.

Отже маємо частинний розв'язок $x=t^4$ •

РІВНЯННЯ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО РІВНЯНЬ ІЗ ПОДІЛЕНИМИ ЗМІННИМИ

Рівняння виду

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(ax + by + c\right)} \tag{1}$$

Покладемо

$$z = ax + by + c \tag{2}$$

Тоді

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left[\frac{dz}{dx} - a\right] \tag{3}$$

Підставляючи (3) та (2) в (1) приходимо до рівняння:

$$\frac{1}{b}\left[\frac{dz}{dx} - a\right] = f\left(z\right) \qquad \text{чи} \qquad \frac{dz}{dx} = bf\left(z\right) + a\,.$$

Це рівняння із подільними змінними.

$$\frac{dz}{bf\left(z\right) + a} = dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dz}{bf\left(z\right) + a} = x + C$$

Приклад.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

$\bullet$ $z = 2x + y \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} = 2 + \dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 2\,.$

$$\frac{dz}{dx} - 2 = z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z+2} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z+2} = dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|z + 2\right| = x + C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|2x + y + 2\right| = x + C\,.\bullet$$

До рівнянь із подільними змінними приводяться також *однорідні диференційні рівняння*, які мають вигляд:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Зробимо підстановку $z = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \left(zx\right)' = z'x + z$. Тоді рівняння приймає вигляд:

$$z'x + z = f\left(z\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{f\left(z\right) - z} = \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dz}{f\left(z\right) - z} = \ln\left|x\right| + C\,.$$

Приклад.

$(x+y)dx-(y-x)dy=0$

• $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{y-x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x}-1}$ – однорідне рівняння. $\quad z=\dfrac{y}{x}$.

$$z'x+z=\frac{1+z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x=\frac{1+z-z^2+z}{z-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(z-1)dz}{1+2z-z^2}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+2z-z^2\right)}{1+2z-z^2}=\ln|x|+\ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\left|1+2z-z^2\right|=\ln|x|+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|1+2z-z^2\right|^{-\frac{1}{2}}=\ln|Cx| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+2z-z^2}}=Cx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}=Cx\,.\bullet$$

Рівняння виду:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)}$$

приводяться до однорідних рівнянь за допомогою заміни

$$\begin{cases} x=x_1+m \\ y=y_1+n \end{cases},$$

де m і n – константи.

Оскільки $dx=dx_1$, $dy=dy_1$, то рівняння приймає вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{a_1(x_1+m)+b_1(y_1+n)+c_1}{a_2(x_1+m)+b_2(y_1+n)+c_2}\right),$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+(c_1+a_1m+b_1n)}{a_2x_1+b_2y_1+(c_2+a_2m+b_2n)}\right)$$

m і n підберемо таким чином, щоб вирази у дужках в чисельнику і знаменнику обертались на нуль. Таким чином, для відшукання m та n маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1+a_1m+b_1n=0 \\ c_2+a_2m+b_2n=0 \end{cases}$$

Тоді останнє диференціальне рівняння приймає вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{y_1}{x_1}}{a_2+b_2\dfrac{y_1}{x_1}}\right)$$ – маємо однорідне рівняння.

Приклад.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$$

- Покладемо $\begin{cases} x=x_1+m \\ y=y_1+n \end{cases}$.

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+m-y_1-n+1}{x_1+m+y_1+n-3}; \qquad \begin{cases} m-n+1=0 \\ m+n-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}.$$

Тоді

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1-y_1}{x_1+y_1} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1}=\frac{1-\dfrac{y_1}{x_1}}{1+\dfrac{y_1}{x_1}}; \qquad z=\frac{y_1}{x_1} \Rightarrow y_1'=z'x_1+z.$$

$$z'x_1+z=\frac{1-z}{1+z} \Rightarrow \frac{dz}{dx_1}x_1=\frac{1-z-z-z^2}{1+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2}=\frac{dx_1}{x_1} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-2z-z^2\right)}{1-2z-z^2}=\ln|x_1|+\ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1-2z-z^2\right|=\ln|x_1|+\ln|C| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2z-z^2}}=Cx_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{y_1}{x_1}-\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^2}}=Cx_1. \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2\dfrac{y-2}{x-1}-\left(\dfrac{y-2}{x-1}\right)^2}}=C(x-1) \bullet$$