# ОБВІДНА СІМ'Ї КРИВИХ

Нехай дано рівняння виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (1)$$

де $x$ і $y$ – змінні декартові координати, а $C$ – параметр, що може приймати різні фіксовані значення.

При кожному даному значенні параметра $C$ рівняння (1) визначає деяку криву на площині $Oxy$. Надаючи $C$ всі можливі значення, отримаємо *сім'ю кривих*, що залежить від одного параметра, чи, як часто кажуть, *однопараметричну сім'ю кривих*. Таким чином, рівняння (1) є рівнянням однопараметричної сім'ї кривих.

**Означення.** Лінія $L$ називається *обвідною* однопараметричної сім'ї ліній, якщо вона в кожній своїй точці дотикається тієї або іншої лінії із сім'ї, причому в різних точках лінії $L$ до неї дотикаються різні лінії даної сім'ї.

**Приклад 1.** Розглянемо сім'ю ліній $(x - C)^2 + y^2 = R^2$, де $R$ – константа, $C$ – параметр. Це – сім'я кіл радіуса $R$ з центрами на осі $Ox$. Вочевидь, що ця сім'я буде мати обвідними прямі $y = R$, $y = -R$ (рис.1).

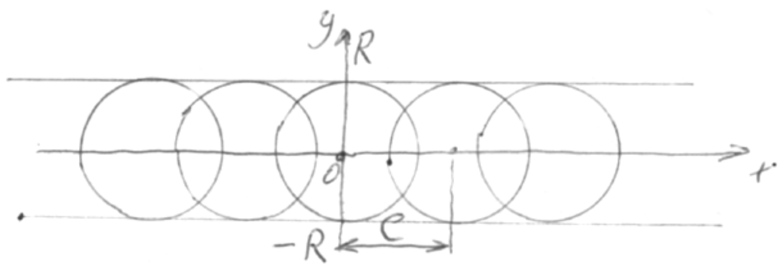


Рис. 1.

**Знаходження рівняння обвідної даної сім'ї.** Нехай дана сім'я кривих (1), що залежать від параметра $C$. Припустимо, що ця сім'я маю обвідну, рівняння якої можна записати у вигляді $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – неперевно-диференційована функція. Розглянемо деяку точку $M(x.y)$, що лежить на обвідній. Ця точка також лежить на деякій кривій сім'ї (1). Цій кривій відповідає певне значення параметра $C$, яке при даних $x$ і $y$ визначається з рівняння (1): $C = C(x, y)$. Отже для усіх точок обвідної виконується рівність

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \qquad (2)$$

Припустимо, що $C(x, y)$ – диференційована функція, що не є сталою в жодному інтервалі розглянутих значень $x$ і $y$. З рівняння (2) обвідної знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до обвідної в точці $M(x.y)$. Продиференціюємо (2) по $x$, вважаючи, що $y$ є функцією від $x$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right)y' = 0,$$

чи

$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_C \left( \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0 . \qquad (3)$$

Далі, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої сім'ї (1) в точці $M(x.y)$ знайдеться з рівності

$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' = 0 \qquad (4)$$

($C$ на даній кривій є сталою).

Припускаємо, що $\Phi'_y \neq 0$, в іншому випадку ми вважали б $x$ функцією, а $y$ аргументом. Оскільки кутовий коефіцієнт обвідної дорівнює кутовому коефіцієнту кривої сім'ї, то з (3), (4) отримуємо

$$\Phi'_C \left( \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0 .$$

Але оскільки на обвідній $C(x, y) \neq const$, то

$$\left( \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) \neq 0 ,$$

тому для її точок має місце рівність

$$\Phi'_C (x, y, C) = 0 . \qquad (5)$$

Таким чином, для визначення обвідної маємо наступні два рівняння:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_C (x, y, C) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Вірне і зворотне: якщо виключивши $C$ з рівнянь (6) отримаємо рівняння $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – диференційована функція, і при цьому значення $C \neq const$ на цій кривій, то $y = \varphi(x)$ є рівнянням обвідної.

**Зауваження 1.** Якщо для сім'ї (1) деяка функція $y = \varphi(x)$ є рівнянням геометричного місця *особливих точок*, тобто точок, де $\Phi'_x = 0$ і $\Phi'_y = 0$, то координати цих точок також задовольняють рівнянням (6).

