

УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Уравнения разрешить относительно y' , после этого общее решение искать известными методами:

1) $y'^2 + xy = y^2 + xy'$

• $y'^2 - xy' + xy - y^2 = 0$.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно y' :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$y'_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}}{2} = \frac{x \pm (x - 2y)}{2}$$

а) $y' = x - y$

$$y' = uv$$

$$u'v + uv' = x - uv \Rightarrow u' = -u \Rightarrow \frac{du}{u} = -dx \Rightarrow \underline{u = e^{-x}}$$

$$e^{-x}v' = x \Rightarrow v' = xe^x \Rightarrow v = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C_1$$

$$y = x - 1 + e^{-x}C_1$$

б) $y' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow y = e^x + C_2$ •

2) $xy'^2 - 2yy' + x = 0$

• $y'_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4x^2}}{2x} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$

$$\text{a) } y = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$$

$$\frac{y}{x} = z \quad z + xz' = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dx}{x} \quad \ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = C_1 x$$

$$\text{b) } y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = \frac{C_2}{x}$$

$$\text{3) } y'^2 + x = 2y$$

$$\bullet \quad y'^2 = 2y - x \quad \Rightarrow \quad y'_{1,2} = \pm \sqrt{2y - x}$$

$$\text{a) } y' = \sqrt{2y - x}$$

$$2y - x = z^2 \quad \Rightarrow \quad 2y' - 1 = 2zz' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2zz' + 1}{2}$$

$$\frac{2zz' + 1}{2} = z \quad \Rightarrow \quad 2zz' + 1 = 2z \quad \Rightarrow \quad \frac{2z}{2z - 1} dz = dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2z - 1 + 1}{2z - 1} dz = dx \quad \Rightarrow \quad z + \frac{1}{2} \ln|2z - 1| = x + C$$

$$\sqrt{2y - x} + \frac{1}{2} \ln|2\sqrt{2y - x} - 1| = x + C$$

$$\text{b) } y' = -\sqrt{2y - x}$$

$$2y - x = z^2$$

см. случай а):

$$y' = \frac{2zz' + 1}{2} \quad \frac{2zz' + 1}{2} = -z \quad \frac{2z - 1 + 1}{2z + 1} dz = -dx$$

$$z - \frac{1}{2} \ln|2z + 1| = -x + C$$

$$\sqrt{2y - x} - \frac{1}{2} \ln|2\sqrt{2y - x} + 1| = -x + C \bullet$$

$$4) y'^3 + (x + 2)e^y = 0$$

$$\bullet y' = \sqrt[3]{-(x + 2)e^y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = -(x + 2)^{1/3} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3e^{-\frac{y}{3}} = -\frac{3}{4}(x + 2)^{\frac{4}{3}} + C \Rightarrow e^{-\frac{y}{3}} = \frac{1}{4}(x + 2)^{\frac{4}{3}} - \frac{C}{3} \bullet$$

На практике в редких случаях удается разрешить уравнение относительно производной и еще реже – решить полученные уравнения. В таких случаях решение рекомендуется искать в параметрическом виде, что резко расширяет класс задач, для которых удается найти аналитическое решение.

В следующих уравнениях ввести параметр и решить.

$$5) y = y'^2 + 2y'^3$$

$$\bullet y' = t, \quad y = t^2 + 2t^3; \quad x(t) = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = 2t \frac{dt}{dx} + 6t^2 \frac{dt}{dx} \Rightarrow t = \frac{dt}{dx} (2t + 6t^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = (2 + 6t)dt \quad \Rightarrow \quad x = 2t + 3t^2 + C$$

Решение имеет вид:

$$\begin{cases} y = t^2 + 2t^3 \\ x = 2t + 3t^2 + C \end{cases} \bullet$$

$$6) x = y'^3 + y'$$

$$\bullet y' = t$$

$$x = t^3 + t$$

$$y(t) = ?$$

$$\frac{dx}{dy} = 3t^2 \frac{dt}{dy} + \frac{dt}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} (3t^2 + 1) = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dy = (3t^3 + t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C$$