Дійсно, координати особливих точок можна виразити через параметр $C$, що входить в рівняння (1):

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \qquad (7)$$

Якщо ці вирази підставити в рівняння (1), то отримаємо тотожність відносно $C$:

$$\Phi(\lambda(C), \mu(C), C) = 0 .$$

Диференціюючи цю тотожність по $C$, отримаємо:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0 .$$

Оскільки для особливих точок виконуються рівності $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, то, як наслідок, для них також виконується рівність $\Phi'_C = 0$. Таким чином, координати особливих точок задовольняють рівнянням (6).

Отже, рівняння (6) визначають або обвідну, або геометричне місце особливих точок кривих сім'ї (1), або сполучення того і іншого. Таким чином, отримавши криву, що задовольняє рівнянням (6), необхідно додатково дослідити, є вона обвідною чи геометричним місцем особливих точок.

**Приклад 2.** Знайти обвідну сім'ї кіл

$$(x-C)^2 + y^2 = R^2,$$

Що залежить від одного параметра $C$.

**Розв'язок.** Обвідна визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} (x-C)^2 + y^2 - R^2 = 0 \\ -2(x-C) = 0 \end{cases}$$

Виключаючи $C$ з цих рівнянь, отримаємо $y^2 - R^2 = 0$ чи $y = \pm R$.

З геометричних міркувань ясно, що отримана пара прямих є обвідною, а не геометричним місцем особливих точок, оскільки кола, що входять у сім'ю, особливих точок не мають.•

**Приклад 3.** Знайти обвідну сім'ї полукубічних парабол

$$y^3 - (x-C)^2 = 0.$$

**Розв'язок.**

$$\left.\begin{array}{c} y^3 - (x-C)^2 = 0 \\ 2(x-C) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Вісь $Ox$ є геометричним місцем особливих точок (рис.2).

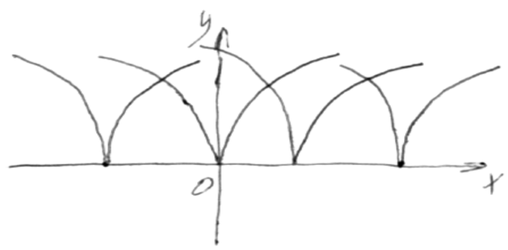


Рис. 2.

Дійсно, знайдемо особливі точки кривої

$$y^3 - (x-C)^2 = 0$$

при фіксованих значеннях $C$. Диференціюючи по $x$ і $y$, знаходимо:

$$F'_x = -2(x-C) = 0,$$

$$F'_y = 3y^2 = 0.$$

Розв'язуючи сумісно три останніх рівняння, знайдемо координати особливої точки: $x = C$, $y = 0$. Таким чином, кожна крива даної сім'ї має особливу точку на осі $Ox$. При неперервній зміні параметра $C$ особливі точки заповнять всю вісь $Ox$.•

# ОСОБЛИВІ РОЗВЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Нехай диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

має загальний інтеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0 . \qquad (2)$$

Припустимо, що сім'я інтегральних кривих, що відповідає рівнянню (2), має обвідну. Доведемо, що ця обвідна також є інтегральною кривою диференціального рівняння (1).

Дійсно, в кожній своїй точці обвідна дотикається до деякої кривої сім'ї, тобто має з нею загальну дотичну. Отже, в кожній загальній точці обвідна і крива сім'ї мають однакові значення $x, y, y'$.

Але для кривої із сім'ї числа $x, y, y'$ задовольняють рівнянню (1). Отже, тому ж рівнянню задовольняють абсциса, ордината і кутовий коефіцієнт кожної точки обвідної. Але це і означає, що обвідна є інтегральною кривою, а її рівняння є розв'язком даного диференціального рівняння.

Оскільки обвідна не є, взагалі кажучи, кривою сім'ї, то її рівняння не може бути отримано із загального інтеграла (2) ні при якому частинному значенні $C$. Розв'язок диференціального рівняння, що не отримується із загального інтеграла ні при якому значенні $C$ і має своїм графіком обвідну сім'ї інтегральних кривих, що входять до загального розв'язку, називається *особливим розв'язком* диференціального рівняння.

Нехай відомий загальний інтеграл (2). Виключаючи $C$ із рівняння (2) і рівняння $\Phi'_C(x, y, C) = 0$, отримаємо рівняння $\Psi(x, y) = 0$. Якщо ця функція задовольняє диференціальному рівнянню (і не належить сім'ї (2)), то це і є *особливий інтеграл.*

Відзначимо, що через кожну точку кривої, що зображує особливий розв'язок, проходить як мінімум дві інтегральні криві, тобто в кожній точці особливого розв'язку порушується єдиність розв'язку.