Тогда решение определяется уравнениями:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C \\ x = t^3 + t \end{cases} \bullet$$

$$7) x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$$

$$\bullet y' = t,$$

$$x = t \sqrt{t^2 + 1},$$

$$x(t) = ?$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dt}{dy} \sqrt{t^2 + 1} + t \cdot \frac{1}{2} (t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} 2t \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{dt}{dy} \left(\sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) dt$$

$$dy = t \left(\sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) dt$$

$$dy = \frac{1}{2} \frac{2(t^2 + 1) - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} d(t^2 + 1)$$

$$t^2 + 1 = z$$

$$dy = \left(\frac{z}{\sqrt{z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z}} \right) dz$$

$$y = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot z^{\frac{1}{2}} + C$$

$$y = \frac{2}{3} (t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C$$

Решение имеет вид:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} (t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C \\ x = t\sqrt{t^2 + 1} \end{cases} \bullet$$

$$\mathbf{8) (y'+1)^3 = (y'-y)^2}$$

$$\bullet y' - y = \pm \sqrt{(y'+1)^3} \Rightarrow y = y' \pm \sqrt{(y'+1)^3}$$

$$\mathbf{a) } y = y' + \sqrt{(y'+1)^3}$$

$$y' = t \quad y = t + \sqrt{(t+1)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + \frac{3}{2} \sqrt{t+1} \frac{dt}{dx}$$

$$t = \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{t+1} \right) \frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{t+1}}{t} \right) dt$$

$$\| \int \frac{\sqrt{t+1}}{t} dt = \left| \begin{array}{l} t+1 = u^2 \\ t = u^2 - 1 \Rightarrow dt = 2udu \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2 \left(\int \frac{u^2 - 1}{u^2 - 1} du + \int \frac{1}{u^2 - 1} du \right) = 2 \left(u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) = 2\sqrt{t+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| \|$$

$$x = \ln|t| + 3\sqrt{t+1} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C$$

$$\begin{cases} y = t + \sqrt{(t+1)^3} \\ x = \ln|t| + 3\sqrt{t+1} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C \end{cases}$$

$$\text{б) } y = y' - \sqrt{(y'+1)^3}$$

По аналогии со случаем **а)** имеем:

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{t+1}}{t} \right) dt = dx$$

$$\begin{cases} y = t\sqrt{(t+1)^3} \\ x = \ln|t| - 3\sqrt{t+1} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C \end{cases} \bullet$$

Домашнее задание.

$$1) y'^2 - 2xy' = 8x^2$$

$$3) x(y'^2 - 1) = 2y'$$

$$2) xy'^2 = y(2y' - 1)$$

$$4) y = \ln(1 + y'^2)$$

В задачах **241—250** найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть); дать чертеж.

$$241. y'^2 - y^2 = 0.$$

$$242. 8y'^3 = 27y.$$

$$243. (y' + 1)^3 = 27(x + y)^2.$$

$$244. y^2(y'^2 + 1) = 1.$$

$$245. y'^2 - 4y^3 = 0.$$

$$246. y'^2 = 4y^3(1 - y).$$

$$247. xy'^2 = y.$$

$$248. yy'^3 + x = 1.$$

$$249. y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1).$$

$$250. 4(1 - y) = (3y - 2)^2 y'^2.$$

Уравнения **251—266** разрешить относительно y' , после этого общее решение искать обычными методами (§§ 2, 4, 5, 6). Найти также особые решения, если они есть.

$$251. y'^2 + xy = y^2 + xy'. \quad 252. xy'(xy' + y) = 2y^2.$$

$$253. xy'^2 - 2yy' + x = 0. \quad 254. xy'^2 = y(2y' - 1).$$

$$255. y'^2 + x = 2y. \quad 256. y'^3 + (x + 2)e^y = 0.$$

$$257. y'^2 - 2xy' = 8x^2. \quad 258. (xy' + 3y)^2 = 7x.$$

$$259. y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1).$$

$$260. y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x.$$

$$261. y'^4 + y^2 = y^4.$$

$$262. x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'.$$

$$263. y(xy' - y)^2 = y - 2xy'.$$

$$264. yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2.$$

$$265. y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2.$$

$$266. y(y - 2xy')^2 = 2y'.$$